Aplicações das Equações Diofantinas

Patrícia Cristina Souza dos Santos, Fabíola Ribeiro Borges, Igor dos Santos Lima (Orientador)
(patriciacristina_souza@hotmail.com, fabiolaerogerio@hotmail.com, igor.matematico@gmail.com)

Introdução

Será falado sobre a principal aplicação do máximo divisor comum que é a resolução de equações diofantinas. São equações onde se buscam soluções em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A teoria das Equações Diofantinas é o ramo da teoria dos números que investiga as soluções inteiras ou racionais de equações polinomiais. O nome Equações Diofantinas é uma homenagem a um dos maiores algebristas da Grécia antiga, Diofante de Alexandria, que formulou e resolveu muitas equações.

Preliminares: Equações Diofantinas

- Definição: Uma equação diofantina é linear se ela tiver a forma
  $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$.
  Em particular, será tratado apenas as equações diofantinas lineares de grau 2, ou seja, $ax + by = c$, com a, b e c inteiros.
- Definição: Dizemos que a equação diofantina $ax+by=c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se existem inteiros x_o e y_o tais que $ax_o+by_o=c$. O par (x_o,y_o) é chamado de solução da equação dada.
  Exemplos:
- A equação $5x+0{,}5y+1$ não é uma equação diofantina, pois 0,5 não é um número inteiro.
- A equação $2x+3y=1$ é uma equação diofantina, pois o par $(5,-3)$ é uma solução em $\mathbb{Z}$ desta equação.

Por outro lado, a equação $6x+10y=5$ não tem solução em $\mathbb{Z}$, uma vez que $mdc(6,10)=2$ e $2 \nmid 5$.

Corolário: Se a e b são primos entre si, então a equação diofantina $ax+by=c$ tem solução qualquer que seja o inteiro c.

Corolário: A equação $ax+by=1$ tem solução se, e somente se, a e b são primos entre si.

Proposição: Se (x_o, y_o) é uma solução em $\mathbb{Z}$ da equação diofantina $ax+by=c$, então todas as demais soluções desta equação são da forma:

$X_1=x_o+bt/d$ e $y_1= y_o-at/d$,

Para algum t pertencente a $\mathbb{Z}$, onde o $d=mdc(a,b)$.

Demonstração:

Mostremos primeiro que todo par $(x_o + (b/d)t,\ y_o - (a/d)t)$ é solução da equação considerada. De fato,

$a(x_o+(b/d)t) + b\,(y_o - (a/d)t)=$

$ax_o + a(b/d)t +by_o – b(a/d)t=$

$ax_o + by_o + (ab-ba/d)t=$

$ax_o+by_o=c$, pois (x_o,y_o) é solução por hipótese.

De outra parte, seja (x', y') uma solução genérica da equação. Então:

$ax'+by'= c = ax_o+by_o$

Daí: $a(x' - x_o)b(yo - y')$.

Mas como d é divisor de a e de b, então $a=dr$ e $b=ds$, para convenientes inteiros r e s, primos entre si. Logo,

$dr(x' - x_o)= ds(y_o - y')$

e, portanto

$r(x' - x_o)=s(y_o - y')$.

Essa igualdade mostra que r divide $s(y_o-y')$. Mas, como r e s são primos entre si, então r divide y_o-y', (pois se a e b são inteiros primos entre si e a |bc, então a|c. Logo,

$y_o - y'=rt$ para algum t pertencente a $\mathbb{Z}$. Levando em conta que $r=a/d$, então $y'=yo-(a/d)t$.

Agora, em consequência,

$r(x' - x_o) =s(y_o - y')=srt$.

Obtém-se $x'=x_o+ (b/d)t$.

Aplicações

- Determinar todas as soluções inteiras da equação diofantina linear de $56x+72y=40$.
  Solução: Calculando o $mdc(72,56)$
  $72=56.1+16$
  $56=16.3+8$
  $16=8.2+0$
  $8 = 56 – 16.3 = 56 – (72 –56.1).3 = 56.4 – 72.3 = 56.(4) + 72(-3)$
  Temos: $40 = 8.5 = 56.(4.8) + 72.(-3.5) = 56.(32) + 72(-15)$.
  Solução particular: $x_o =32$ e $y_o =-15$.
  Todas as soluções:- $x = 32 + (72/8)t = 32 + 9t$ e $y = -15 - (56/8)t = -15 - 7t$. Resposta: $-x = 32 + 9t$ e $y = -15 – 7t$
- Demonstrar que se a e b são inteiros positivos primos entre si, então a equação diofantina $ax–by = c$ têm um número infinito de soluções inteiras e positivas.
  Solução: A solução geral da equação $ax-by=c$ é $x = x_0 + (-b/d)t$ e $y = y_0 – (a/d)t$ onde x_0 e y_0 é uma solução particular e $d =mdc(a,b)$. As soluções serão positivas se $x_0 + (-b/d)t > 0 \Rightarrow x_0 –(b/d)t > 0 \Rightarrow (b/d)t < x_0$ (b e d são positivos) $\Rightarrow t < x_0.d/b$ e $y_0 – (a/d)t > 0 \Rightarrow t < y_0d/a$. Como t é menor que os dois valores, existem infinitos valores para t e por conseguinte, uma infinidade de soluções inteiras e positivas para a equação.

- A equação $6x+10y=5$ é uma equação diofantina, contudo esta equação não possui solução em $\mathbb{Z}$. Basta notar que 6x e 10y são números pares quaisquer que sejam os inteiros x e y. Logo a soma $6x+10y$ será sempre par, o que implica que $6x+10y$ não pode ser igual a 5.

- Teorema: A equação diofantina $ax+by=c$ tem solução se, e somente se, $mdc(a, b)$ divide c.
  Demonstração:

⇨ (=>)Suponha que $ax+by =c$ tem solução. Então existem inteiros x_o e y_o tais que $ax_o+by_o=c$. Seja $d=mdc(a,b)$. Então d divide a e b. Logo, $a=k_1d$ e $b=k_2d$. Segue que $c=(k_1d)x_o+(k_2d)y_o \Rightarrow c=k_1dx_o+k_2dy_o \Rightarrow c= dk_1x_o+dk_2y_o \Rightarrow c= d(k_1x_o+k_2y_o)$. Chamando $(k_1x_o+k_2y_o)=q$. Então, $c=dq \Rightarrow d|c$.

(<=) Suponha que $d=mdc(a,b)$ divide c. Então, $c=kd$, para algum inteiro k

Agora, como $d=mdc(a,b)$, existem inteiros m_o e n_o tais que $am_o+bn_o=d$. Segue que $K(am_o+bn_o)=KD \Rightarrow akm_o+bkn_o=c \Rightarrow a(km_o)+b(kn_o)=c$. Logo o par (km_o,kn_o) é uma solução da equação $ax+by=c$.

Exemplos:

Temos que o mdc $(2,3) =1$ e $1|1$, logo a equação $2x+3y=1$ tem solução em $\mathbb{Z}$.

- Exprimir 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.
  Solução: De acordo com o enunciado, sejam 7x e 11y os dois inteiros positivos.
  Temos então $7x + 11y = 100$. Resolvendo $7x + 11y = mdc(7,11) = 1$ temos:
  $11 = 7.1 + 4$; $7 = 4.1 + 3$; $4 = 3.1 + 1$
  $1 = 4 – 3.1 = 4 – (7 – 4.1)1 = 4.2 – 7.1 = (11 – 7.1)2 – 7.1 = 7(-3) + 11.(2)$
  Como $100 = 100.1$ temos $100 = 7(-3.100) + 11(2.100) = 7(-300) + 11(200)$
  As soluções são: $x = -300 + 11t$ e $y = 200 – 7t$.
  Como x e y são inteiros positivos $-300 + 11t > 0 \Rightarrow t > 300/11 > 27$ e $200 – 7t > 0 \Rightarrow t < 200/7 \Rightarrow t < 29$. Portanto, $t = 28$. Neste caso temos $x = -300 + 11.28 = 8$ e $y = 200 – 7.29 = 4$. Os números são $7x = 7.8 = 56$ e $11.4 = 44$. Resposta: 56 e 44.
- Uma peça de teatro vende ingressos e cobra R$7,50 por criança e R$18,00 por adulto. Numa noite arrecadou-se R$900,00. Quantos espectadores assistiram ao espetáculo, sabendo que havia mais adulto do que crianças?
  Solução: Seja x o número de crianças, y o número de adultos que assistiram.
  Temos que resolver então a equação diofantina $7{,}5x + 18y = 900$ sob a condição adicional $y > x \geq 0$.
  Ou seja, $15x + 36y = 1800$.
  Observando-se ainda $mdc(15, 36) = 3|1800$, esta equivale a $5x + 12y = 600(*)$.
  Como $(120, 0)$ é obviamente uma solução de $(*)$, vemos que a solução geral de $(*)$
  é dada por $\begin{cases} y = −5t \\ x = 120 + 12t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$
  De $y > x \geq 0$ decorre $−5t > 120 + 12t \geq 0$ e daí
  $−7, 05... = −120 /17 > t \geq −120/12= −10$,
  ou seja, $−10 \leq t < −7, 05...$, o que dá
  $t \in \{−10, −9, −8\}$
  As 3 possíveis soluções são então:
  $\begin{cases} x =0 \\ y=50 \end{cases}$ $\begin{cases} x=12y \\ y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} x=24 \\ y=40 \end{cases}$

Bibliografia

http://ellalves.net.br/textos/conteudo/20/teoria_dos_numeros_exercicios_de_equacoes_diofantinas

http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/diofantina.html

http://www.mat.unb.br/~maierr/tnotas.pdf

* A impressão deste foi financiada pela FAPEG .