

Teoria de Grupos e suas Aplicações na Física



Yuri Alves de Oliveira
Orientador: Igor dos Santos Lima

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

e-mail: yurialves.y@gmail.com (Acadêmico do Curso de Física CAC)



Introdução

A Teoria de Grupos desenvolveu-se pela contribuição, sobretudo, do matemático francês Évariste Galois (1811 - 1832) que apresentou o conceito de grupo solúvel ao estudar o problema de resolução de equações algébricas por meio de radicais, onde ele associou a cada equação um grupo e demonstrou que as equações são resolúveis por meio de radicais se e somente se o grupo é solúvel [1]. Na Física, a Teoria de Grupos apareceu em suas primeiras aplicações no livro *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Teoria de Grupos e Mecânica Quântica), publicado em 1928, pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955). Neste livro é apresentada a relação entre a Teoria de Grupos e as leis gerais da Mecânica Quântica, onde cada um dos índices de um número quântico não-principal caracterizam as representações de grupo [2]. Após esta notável publicação diversos matemáticos, físicos e químicos passaram a estudar Teoria de Grupos e diversas aplicações foram encontradas em vários campos de estudos, como por exemplo em Isometria molecular, Mecânica Clássica, Relatividade, Física de Partículas Elementares, dentre outras. Este trabalho foi baseado nas vídeo-aulas de João A. C. Barata ministradas no Instituto de Física da USP, em 2008 [3]. Nosso objetivo é definir brevemente o que vem a ser um grupo e subgrupo e posteriormente apresentar o Grupo de Rotações no espaço bidimensional e o Grupo de Lorentz em uma dimensão, que possuem fundamental importância em geometria e Física.

Grupo e subgrupo

Um grupo é definido como sendo um conjunto G não-vazio dotado de uma operação $(*)$ entre seus elementos, sendo denotado normalmente por $(G, *)$, e que satisfaça as seguintes propriedades:

1) Associatividade:

$$\forall a, b, c \in G \mid a * (b * c) = (a * b) * c.$$

2) Existência do Elemento Neutro e :

$$\forall a \in G \mid a * e = e * a = a.$$

3) Existência do Elemento Inverso:

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \mid a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Um subgrupo H de um grupo $(G, *)$ é definido como sendo um subconjunto H de G , *fechado para a operação* do grupo, isto é, dois elementos do H operados geram um terceiro elemento que também pertence H , e *fechado para a inversão*, isto é, todo elemento de H , possui inverso em H . De forma que o subgrupo H de $(G, *)$ também é um grupo.

Grupo $O(2)$

O Grupo $O(2)$ é o grupo das matrizes 2×2 ortogonais definido como:

$$O(2) = \left\{ R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid R^{-1} = R^T \right\}.$$

Um subgrupo de $O(2)$ denominado de grupo especial de $O(2)$ por $SO(2) = \{ R \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(R) = a^2 + b^2 = 1, R^{-1} = R^T \}$. Este grupo também é denominado de Grupo de Rotações no espaço bidimensional devido à sua aplicação física.

Devido a simetria ($a^2 + b^2 = 1$) podemos parametrizar, sem perda de generalidade, estas matrizes na forma $a = \cos(\theta)$ e $b = \sin(\theta)$, afinal $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Assim,

$$SO(2) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in (0, 2\pi) \right\}.$$

Estas matrizes do grupo $SO(2)$ rotacionam um vetor de $\mathbb{R}^2$. Isto é, dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$R\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: A ação das matrizes de $SO(2)$ em um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ para um ângulo de $\theta = \pi$ é dado por:

$$R\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\vec{x}.$$

Uma rotação de $\theta = \pi$ em um vetor no espaço bidimensional terá o efeito de inverter o seu sentido mantendo seu módulo e direção.

Grupo $O(1,1)$

O grupo $O(1,1)$ é o grupo das matrizes 2×2 ortogonais que preservam a sua Forma Bilinear, isto é, que são lineares em relação a cada umas variáveis.

$$O(1,1) = \left\{ L \in M_2(\mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \langle Lx, \eta Ly \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}, \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

As matrizes dessa forma satisfazem também relação $L^{-1} = \eta L^T \eta$, tomando o determinante em ambos os lados obtemos:

$$\det(L^{-1}) = \det(\eta) \det(L^T) \det(\eta) \\ \frac{1}{\det(L)} = \det(L^T) = \det(L) \Rightarrow \det(L) = \pm 1.$$

Desta forma o grupo $O(1,1)$ pode ser dividido em dois conjuntos: um no qual o determinante das matrizes é igual a 1 e outro no qual é -1 . O conjunto cujo as matrizes possuem determinante igual a 1 forma por si só um grupo, uma vez que satisfaz as propriedades de grupo do $O(1,1)$ e o Elemento Neutro, a identidade, pertence exclusivamente a este conjunto. Este subgrupo de $O(1,1)$ é denominado Grupo de Lorentz em uma dimensão ou $SO(1,1)$. Dada uma matriz $L \in O(1,1)$ temos que:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

As matrizes do grupo $O(1,1)$, como vimos, devem satisfazer a relação $L^{-1} = \eta L^T \eta$, portanto:

$$L^{-1} = \eta L^T \eta = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

De forma que o subgrupo $SO(1,1)$ é definido como sendo:

$$SO(1,1) = \left\{ L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid \det(L) = a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

Este subgrupo pode ser reescrito utilizando que $a = \pm\sqrt{1+b^2}$, assim temos que:

$$SO(1,1) = \left\{ L = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

Denominamos estes conjuntos respectivamente por $L_+^\uparrow$ e $L_+^\downarrow$. O sinal positivo na notação é devido ao fato destas matrizes possuírem determinante igual a 1 e a flecha é devido ao sinal dos termos da diagonal principal da matriz, se eles são positivos então a flecha é para cima e se negativos, a flecha é para baixo. O $L_+^\uparrow$ por si só forma um subgrupo de $SO(1,1)$, já que obedece as propriedades do grupo, e diferente do $L_+^\downarrow$, possui o Elemento Neutro do grupo. Devido a simetria hiperbólica ($a^2 - b^2 = 1$) parametrizamos o subgrupo $L_+^\uparrow$ na forma $a = \cosh(z)$ e $b = \sinh(z)$:

$$L_+^\uparrow = \left\{ L(z) = \begin{pmatrix} \cosh(z) & \sinh(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Introduzimos uma nova parametrização:

$$\tanh(z) = v/c$$

onde v é um parâmetro qualquer e c é uma constante. Utilizando a relação $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ obtemos que:

$$\cosh(z) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \sinh(z) = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Podemos verificar o que as matrizes $L(z)$ fazem quando agem em um vetor do espaço bidimensional. Dado um vetor (ct, x) , que poderíamos chamar de (x_1, x_2) , mas que por questões que logo serão entendidas denotamos desta forma, temos que

$$L(z) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{vx/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ -\frac{vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix}.$$

E, portanto

$$t^* = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x^* = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Fisicamente a constante c representa a velocidade da luz no vácuo e o parâmetro v é reconhecido como sendo a velocidade, de forma que o vetor (ct, x) possui a dimensão de comprimento em ambas as componentes. Estas são as transformações de Lorentz de sistemas não inerciais que são parametrizados por um vetor $\vec{v}$, este parâmetro pode ser interpretado como a velocidade relativa entre dois sistemas de referência que se movem um em relação ao outro com velocidade $\vec{v}$. *O mais surpreendente disso tudo é que obtemos as transformações de Lorentz da Relatividade sem utilizar nenhum argumento ou conceito físico, partindo apenas do fato dos elementos do Grupo $O(1,1)$ preservarem sua Forma Bilinear e de algumas parametrizações.* Podemos agora introduzir uma outra interpretação para a utilização do simbolo de flecha para cima e para baixo para os grupos $L_+^\uparrow$ e $L_+^\downarrow$, este simbolo tem a função de indicar que quando a flecha é para cima a transformação de Lorentz preserva a orientação temporal dos sistemas, enquanto que quando ela é para baixo os sistemas discordam quanto a orientação temporal. Analogamente, o sinal positivo indica que estas transformações preservam a orientação espacial; há ainda os conjuntos das matrizes de $O(1,1)$ que possuem determinante igual a -1 e que são denominados $L_-^\uparrow$ e $L_-^\downarrow$, estas matrizes levam à transformações nos quais os sistemas discordam quanto a orientação espacial.

Referências

- [1] C. P. Milies. *Grupos Nilpotentes: Uma Introdução*, Matemática Universitária, n. 34. pp. 55-100. 2003.
- [2] Bassalo J. M. F; Cattani M. S. D. *Teoria de Grupos para Físicos*, Instituto de Física da USP. 2011.
- [3] J. C. A. Barata, *Introdução à Teoria de Grupos e suas Aplicações à Física*, Vídeo-Aulas do Instituto de Física da USP. 2008.