

Classificação das Cônicas em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Jairo Menezes E Souza ¹

UFG-CAC — Catalão, Brazil — 2013

1. Resumo

Vamos introduzir o conceito de Curvas Algébricas Planas Projetivas e classificar as Curvas de grau 2

2. Introdução

A Geometria Alalítica criada por Descartes deu origem a Geometria Diferencial e a Geometria Algébrica. Para o início do estudo de ambas as áreas é bom começar com o objeto mais simples que são as curvas, especialmente curvas planas.

3. Preliminares

Definition 1. Dado um polinômio não constante $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ a *curva algébrica plana afim* $V(f)$ é o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tais que $f(x, y) = 0$.

Example 1. O Polinômio $f(X, Y) = Y - X^2$ define uma parábola.

Definition 2. Definimos o Plano Projetivo Complexo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ como o quociente de $\mathbb{C}^3$ pela relação de equivalência definida por: $(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1)$ se e somente se $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$

Notação denotamos a classe de equivalência de (x_0, y_0, z_0) por $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Definition 3. Um polinômio $F(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ é dito homogêneo grau d se é uma soma de monômios de grau d .

Definition 4. Seja $f = \sum_{i=0}^d f_i$ onde cada $f_i \in \mathbb{C}[X, Y]$ é um polinômio homogêneo de grau i , com $f_d \neq 0$. A homogeneização de f é o polinômio homogêneo de grau d F dado por

$$F(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^d Z^{d-i} f_i(X, Y)$$

Definition 5. Dado o polinômio homogêneo F de grau d definimos a *curva plana projetiva* dada por F pelo conjunto dos pontos $(x : y : z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tais que $F(x, y, z) = 0$.

Obcervações

- Chamamos a reta $Z = 0$ de reta no infinito.
- O fecho projetivo de uma curva afim $V(f)$, $f \in \mathbb{C}[X, Y]$, é a curva projetiva definida pela homogeneização de F de f .

Definition 6. Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma transformação linear invertível. Já que esta transformação linear preserva retas pela origem, definimos uma bijeção natural também chamada por $T : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que chamamos de mudança de variáveis projetivas.

Definition 7. Ainda associada a T temos um $\mathbb{C}$ -isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$T_* : \mathbb{C}[X, Y, Z] \rightarrow \mathbb{C}[X, Y, Z]$$

Dado por

$$(T_*F)(X, Y, Z) = [X \ Y \ Z][a_{ij}]$$

Onde $[a_{ij}]$ é uma matriz de T em relação a base canônica.

Obcervação Temos que:

$$(T_*F)(x, y, z) = F(T^{-1}(x, y, z))$$

4. Classificação das Cônicas

Uma Cônica é o conjunto dos zeros de um polinômio homogêneo não nulo de grau 2. De forma geral a cônica é dada por

$$AX^2 + BXY + CXZ + DY^2 + EYZ + FZ^2 = 0$$

Podemos enchergar o polinômio fazendo a seguinte operação matricial

$$[X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{B}{2} & D & \frac{E}{2} \\ \frac{C}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Chamamos de $a = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{B}{2} & D & \frac{E}{2} \\ \frac{C}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix}$. Como a é simétrica temos que ela é diagonalizavel. E como estamos no corpo dos complexos podemos achar uma base em que a matriz da Transformação T é expressa com 1 e 0.

Assim, após transformações projetivas temos três opções para uma cônica:

$$1) a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que correspondem às seguintes cônicas:

1) $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ (cônica irredutível)

2) $X^2 + Y^2 = 0 \Leftrightarrow (X + iY)(X - iY) = 0$ (duas retas)

3) $X^2 = 0$ (reta dupla)

Referências

Referências

[I] VAISENSHER, Israel. Introdução às Curvas Alébricas Planas. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

* A impressão deste foi financiada pela FAPEG .

²Pôster apresentado no I Workshop Álgebra, UFG-CAC, GO.

¹DM-UFG-CAC, email: jairoms@ufg.br.