



Grupos Sóficos

Danilo Sanção da Silveira ¹
UFG-CAC — Catalão, Brazil — 2013



1. Resumo

Neste texto, inicialmente, relembramos conceitos básicos da Teoria de Grupos. Posteriormente, tratamos sucintamente da classe dos grupos sóficos, os quais, são vistos com uma generalização natural dos grupos residualmente finitos.

2. Indrodução

A classe dos grupos sóficos foi primeiramente tratada por M. Gromov no seu artigo Endomorphisms of symbolic algebraic varieties (1999). Desde então, vários outros artigos foram publicados tratando desta classe de grupos nas mais diversas áreas (Lógica, Teoria de operadores, Dinâmica simbólica, Topologia etc). Atualmente sabe-se que esta classe de grupos é bastante abrangente e que algumas conjecturas (Connes Embedding Conjecture-1979 e Gottschalk Surjunctivity Conjecture-1973) são verdadeiras para grupos sóficos. Até hoje, não se conhece um grupo não-sófico. Neste texto iremos definir, dar alguns exemplos de grupos sóficos, enunciar resultados conhecidos e por fim destacar alguns problemas em aberto.

3. Preliminares

Inicialmente, apresentaremos conceitos básicos (vistos em curso de graduação) da teoria de grupos e o conceito de métrica.

Definition 1. Um grupo é um conjunto não-vazio G equipado com uma operação binária, digamos $*$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- 1) se $a, b \in G$, então $a * b \in G$;
- 2) $(a * b) * c = a * (b * c)$, para quaisquer $a, b, c \in G$;
- 3) existe elemento $e_G \in G$ tal que $e_G * a = a = a * e_G$, para qualquer $a \in G$;
- 4) para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = e_G = b * a$.

Observações:

- Quando não houver risco de confusão, iremos denotar $a * b$ e e_G por ab e e , respectivamente.
- No item 4, iremos indicar b por a^{-1} , pois pode-se mostrar que b é único.
- Quando a cardinalidade de G for um número finito n diremos que G é um grupo finito e indicaremos por $|G| = n$. Caso contrário, diremos que G é um grupo infinito.
- Quando existir a necessidade de explicitar a operação $(*)$ de um grupo G iremos indicar isso por $(G, *)$.

Example 1. Seja $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. O conjunto $\mathcal{P}(X) = \{f : f \text{ é uma bijeção em } X\}$ com o produto definido como a composição de funções é um grupo chamado grupo das permutações em X , ou o grupo de simetria de X .

Definition 2. Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto $H \subseteq G$ é dito um subgrupo de G se H equipado com a operação $*$ é ainda um grupo.

Existem subconjuntos que não são subgrupos. Por exemplo, no grupo $(\mathbb{Z}, +)$ o subconjunto dos números ímpares não é um subgrupo, enquanto que o subconjunto dos números pares é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Definition 3. Sejam $(G, *)$ e $(H, *)$ grupos. Uma função $\varphi : G \rightarrow H$ é dita um homomorfismo de grupos se tal função preserva a operação dos grupos, isto é, para quaisquer $a, b \in G$ tem-se:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

Proposition 1. Seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então:

- 1) $\varphi(e_G) = e_H$;
- 2) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$;
- 3) φ é injetor se, e somente se, $Nuc(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = e_H\} = \{e_G\}$.

Definition 4. Uma métrica no conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo os seguintes axiomas:

- 1) $d(x, y) \geq 0$, para quaisquer $x, y \in X$, e a igualdade é produzida se, e somente se $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$, para quaisquer $x, y \in X$;
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, para quaisquer $x, y, z \in X$.

O número $d(x, y)$ é chamado de distância entre x e y .

Definition 5. Uma métrica bi-invariante num grupo G é uma métrica d satisfazendo a seguinte propriedade:

$$d(gx, gy) = d(x, y) = d(xg, yg), \quad \forall x, y, g \in G.$$

Example 2. Seja X um conjunto finito. A aplicação $d_h : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_h(\sigma, \tau) = \frac{\#\{x \in X : \sigma(x) \neq \tau(x)\}}{\#X}$$

é uma métrica bi-invariante.

A métrica definida acima é conhecida como a distância de Hamming normalizada sobre o grupo de permutações $\mathcal{P}(X)$.

Para mostrar que d_h satisfaz a desigualdade triangular, ou seja,

$$d_h(\sigma, \tau) \leq d_h(\sigma, \alpha) + d_h(\tau, \alpha)$$

observe que se $\sigma(x) \neq \tau(x)$, então $\sigma(x) \neq \alpha(x)$ ou $\tau(x) \neq \alpha(x)$. Com isso, temos a seguinte inclusão:

$$\{x \in X : \sigma(x) \neq \tau(x)\} \subseteq \{x \in X : \sigma(x) \neq \alpha(x)\} \cup \{x \in X : \tau(x) \neq \alpha(x)\}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo,} \\ d_h(\sigma, \tau) &= \frac{\#\{x \in X : \sigma(x) \neq \tau(x)\}}{\#X} \leq \frac{\#\{x \in X : \sigma(x) \neq \alpha(x)\} + \#\{x \in X : \tau(x) \neq \alpha(x)\}}{\#X} = \\ &= d_h(\sigma, \alpha) + d_h(\tau, \alpha). \end{aligned}$$

É cálculo rotineiro verificar as outras condições.

Trataremos os grupos que estamos interessados (grupos sóficos) como uma generalização natural dos grupos residualmente finitos. A saber:

Definition 6. Um grupo G é residualmente finito (RF) se para todo conjunto finito $F \subseteq G$ existe um homomorfismo φ de G para um grupo finito H tal que $\varphi|_F$ é injetivo.

Example 3. Todo grupo finito G é RF.

De fato, basta verificar que a aplicação $\varphi : G \rightarrow \mathcal{P}(G)$, definida por $\varphi(g)(x) = gx$ é um homomorfismo injetivo.

Definition 7. Sejam G um grupo, $F \subseteq G$ um subconjunto finito e $\epsilon \in (0, 1)$. Considere ainda, um conjunto finito não-vazio X . Uma aplicação $\varphi : G \rightarrow \mathcal{P}(X)$ é dita um (F, ϵ) -homomorfismo se esta satisfaz as seguintes condições:

- 1) para quaisquer $a, b \in F$, tem-se $d_h(\varphi(ab), \varphi(a)\varphi(b)) \leq \epsilon$;
- 2) para quaisquer $a, b \in F$ com $a \neq b$, tem-se $d_h(\varphi(a), \varphi(b)) > 1 - \epsilon$.

Definition 8. Um grupo G é dito sófico se para qualquer conjunto finito $F \subseteq G$ e $\epsilon \in (0, 1)$, existe um conjunto finito não vazio X e um (F, ϵ) -homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Example 4. Todo grupo G finito é sófico. De fato, a aplicação $\varphi : G \rightarrow \mathcal{P}(F)$ dada por $\varphi(g)(h) = gh$ é um homomorfismo de grupo, e portanto é um (F, ϵ) -homomorfismo para qualquer $F \subset G$.

4. Resultados

Proposition 2. São verdadeiras as seguintes afirmações:

- 1) Subgrupo de grupo sófico é sóficos.
- 2) Todo grupo residualmente finito é sófico.
- 3) Produto direto e soma direta de grupos sóficos é sófico.
- 4) Produto livre de grupos sóficos é sófico

As demonstrações destes fatos podem ser encontradas em [T], [P] e [Y].

Observe que na definição anterior (de grupo sófico) colocamos restrições para a métrica e para contra-domínio do (F, ϵ, α) -homomorfismo. Em 2008, Glebsky-Rivera ([R]) definiram a classe dos grupos w-sóficos (do inglês: weakly sofic groups), a saber:

Definition 9. Dizemos que um grupo G é w-sófico se existe um $\alpha \in (0, 1)$ tal que para qualquer conjunto finito $F \subseteq G$ e $\epsilon \in (0, 1)$, existe um grupo finito H com uma métrica bi-invariante d e um (F, ϵ, α) -homomorfismo $\varphi : G \rightarrow (H, d)$.

Observe que todo grupo sófico também é w-sófico.

5. Problemas em Aberto

Question 1. Todo grupo é sófico?

Question 2. Todo grupo w-sófico é também sófico?

Question 3. Todo grupo é w-sófico?

Question 4. Toda extensão (finita ou não) de grupos (w-)sóficos é (w-)sófico?

Question 5. Todo grupo virtualmente w-sófico é (w-)sófico?

Question 6. Todo grupo sófico-por-(sófico não amenable) é (w-)sófico?

Question 7. Todo grupo finitamente apresentado é (w-)sófico?

Question 8. Que condições são suficientes para que um grupo seja (w-)sófico?

Referências

Referências

- [T] Ceccherini-Silberstein, Tulio; Coornaert, Michel: Cellular automata and groups.Springer-Verlag, 2010.
- [R] L. Glebsky, L. M. Rivera. Sofic groups and profinite topology on free groups. Journal of Algebra. (2008), pp.3512–3518.
- [P] V. G. Pestov, A. Kwiatkowska. An introduction to hyperlinear and sofic groups. Mathematical Society Lecture Notes Series 406, Cambridge University Press (2012), pp. 145-186.
- [G] M. Gromov, Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. J. Eur. Math. Soc. (1999), 109-197.
- [Y] Y. Cornuier, A sofic group away from amenable groups. Mathematische Annalen. (2011), 269-275.



* A impressão deste foi financiada pela FAPEG .

²Pôster apresentado no I Workshop Álgebra, UFG-CAC, GO.

¹DM-UFG-CAC, email: sancaodanilo@gmail.com.