GAP e a Conjectura de Ashrafi

Pedro Henrique Cavalcanti da Silva

Orientador: Igor dos Santos Lima

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

e-mail: pedriw@gmail.com

Introdução

Este pôster aborda o estudo executado no projeto de pesquisa "Groups with a finite number of centralizers", e no Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC) do qual participo. Este PIBIC visa estudar a classificação de grupos com um número finito de centralizadores (de elementos) e contribuir com o projeto de pesquisa supracitado que se encontra em andamento. O projeto consiste em trabalhar sobre a Conjectura de Ashrafi. Denote por $Cent(G) = \{C_G(x) | x \in G\}$. O interesse deste projeto é relacionar grupos diferentes a partir da quantidade de centralizadores, e o que a quantidade desses centralizadores pode nos dizer.

Denote por C_n a classe de todos os grupos G com exatamente n centralizadores (de elementos), isto é, $n = |\{C_G(x) | x \in G\}|$. Então G é dito um C_n -grupo se G pertence a classe C_n.

Conjectura. (Ashrafi, [A, Conjectura 2.4]) Seja G um C_n-grupo finito. Se $2|G| = 3n$, então $G \cong S_3, S_3 \times S_3$ ou D_{10}.

Preliminares

Definição. Seja um conjunto $G \neq \emptyset$ e $*$ uma operação binária sobre G. Dizemos, denotando por $(G, *)$, que G é **GRUPO** se, $\forall a, b, c \in G$,

- $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- $\exists\ e_G \in$G $\mid a * e_G = e_G * a = a$;
- $\exists\ a^{-1} \mid a * a^{-1} = a^{-1} * a = e_G$.

Definição. Seja $\emptyset \neq H \subseteq G$, sendo G um grupo. Diz-se que H é subgrupo, denotado por $H \leq G$, se:

- $h_1 * h_2 \in H,\ \forall h_1, h_2 \in H$;
- $\exists h^{-1} \in H,\ \forall h \in H$.

Definição. Seja G um grupo. O centro de G é definido por $Z(G) = \{x \in G | x * g = g * x,\ \forall g \in G\}$. Quando $Z(G) = G$, o grupo é dito abeliano.

Definição. Sejam G um grupo e $x \in G$. O centralizador de x em G é definido por $C_G(x) = \{g \in G | x * g = g * x\}$.

Definição. Sejam um grupo G, $H \leq G$ e $g \in G$. Os subconjuntos de G, $gH = \{gh \mid h \in H\}$ e $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ são chamados, respectivamente, de classe lateral à esquerda e à direita de H em G (em relação à g).

Definição. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. H é dito normal em G, se para todo $h \in H$ e todo $g \in G$, temos $g^{-1} * h * g \in H$. Denotamos por $H \trianglelefteq G$.

Sejam $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$ dois grupos. Um **homomorfismo** $f : G_1 \to G_2$ é uma função tal que $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ para todos $a, b \in G_1$.

Definição. Um **isomorfismo** $f : G_1 \to G_2$ é um homomorfismo bijetor.

Teorema. (Lagrange) Sejam G um grupo e $H \leq G$. Então $|H|$ divide $|G|$.

O GAP(Groups, Algorithms and Programming

O GAP contém em um núcleo e um grupo de pacotes. As quatro partes consiste em:

- Um kernel, em C;
- Uma vasta biblioteca de funções a e algoritmos associados à álgebra;
- Uma biblioteca de teoria de grupos, incluindo pequenos grupos de ordem 2000, com exceção a ordem 1024;
- A documentação, que consiste em manuais e links para auxílio.

O GAP possui funções como:

- AllSmallGroups(n) - Retorna, da biblioteca, grupos com a ordem n;
- SmallGroup(n,i) - Retorna, da biblioteca, o grupo com a ordem n, e índice (da biblioteca i);
- Elements, Order - Mostra os elementos do grupo e a ordem do grupo, respectivamente;
- IsAbelian - Retorna false para grupos não abelianos e true para abelianos;
- IsSolvable - Retorna false para grupos não solúveis e true para solúveis;
- Centralizer - Mostra ou define o centralizador;
- List - Agrupa dados recebidos com resposta em lista;
- Collected - Coleciona dados de uma dada lista.

Aplicação do GAP na Conjectura de Ashrafi

O Algoritmo utilizado na conjectura de Ashrafi segue:

$q := 37;;$

$k2 := AllSmallGroups(q, IsAbelian, false);;$

$r := Collected(List(k2, y- > 3 * Size(Collected(List(y, x- > Centralizer(y, x)))) >= 2 * Size(y))); t := Size(r);;$

$while\ t = 0\ or\ t = 1\ and\ r[1][1] = false$

$do\ Print(q, "", "/n"); q := q + 1;$

$k2 := AllSmallGroups(q, IsAbelian, false);;$

$r := Collected(List(k2, y- > 3 * Size(Collected(List(y, x- > Centralizer(y, x)))) >= 2 * Size(y))); t := Size(r);; od;$

Este algoritmo retorna a ordem dos grupos que satisfazem a conjectura apresentada na introdução.

Resultados e Resultados Esperados

O principal objetivo do plano de trabalho é, dentre outros, verificar a validade da conjectura, além do estudo de algumas propriedades da teoria de grupos. Além da participação de eventos cientifíficos área. Foram apresentados seminários e um pôster no evento I Workshop de Álgebra da UFG-CAC, nos quais os temas abordados estavam no plano de trabalho. O estudo de teoria de grupos e a verificação de algoritmos é contínua no projeto. Está programado para o mês de junho a apresentação de um minicurso sobre o GAP. Assim, espera-se concluir o projeto dentro do calendário proposto, e utilizar este estudo como tema para o Trabalho Final de Curso.

Referências

[1] A. Garcia e Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, IMPA, 2nd ed., 2003.

[2] N.R.Rocco, *Uma Breve Introdução ao Sistema GAP (Groups, Algorithms and Programming)*,Apostila, 1997

[3] A. R. Ashrafi, *Counting the centralizers of some finite groups.* Korean J. Comput. Appl. Math. 7 (2000), no. 1, 115-124.

Este projeto foi financiado pela FAPEG através do edital 05/2013 para realização de eventos.
O apresentador deste pôster é bolsista CNPq através do Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC), vigente em 2013-2014.