Um Pouco de Logaritmo

Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia-IMTec
Universidade Federal de Goiás/RC

rocha.ufg@gmail.com.br

Resumo.

Pretendemos trazer "Um Pouco de Logaritmo" à superfície das nossas discussões. Um tema que, séculos atrás, teve seu apogeu quando revelou um método que permitiu efetuar multiplicações, divisões potenciações e extrações de raízes com certa presteza. Hoje com o advento das calculadoras os logaritmos perderam esta utilidade mas o desenvolvimento da matemática e da ciência de modo geral, têm nos revelado a existência de relações intrínsecas entre os logaritmos e os diversos fenômenos químicos, físicos, biológicos e econômicos. Discutiremos idéias de uma definição geométrica dos logaritmos e veremos a variedade de aplicações simples e, de certa forma, surpreendentes que derivam destas idéias.

Palavras-chave: Logaritmo, Exponencial, Aplicações.

1 Introdução

A importância intrínseca desse conteúdo no desenvolvimento dos estudos de matemática, na influência em outras áreas tais como física, química, biologia e economia já é sem dúvida uma motivação para se pensar sobre a belíssima idéia de logaritmo.

Muitos aspectos podem ser abordados a respeito deste tema, um deles é a dificuldade cognitiva dos alunos em sua compreensão. Diante dos métodos repetitivos e pouco construtivos que visam somente a transmissão do conteúdo, questões pertinentes são elaboradas por aqueles que têm a dura tarefa de ensinar este conteúdo em qualquer nível de ensino: " Como atingir os alunos?", " Quais são as alternativas para se abordar o tema?", "Existe alguma aplicação prática?", "Por que se estuda logaritmo?", etc.

Não pretendemos elaborar uma proposta de ensino mas queremos trazer algumas discussões e sugestões das quais, acreditamos, se possa extrair uma tal proposta.

2 História

Se desejamos estabelecer um processo de construção do conhecimento baseado na discussão, na argumentação, na contra-argumentação e na criação de conjecturas para somente depois estabelecermos a definição formal, então cremos ser importante relembrarmos fatos históricos que nortearam e motivaram o estudo de logaritmos.

Pode parecer surpreendente mas, realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação já foi algo extremamente dispendioso a tempos atrás, quando ainda não podíamos contar com as mágicas calculadoras. Isto se deu, por exemplo, no final do século XVI, quando do desenvolvimento da Astronomia e da Navegação que primaram pelos extensos e trabalhosos cálculos aritméticos. Naquela época determinar um método que permitisse realizar as operações aritméticas com mais agilidade era um problema essencial.

Neste sentido vários estudiosos da época se debruçaram neste ideal e com êxito se destacaram dois deles: John Napier (1550-1617) e Jost Bürgi (1552-1632), que em estudos independente publicaram tabelas as quais ficaram conhecidas como *tábuas de logaritmo*. Uma grande descoberta científica da época. Como a influência do teólogo e matemático escocês Napier no desenvolvimento dos logaritmos (do grego logos=razão e arithmos=número) foi mais notória que a do matemático e inventor suíço Bürgi, ele tornou-se mais conhecido. Ainda segundo [1], Napier dedicou seus estudos aos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados no livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, em 1614, que significa *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos* o que colocaria a origem de suas idéias em 1594 aproximadamente.

Após a publicação de sua primeira tábua de logaritmos Napier juntamente com o matemático inglês Henry Brigs (1561 a 1631), apresentou uma nova tábua, proporcionando melhor interpretação, contendo os chamados logaritmos decimais. Esta tábua foi publicada por Brigs em 1617.

Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números, onde a cada número da coluna à esquerda corresponde um número à direita, que denominamos o seu logaritmo. Hoje, uma tal correspondência recebe o nome de *função*, mas convém ressaltar que cronologicamente a idéia de logaritmo precede o conceito matemático de *função*. É interessante que com esta tábua podemos multiplicar dois números utilizando-nos da soma de outros dois, para isto, basta somarmos seus logaritmos e, com o resultado, vamos à tabela e procuramos na coluna da direita esse resultado e, a seguir, olhamos na coluna da esquerda o valor lá impresso. Este valor é o produto procurado. Também veremos como calcular divisões e potenciações utilizando-nos das tábuas.

A primeira constatação da possibilidade de se reduzir uma multiplicação a uma adição ocorreu mediante a comparação dos termos de uma progressão aritmética (PA) com os de uma progressão geométrica (PG). Vejamos o exemplo seguinte onde na primeira linha temos uma PA de razão 1 e na segunda temos uma PG de razão 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Se pretendemos saber o resultado da multiplicação de dois termos da PG, digamos 16 e 128, basta somarmos os termos a eles correspondentes 4 e 7 na PA e tomarmos o termo 2048 que corresponde ao resultado desta soma. Assim, 16 x 128 = 2048. Aqui, estamos apenas utilizando-nos da conhecida propriedade de potência de mesma base (diga-se de passagem, historicamente os logaritmos antecederam a notação exponencial) que em notação já bem propagada na atualidade estabelece:

$$16 \text{ x } 128 = 2^4 \text{ x } 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11} = 2048.$$

Seguindo por esse caminho podemos construir uma tábua de logaritmos de "*base*" 2, onde na coluna à esquerda listamos as potências de 2:

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

e à direita os expoentes correspondentes

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

O fato desta tábua só permitir calcular produtos de números da forma 2^n, com n um número inteiro positivo a torna insuficiente para vários cálculos ainda que troquemos a "*base*" 2 por outra "*base*" b, com b sendo um número inteiro arbitrário. O desenvolvimento da notação exponencial, da propriedade fundamental da potência de expoentes racionais e da constatação de que todo número real positivo poderia ser arbitrariamente aproximado por potências (com expoentes racionais) de um dado número positivo diferente de 1, possibilitou a elaboração de tábuas de logaritmos mais satisfatórias.

3 As Definições de Logaritmo

3.1 A Definição Tradicional de Logaritmo

Antes de passarmos à definição propriamente, cabe-nos destacar algumas notações e conceitos de potência de um número real com expoente racional (isto é, número da forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros e $q \neq 0$) qualquer, adotadas neste texto.

Seja b um número real positivo. Para um dado inteiro positivo n escreveremos

$$b^n = b.b.b \cdots b \qquad (n \text{ fatores})$$

Para m e n inteiros positivos vale:

$$b^m.b^n = b^{m+n} \qquad (propriedade\ fundamental)$$

Para que tenhamos $b^0.b^n = b^{0+n} = b^n$ convencionaremos:

$$b^0 = 1.$$

Para estendermos a noção de potência à expoentes negativos de modo que a propriedade fundamental seja mantida colocamos:

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

dessa forma $b^{-n}.b^n = b^{-n+n} = b^0 = 1$.

Para dois números reais positivos dados b e q, definimos a *raiz q-ésima* do número b, como o número *positivo* $\sqrt[q]{b}$ tal que $(\sqrt[q]{b})^q = b$.

Afim de considerar potência de número racional $\frac{p}{q}$ de modo a estender a noção dada para números inteiros, gostaríamos que ocorresse:

$$(b^{\frac{p}{q}})^q = b^{(\frac{p}{q}.q)} = b^p.$$

Em outras palavras $b^{\frac{p}{q}}$ é o número real positivo cuja q-ésima potência coincide com b^p e, devido a definição de raiz, isto nos diz que,

$$b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$$

Definição 1. *Dados os números reais positivos a e b, $b \neq 1$, o* ***logaritmo*** *de a na base b é o expoente y a que se deve elevar b de tal modo que*

$$b^y = a.$$

Denota-se $y = log_b a$ e lê-se y é o ***logaritmo*** *de a na base b.*

Assim, $y = log_b a \Leftrightarrow b^y = a$. Uma propriedade conhecida como *fundamental* dos logaritmos segue diretamente da definição:

$$log_b(a_1.a_2) = log_b a_1 + log_b a_2.$$

Para ver isto suponha que $log_b(a_1.a_2) = y$, $log_b a_1 = y_1$ e que $log_b a_2 = y_2$, segue que:

$$b^y = a_1.a_2 = b^{y_1}.b^{y_2} = b^{y_1+y_2} \Leftrightarrow b^y = b^{y_1+y_2} \Leftrightarrow y = y_1 + y_2 \Leftrightarrow$$

$$log_b(a_1.a_2) = log_b a_1 + log_b a_2.$$

Outras *propriedades* de logaritmos destacamos a seguir, onde consideramos $a,\ b > 0$:

- (a)
$$log_b 1 = 0$$
pois $log_b 1 = log_b(1.1) = log_b 1 + log_b 1 \Rightarrow log_b 1 = 0$.

- (b)
$$log_b(\frac{1}{a}) = -log_b a$$
pois $0 = log_b 1 = log_b(a.\frac{1}{a}) = log_b a + log_b(\frac{1}{a}) \Rightarrow log_b(\frac{1}{a}) = -log_b a$.

  Um bom exercício é tentar verificar as propriedades seguintes a partir das anteriores:

- (c)
$$log_b(\frac{a_1}{a_2}) = log_b a_1 - log_b a_2,\ a_1,\ a_2 > 0$$

- (d)
$$log_b(a^r) = r.log_b a$$
onde r é um número racional arbitrário.

- (e) Se ocorrer $0 < b < 1$, podemos tomar $c = \frac{1}{b}$, que é um número real positivo maior que 1, e teremos
$$log_b a = -log_c a$$
Isto mostra que é desnecessário estudar os logaritmos com base menor que 1.

Atrelado à definição algumas indagações surgem naturalmente: dados $a,\ b > 0$, é sempre possível determinar $log_b a$? E ainda, $log_b a$ é sempre um número real? Dado um número real arbitrário y e fixado uma base b, será que sempre existe um número real a tal que $log_b a = y$. Estas questões todas são respondidas afirmativamente no seguinte importante Teorema

Teorema 1. *Dados o número real $b > 1$ temos que*

$$log_b : R^+ \to R$$

é uma função, denominada ***função logarítmica****, que a cada número real positivo x associa o número real $log_b x$. Além disso esta função é bijetora(injetora e sobrejetora).*

Não iremos nos ater aqui aos detalhes da demonstração deste teorema, mas sugerimos [2] para tal. Na verdade não é necessário supor $b > 1$ no teorema acima, basta $b > 0$ e $b \neq 1$, mas devido a observação (e) acima optamos por esta restrição.

Veremos a seguir que sendo $log_b : R^+ \to R$ uma função logarítmica, então para uma constante real positiva c temos que $c.log_b : R^+ \to R$ também é uma função logarítmica. Além disso veremos que uma vez conhecida uma função logarítmica (ou uma tábua de logaritmo), as outras funções logarítmicas resultarão desta pela multiplicação por uma constante convenientemente escolhida. Expressamos isto no seguinte teorema.

Teorema 2. *Dadas as funções logarítmicas $log_b : R^+ \to R$ e $log_a : R^+ \to R$, a e b números reais positivos e diferentes de 1, é sempre possível determinar uma constante c de forma que $log_b x = c.log_a x$, para todo x real positivo, e ainda, $c = \frac{1}{log_a b}$.*

Para ver isto basta fazer

$$y = \frac{log_a x}{log_a b} \Rightarrow log_a x = y.log_a b \Rightarrow a^{log_a x} = a^{y.log_a b} \Rightarrow x = (a^{log_a b})^y \Rightarrow x = b^y \Rightarrow log_b x = y$$

Nas implicações acima comparando y do início com o y do final obtemos

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$$

ou ainda,

$$log_b x = \frac{1}{log_a b}\, log_a x = c.log_a x.$$

O que demonstra o teorema.

Notamos que se c é uma constante real dada e log_a é uma função logarítmica, então $c.log_a$ é também uma função logarítmica. De fato log_a é sobrejetora, logo existe um número real positivo b tal que $\frac{1}{c} = log_a b$, ou seja $c = \frac{1}{log_a b}$

e, portanto,

$$c.log_a x = \frac{1}{log_a b}.\ log_a x$$

que pelo teorema anterior fornece

$$c.\log_a = log_b$$

que é uma função logarítmica.

Em resumo, ao estudar os logaritmos para uma base $b > 1$ fixada, estaremos cobrindo os estudos para as outras possíveis bases. E assim sendo, veremos que de maneira natural uma certa base teima em aparecer em variados momentos e em estudos de diversas áreas, a base denominada por ***e***. E por isso o logaritmo com essa base é denominado **logaritmo natural**. Alguns autores preferem designá-lo por neperiano fazendo referência a Napier, ainda que o logaritmo por ele definido tivesse valores diferentes deste. Traremos mais esclarecimentos sobre estes entes mais adiante, pois eles aparecerão em nossos estudos sobre a definição geométrica de logaritmo.

Os logaritmos fornecem uma maneira bem sugestiva de se verificar a existência de um número real que não seja racional, também conhecido como número **irracional**. Por exemplo, se quiséssemos calcular $log_{10}7$ nos depararíamos com a seguinte condição

$$log_{10}7 = y \Leftrightarrow 10^y = 7.$$

Se um tal y fosse um número racional $\frac{p}{q}$, então teríamos:

$$10^y = 10^{\frac{p}{q}} = 7 \Leftrightarrow 10^p = 7^q.$$

A última igualdade não ocorre uma vez que 10^p é um número cujo o primeiro algarismo é 1 seguido de p zeros, enquanto que o segundo membro da igualdade $7^q = 7.7.\cdots.7$ não tem esta forma. Isto quer dizer que não podemos supor que $y = log_{10}7$ seja um número racional o que nos leva a concluir que ele é irracional. Então o que significa 10^y sendo y irracional? Podemos calcular de maneira aproximada uma potência de expoente irracional, de fato, sabendo-se que um número irracional, por exemplo $\sqrt{2}$, pode ser aproximado por números racionais, por exemplo $1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\cdots$, temos que os números

$$10^{1,4},\ 10^{1,41},\ 10^{1,414},\ 10^{1,4142},\ \cdots$$

aproximam-se do número $10^{\sqrt{2}}$. Quanto mais próximo o número t estiver de $\sqrt{2}$ mais próximo estará o número 10^t de $10^{\sqrt{2}}$.

3.2 A Definição Geométrica dos Logaritmos

A definição geométrica dos logaritmos depende apenas do conceito de área de uma figura plana, mas em 1647 isto não se mostrava assim tão simples, foi nesta época que finalmente a igreja permitiu que a obra do padre jesuíta Gregory Saint Vicent(1584-1667), já completada muitos anos antes, fosse publicada. Ele foi o primeiro a reconhecer uma estreita relação entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos, embora ele não tenha concretizado esta identificação.

No que segue trabalharemos com o gráfico de uma hipérbole, mais precisamente, trabalharemos somente com o gráfico da hipérbole dada pela equação $y = \frac{1}{x}$. Aliás, estaremos interessado no ramo positivo deste gráfico o qual denotaremos por $\mathbb{H}$. Assim,

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in R \times R \mid x > 0,\ y = \frac{1}{x}\}.$$

No gráfico $\mathbb{H}$ da hipérbole consideraremos uma região do plano limitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $0 < a < b$, pelo eixo x das abscissa, e pela hipérbole. Essa região será denominada ***faixa de hipérbole*** de a até b e será denotada por $\mathbb{H}_a^b$. Assim

$$\mathbb{H}_a^b = \{(x, y) \in R \times R \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}$$

A área da faixa $\mathbb{H}_a^b$ pode ser calculada de maneira aproximada, decompondo o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos justapostos e para cada subintervalo $[c, d]$, $c < d$, da decomposição, considera-se o retângulo de altura igual a $\frac{1}{d}$ ao qual denominaremos *retângulo inscrito* na faixa $\mathbb{H}_a^b$. A soma das áreas desses retângulos fornece um valor aproximado para a área da faixa dada. A aproximação será tanto melhor quanto mais fina for a subdivisão do intervalo $[a, b]$, ou seja, quanto mais próximos uns dos outros estiverem os pontos de subdivisão.

Destacamos a seguir uma propriedade fundamental a respeito das áreas das faixas de hipérbole.

Teorema 3. *Dado um número real positivo k, as faixas $\mathbb{H}_a^b$ e $\mathbb{H}_{ak}^{bk}$ têm a mesma área.*

Para vermos isto, consideremos inicialmente apenas um retângulo inscrito em $\mathbb{H}$, cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo x. Então sua área é

$$(d - c).\frac{1}{d}$$

Considere agora o retângulo, também inscrito em $\boldsymbol{H}$, com base no segmento $[ck, dk]$, sua área é

$$(dk - ck).\frac{1}{dk} = (d - c).\frac{1}{d}$$

e portanto, os dois retângulos possuem mesma área. Tomando o mesmo raciocínio para os vários retângulos inscritos na faixa $\boldsymbol{H}_a^b$, teremos que, para cada retângulo inscrito em $\boldsymbol{H}_a^b$, multiplicando por k cada uma de suas abscissas, obteremos um retângulo inscrito em $\boldsymbol{H}_{ak}^{bk}$ com mesma área. Isto nos leva a concluir que as áreas destas duas faixas sao números que possuem exatamente as mesmas aproximações por retângulos inscritos e, portanto, são iguais.

Destacamos as seguintes observações:

- Podemos restringir nossos estudos às áreas das faixas da forma $\boldsymbol{H}_1^c$. De fato, sabemos do teorema anterior que Área$(\boldsymbol{H}_a^b)$ = Área$(\boldsymbol{H}_{ak}^{bk})$ e se tomarmos $k = 1/a$ teremos

$$\text{Área}(\boldsymbol{H}_a^b) = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^{b/a}).$$

- Se $a < b < c$ então

$$\text{Área}(\boldsymbol{H}_a^b) + \text{Área}(\boldsymbol{H}_b^c) = \text{Área}(\boldsymbol{H}_a^c).$$

  A igualdade anterior continua válida para $a,\ b,\ c$ reais, se adotarmos a seguinte convenção:

$$\text{Área}(\boldsymbol{H}_a^a) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Área}(\boldsymbol{H}_a^b) = -\text{Área}(\boldsymbol{H}_b^a)$$

  onde estamos considerando uma área como negativa, o que não é muito habitual mas, que torna a igualdade

$$\text{Área}(\boldsymbol{H}_a^b) + \text{Área}(\boldsymbol{H}_b^c) = \text{Área}(\boldsymbol{H}_a^c)$$

  verdadeira para todos números reais $a,\ b$ e c, e o leitor é convidado a justificar esta afirmação considerando os seguintes casos possíveis para $a,\ b$ e c: $a < c < b,\quad b < a < c,\quad b < c < a,\quad c < a < b,\quad c < b < a.$

Notamos da definição que:

-

$$ln\ 1 = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^1) = 0.$$

- Se $x > 1$ então
$$ln\ x = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^x) > 0$$

- Se $0 < x < 1$,
$$ln\ x = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^x) < 0$$

Exemplo 4. *Utilizando o cálculo de área podemos obter um valor aproximado para* $ln\ 2$*. De fato, como* $ln\ 2 = \textit{Área}(\boldsymbol{H}_1^2)$*.*

- *Vamos inicialmente subdividir o intervalo* $[1, 2]$ *em dez partes iguais, que listamos na tabela seguinte, juntamente com os respectivos valores de* $1/x$ *quando* x *assume os valores da subdivisão:*

x	1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$
$1/x$	1	$0,909$	$0,833$	$0,769$	$0,714$	$0,666$

x	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$	2
$1/x$	$0,625$	$0,588$	$0,555$	$0,526$	$0,500$

- *Formamos assim dez retângulos cujas bases medem* $0,1$ *cada e, cujas alturas são os valores* $1/x$ *da tabela acima. Calculando a soma das áreas desses retângulos obtemos* $0,6685$ *que é um valor aproximado para* $ln\ 2$*.*

- *Assim,*
$$ln\ 2 \cong 0,6685.$$

- *Pela tábua de logaritmo natural [2] sabemos que com quatro algarismos decimais exatos o valor de* $ln\ 2$ *é* $0,6935$*, assim o leitor é convidado a tomar um refinamento maior do intervalo* $[1, 2]$ *para obter melhor aproximação.*

- Temos assim definido uma função real
$$ln : R^+ \to R$$

  que é bijetora, isto é:
  $\star$ injetora, pois é crescente, isto é $x < y \Rightarrow ln\ x < ln\ y$. De fato, se $x < y$ então
$$ln\ x = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^x) < \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^y) = ln\ y$$

  $\star$ sobrejetora - convidamos o leitor a pensar sobre.

- Utilizando das propriedades de área de uma faixa, acima citadas, o leitor não terá dificuldades em verificar as igualdades abaixo. São elas que possibilitam a redução de cada operação aritmética a uma mais simples. Sejam $x,\ y$ números reais positivos e m é um inteiro positivo:

$$\star \quad ln\ (xy) = ln\ x + ln\ y$$

$$\star \quad ln\ (\frac{1}{y}) = -\ ln\ y$$

Vejamos, $ln\ (\frac{1}{y}) = \text{Área}(\boldsymbol{H}_1^{1/y}) = \text{Área}(\boldsymbol{H}_y^1) = -\text{Área}(\boldsymbol{H}_1^y) = -\ ln\ y$.

$$\star \quad ln\ (\frac{x}{y}) = ln\ x - ln\ y$$

$$\star \quad ln\ (x^m) = m\ .\ ln\ x$$

$$\star \quad ln\ (\sqrt[m]{x}) = \frac{ln\ x}{m}$$

Vejamos agora um exemplo, um tanto simplório a bem da verdade, mas que mostra como eram utilizados estas equações para simplificar determinados cálculos:

Exemplo 5. *Digamos que gostaríamos de calcular o valor de* $\sqrt[7]{9,9}$.

- *Note que*
$$ln\ (\sqrt[7]{9,9}) = \frac{ln\ (9,9)}{7};$$

- *Da tábua de logaritmos naturais obtemos que* $ln\ (9,9) = 2,2925$ *e assim,*
$$ln\ (\sqrt[7]{9,9}) = \frac{2,2925}{7} = 0,3275$$

- *Assim,* $\sqrt[7]{9,9}$ *é o número cujo logaritmo natural é* $0,3275$.

- *Voltando novamente à tábua, encontramos* $ln\ (1,38) = 0,3221$ *e* $ln\ (1,39) = 0,3293$.

- *Podemos concluir então que* $\sqrt[7]{9,9} \cong 1,38$ *e, que esta aproximação por falta, possui dois algarismos decimais exatos.*

3.3 O Número e Base do Logaritmo Natural

A sobrejetividade da função ln nos garante a existência de um número real positivo, que é representado pela letra e, tal que

$$ln\ e = 1$$

ele é portanto a base do logaritmo natural. Assim

$$ln\ x = 1 \Leftrightarrow x = e,$$

o exemplo 4 nos mostra que $ln\ 2 < 1$. Assim $ln\ x = 1$ obriga $x > 2$ isto é, $e > 2$. Pode ser demonstrado que e é um número irracional. Uma aproximação para e, com doze algarismos decimais exatos é:

$$e = 2,718281828459.$$

O número e é tradicionalmente definido a partir de um limite, a saber

$$(\star) \qquad e = lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

que significa que, fazendo sucessivamente $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$, as potências

$$2,\ (1 + \frac{1}{2})^2,\ (1 + \frac{1}{3})^3, (1 + \frac{1}{4})^4,\ \cdots$$

que, fazendo as contas, fornece uma sequência,

$$2, \quad 2,25, \quad 2,37, \quad 2,44, \cdots$$

que aproxima-se cada vez mais de e, podendo a diferença $e - (1 + \frac{1}{n})^n$, ficar tão próxima de zero quanto se queira, bastando, para isso, tomar n suficientemente grande. Só para reforçar esta afirmação, quando $n = 100$ temos que

$$(1 + \frac{1}{100})^{100} = 2,7048$$

quando $n = 1000$ temos

$$(1 + \frac{1}{1000})^{1000} = 2,7169$$

e para $n = 10000$ temos

$$(1 + \frac{1}{10000})^{10000} = 2,7181.$$

Estas idéias não demonstram a igualdade ($\star$) acima mas fornecem uma idéia intuitiva do que venha a ser o limite citado. A demonstração, apesar de simples, não será exibida aqui mas, sugiro [2] a quem possa interessar. Também é conhecido que

$$lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a,\ x \neq 0.$$

Gostaríamos de esclarecer que logaritmos com outras bases podem ter um tratamento similar, através do estudo de uma faixa de hipérbole, utilizando-se hipérboles com equação $y = k/x$, ao invés de $y = 1/x$. Para cada valor escolhido para k, podemos obter um logaritmo. A escolha mais simples para k é de fato $k = 1$, e por isso os logaritmos obtidos com a faixa relativa a hipérbole $y = 1/x$ é chamado logaritmo natural. Não trataremos deste estudo aqui, devido a escassez do tempo mas, no minicurso, poderemos apresentar melhor estas idéias de acordo com o interesse e tempo que a turma disponha. Aos interessados sugiro que vejam [2].

4 Aplicações

Os logaritmos naturais e a função exponencial e^x surgem naturalmente em certas questões onde o aumento ou a diminuição de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor da grandeza num dado instante. As aplicações aqui discutidas e outras podem ser encontradas no texto [2], nos sites [4].

4.1 Desintegração Radioativa

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa. Assim, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto è feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente. Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α.

Consideremos um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processasse instantaneamente, no fim de cada segundo, sendo M_0 a massa no tempo $t = 0$, decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haveria uma perda de αM_0 unidades de massa, restando apenas a massa

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1-\alpha).$$

Decorridos 2 segundos, a massa restante seria

$$M_2 = M_1(1-\alpha) = M_0(1-\alpha)^2.$$

Em geral, passados s segundos, restaria a massa

$$M_s = M_0(1-\alpha)^s.$$

Mas as coisas não se passam assim: a desintegração se processa continuamente. Procurando uma aproximação melhor para o fenômeno, fixemos um inteiro $n > 0$ e imaginemos que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo a massa do corpo a reduziria a

$$M_0 - (\frac{\alpha}{n})M_0 = M_0(1-\frac{\alpha}{n}).$$

Decorrido 1 segundo, teriam ocorrido n desintegrações instantâneas e, efetuadas as n reduções, restaria do corpo a massa

$$M_0(1-\frac{\alpha}{n})^n$$

. Dividindo o intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partes iguais, chegaremos à conclusão de que, ao final de 1 segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$lim_{n\to\infty} M_0(1-\frac{\alpha}{n})^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Se quisermos calcular a massa ao fim de t segundos, deveremos dividir o intervalo $[0,t]$ em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda de massa será

$$M_0 \cdot \frac{\alpha t}{n}.$$

Repetindo o argumento acima chegaremos a expressão

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

que fornece a massa do corpo depois de decorridos t segundos.

É claro que, em vez de segundos, poderíamos ter adotado outra unidade de tempo. Mudando a unidade de tempo. Mudando a unidade de tempo, a constante α deve ser alterada proporcionalmente.

Na prática, a constante αfica determinada a partir de um número básico, chamado a meia-vida da substância.

A meia-vida da substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância.

Por exemplo, o polônio 218 tem meia-vida igual a 2 minutos e 45 segundos, enquanto o polônio 214 tem meia-vida de $1,64 \times 10^{-4}$ segundos.

Os isótopos do rádio têm meia-vida conforme indicamos abaixo:

$\star$ rádio 226: meia-vida 1620 anos

$\star$ rádio 228: meia-vida $6,7$ anos

$\star$ rádio 223: meia-vida $11,68$ dias

$\star$ rádio 224: meia-vida $3,64$ dias.

Os diversos isótopos de urânio têm uma meia-vida da ordem de 10^9 anos.

Se sabemos que um certo elemento radioativo tem meia-vida igual a t_0 unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0. Assim

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}.$$

Tomando logaritmos, temos

$$ln\ (\frac{1}{2}) = -\alpha t_0$$

ou seja,

$$-ln\ 2 = -\alpha t_0,$$

donde

$$\alpha = \frac{ln\ 2}{t_0}.$$

Isto nos mostra como calcular a taxa de desintegração α quando se conhece a meia-vida t_0. Reciprocamente, tem-se $t_0 = ln\ 2/\alpha$, o que permite determinar a meia-vida t_0 em função da taxa α. Trabalharemos mais sobre isto no minicurso.

4.2 O método do Carbono 14

O carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. (O carbono 14 é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais.) Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado par determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira.

Para isto, precisamos saber que a meia-vida do C^{14} é de 5570 anos. Como vimos acima, segue-se daí que a constante de desintegração do C^{14} é

$$\alpha = \frac{ln\ 2}{5570} = \frac{0,6931}{5570} = 0,0001244.$$

Exemplo 6. *Vejamos como esse conhecimento foi usado para dirimir uma controvérsia. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger(instrumento que mede a radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é $0,894$ vezes a massa M_0 de C^{14} que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos.*

Sabemos que

$$M = M_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

donde $M/M_0 = e^{-\alpha t}$. Isto significa que $0,894 = e^{-0,0001244t}$. Daí tiramos:

$$t = -\frac{ln(0,894)}{0,0001244} = \frac{0,1121}{00001244} = 901 \ anos.$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda, ela deveria ter mais de 1500 anos.

4.3 A intensidade dos sons

O que ouvimos e definimos como som são apenas ondas (sonoras) que se formam devido a pequenas vibrações de partículas do meio. Assim, quando estalamos os dedos, por exemplo, ocorre uma pequena compressão de moléculas de ar em volta de nossos dedos e se propagam pelo ar. Dependendo da distância que alguém estiver desses dedos o ouvido dele pode ser alcançado por estas ondas (sonoras). Nosso ouvido possui um mecanismo capaz de converter estas ondas em estímulos nervosos que são enviados ao cérebro nos fornecendo a sensação auditiva do som.

Ao som que ouvimos o classificamos como alto ou baixo, forte ou fraco. Mas o que significa isto? Significa que podemos medir a intensidade do som que ouvimos e ela é medida em watt por metro quadrado - w/m^2. A menor intensidade de som que podemos ouvir possui intensidade

$$I_0 = 10^{-12} W/m^2.$$

A intensidade do som tem uma vasta variação desde muito pequenos até demasiadamente grandes. Em virtude dessa grande variação é utilizado a noção de logaritmo decimal para calcularmos o que é denominado *nível sonoro*, que é uma relação entre as intensidades sonoras. O nível sonoro NS é dado por uma relação entre a intensidade do som considerado I e a intensidade I_0 limiar da audibilidade e que podemos especificar por

$$NS = 10 \cdot log_{10}(\frac{I}{I_0})\text{dB}.$$

Algumas doenças como neurose, fadiga, surdez, dentre outras, podem ser causadas por exposições a níveis sonoros superiores a 80dB por um tempo excessivo. A conhecida tabela abaixo fornece o tempo máximo que uma pessoa pode se expor a ruídos contínuos e intermitentes sem que adquira lesões irreversíveis.

Nível Sonoro(dB)	Tempo máximo de exposição (h)
85	8
90	4
95	2
100	1

Para comparação, observe alguns níveis sonoros do nosso dia-a-dia.

Ruido	Nível Sonoro(dB)	intensidade
Conversa a meia voz	40	104
Britadeira	100	1010
Danceteria	120	1012
Avião a jato aterrisando	140	1014

Para níveis superiores a $120dB$, a sensação auditiva é dolorosa. Vamos, através de um exemplo, demonstrar o desenvolvimento da expressão que permite calcular o nível sonoro de um ambiente.

Note, por exemplo, que o nível sonoro de uma intensidade de som igual a $10^{-5}W/m^2$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$NS = 10 \cdot log_{10}(\frac{I}{I_0}) = 10 \cdot log_{10}(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}) = 10 \cdot log_{10} 10^{(-5-(-12))} = 10 \cdot 7 = 70dB.$$

Assim, o nível sonoro de uma intensidade de som igual a $10^{-2}W/m^2$ equivale a 70 dB.

5 Conclusões

Esperamos que este minicurso traga aos participantes um momento de reflexão sobre o tema logaritmo e que eles possam levar os questionamentos debatidos às demais esferas de seus estudos e trabalhos.

Referências

[1] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[2] LIMA, E. L., *Logaritmos*, coleção do professor de matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996, 2ª edição.

[3] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar - Logaritmos*, Vol. 2, 9ª edição.

[4] Medindo a Intensidade dos Sons. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm>. Acesso em: 27 de fev. 2010.