Equivalências para um Operador Linear Diagonalizável

Ana Nívia Pantoja

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

e-mail: ananivia.pantoja@gmail.com (Engenharia Civil)

Introdução

Neste pôster, demonstra-se, utilizando quatro equivalências matemáticas, que um operador linear é diagonalizável. Outro objetivo do pôster é dar uma noção sobre alguns conceitos básicos da Álgebra Linear, tais como: vetores no plano, espaço vetorial, subespaço vetorial, base vetorial, transformação linear, autovalores e autovetores, polinômio característico, soma direta, dimensão geométrica e diagonalização de operadores.

Preliminares

Vetores no plano
Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (x, y).

Exemplo 1:
O vetor nulo é dado por $0 = (0, 0)$.

Espaço Vetorial:
Para efetuar a definição de espaço vetorial apropria-se da definição de corpo. Em síntese, um corpo K é um conjunto em que são realizadas as operações de adição e multiplicação de elementos chamados escalares, no qual a cada par de elementos que fazem tais operações associa-se um outro elemento de K. Além disso, nove condições devem ser satisfeitas, tais: comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro, para adição e multiplicação, existência de elemento simétrico para a adição e existência de elemento inverso para a multiplicação. Aqui nosso corpo será os reais $\mathbb{R}$. Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre um corpo, se e somente se, forem satisfeitas oito operações para adição e multiplicação.

Exemplo 2:
O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y\mathbb{R}\}$ é espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real definidas por: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.

Definição: A um subconjunto $S \neq \emptyset$ contido em V, formado por elementos de V que satisfazem as operações de adição e multiplicação por escalares, dá-se o nome de subespaço vetorial. Se todos os elementos de S são necessários para geração do espaço vetorial V, diz-se então que o subespaço vetorial S é base B geradora de V. Além de gerar V, o subespaço vetorial deve ser linearmente independente para ser uma Base Vetorial, assim, temos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ é uma base de V se B é L.I., ou seja, há uma combinação linear do tipo $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$ que implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Exemplo 3:
Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e $S = \{(x, y, z, 0); x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Não é difícil mostrar que S é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 4:
$B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Transformações Lineares
Sejam V e U espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \longrightarrow U$ é chamada transformação linear se:

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, com $u, v \in V$.

(ii) $T(k \cdot u) = k \cdot T(u)$, com $k \in \mathbb{R}$ e $u \in V$. Uma transformação linear do tipo $T : V \longrightarrow V$ é dita operador linear (sobre V).

Exemplo 5:
$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \longmapsto T(x) = 3x$ é uma transformação linear.

Polinômio Característico Considere $T(v) = Av = \lambda v$, onde A é uma matriz. Pode-se escrever $Av - \lambda v = 0$ e ao introduzir a matriz identidade I em λv, segue que $det(A - \lambda I) = 0$ (se v é diferente de 0). Este determinante denomina-se polinômio característico $C_T(\lambda)$ e as suas raízes são ditas autovalores de T.

Exemplo 6:
Dada $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-3x - 5y, 2y)$, determinar o polinômio característico de T. Como $det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$ e $C_T(\lambda) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda)$.

Autovalores e Autovetores
Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que um escalar λ é um autovalor de T, se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, dizemos que v é um autovetor de T, associado ao autovalor λ.

Exemplo 7:
Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $(x, y) \longmapsto T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$. Verifique se $v = (5, 2)$ é um autovetor de T.
$\Rightarrow T(v) = T(5, 2) = (4(5) + 5(2), 2(5) + 2) = T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2) = 6v$ Logo, $v = (5, 2)$ é um autovetor de T associado a $\lambda = 6$ que é autovalor.

Diagonalização de Operadores

Dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$, quer-se encontrar uma base B de V na qual a matriz do operador nessa base $[T]_B$ seja uma matriz diagonal. Tem-se então duas propriedades:

(i) Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T : V \longrightarrow V$ são linearmente independentes;

(ii) Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear, $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V.

Exemplo 8:
Do exemplo de polinômio característico tem-se: $\lambda_1 = -3$ e $v_1 = (1, 0), \lambda_2 = 2$ e $v_2 = (1, -1)$. Assim, tendo uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por v_1 e v_2, pode-se determinar a matriz do operador na base $\{v_1, v_2\}$, que seria a matriz diagonal 2×2 com λ_1 e λ_2 na diagonal principal.

Soma Direta de dois Subespaços
Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V, ao efetuar a soma dos dois subespaços, se a interseção for formada apenas pelo conjunto $\{0\}$, a soma é dita soma direta. A notação utilizada para esse tipo de soma é $U \oplus W$.

Dimensão Algébrica
Denomina-se dimensão algébrica de um autovalor, dado seu polinômio característico, a quantidade de vezes que o autovalor aparece como raiz do polinômio característico.

Dimensão Geométrica
Denomina-se dimensão geométrica, de um autovalor λ, a dimensão do subespaço vetorial V_λ gerado pelos autovetores associados a λ.

Equivalências

Teorema: Seja T um operador linear sobre V. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de T, onde $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$. São equivalentes:

(i) T é diagonalizável;

(ii) O polinômio característico de T é da forma $C_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{d_r}$, no qual $d_i = g(\lambda_i)$, para $1 \leq i \leq r$, é a dimensão geométrica de λ_i;

(iii) A dimensão do espaço vetorial V é dada pela soma algébrica da dimensão geométrica de λ_i, para $1 \leq i \leq r$;

(iv) O espaço vetorial V pode ser escrito como uma soma direta dos espaços vetoriais de V_{λ_i} a V_{λ_r}.

Para demonstração, aplica-se uma equivalência à outra até que se feche o ciclo. Pode-se supor inicialmente $T \neq 0$, assim $\lambda_i \neq 0$ para qualquer i e V como um espaço vetorial de dimensão finita. Logo, tem-se:

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Por hipótese, existirá uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ e formada por autovetores de T. Existem $d_1, \ldots, d_r$ em $\mathbb{N}$ tais que a matriz de $[T]_B$ é diagonal e possui uma quantidade d_1 de $\lambda_1, \ldots$, d_r de λ_r na diagonal principal. Segue por definição que $C_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{d_r}$.
Agora, ao fazer a subtração da matriz $[T]_B$ por $\lambda_i I$, obteremos uma quantidade d_i de linhas nulas. Como a dimensão geométrica de λ_i é representado pelo número de linhas nulas da matriz $[T]_B - \lambda_i I$, conclui-se que $g(\lambda_i) = d_i$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: A dimensão de V é dada pelo grau do polinômio característico. Logo, a dimensão de V é dada pela soma algébrica dos $d_i = g(\lambda_i)$ de $i = 1$ até r.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Inicialmente, supõe-se que a dimensão de V é dada pelo somatório das dimensões dos subespaços vetoriais gerados por cada autovetor, $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_r}$. Defina um outro espaço vetorial $U_1 = V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_r}$, efetuando-se a soma das duas dimensões assinaladas acima, temos que $\dim(V_{\lambda_1} + U_1) = \dim V_{\lambda_1} + \dim U_1 - \dim(V_{\lambda_1} \cap U_1)$.
Suponha que exista $v_1 \in V_{\lambda_1} \cap U_1$ e $v_1 \neq 0$. Observa-se que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, sendo $v_1 = v_2 + \ldots + v_r$. Como $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para $2 \leq i \leq r$, podemos escrever $T(v_1) = \sum_{i=2}^{r} T(v_i)$. Então, $\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r = 0$, logo cada $\lambda_i = 0$, pelo item (i) da parte de Diagonalização de Operadores, absurdo pois inicialmente já foi estabelecido $\lambda_i \neq 0$. Assim, $v_1 = 0$ e por consequência $V_{\lambda_1} \cap U_1 = \{0\}$.
Seja $S = \dim(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r})$. Como provado acima que $V_{\lambda_1} \cap U_1 = \{0\}$, podemos então escrever $S = \dim V_{\lambda_1} + \dim U_1$. Se $\dim U_1 = \dim V_{\lambda_2} + \dim U_2$, no qual $U_2 = V_{\lambda_3} + \ldots + V_{\lambda_r}$, então $S = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dim U_2$. Procedendo indutivamente, $\dim U_2 = \dim V_{\lambda_3} + \ldots + \dim V_{\lambda_r}$. Conclui-se que $S = \sum_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = \dim V \Rightarrow \dim(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r}) = \dim V \Rightarrow V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r} = V$. Como $V_{\lambda_i} \cap U_i = \{0\}$ para todo i, segue que a soma é direta.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Tomando-se uma base $B_i =$ base de V_{λ_i} para i variando de 1 a r. Por hipótese, como a união $\cup B_i$ é base de V e é constituída por autovalores de T, conclui-se que T é diagonalizável por definição. E isto encerra a demonstração.

Referências

[1] BOLDRINI, José Luiz e outros. *Álgebra Linear.* 3a ed., Harbra, São Paulo, 1986.

[2] STEINBRUCH, A,. WINTERLE, P. *Álgebra Linear.* 2a ed., São Paulo, Editora Makron Books, 1987.

[3] NETO, Cleto Brasileiro Miranda. *Apostila de Álgebra Linear (Notas do Curso de Verão - Unicamp).* 2011.

Este projeto foi financiado pela FAPEG através do edital 05/2013 para realização de eventos.