Super Espaços Vetoriais

Lucas Henrique Calixto
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

email: lhc.mat@gmail.com

Introdução

Super espaços vetoriais surgem naturalmente na teoria de supersimetria, no campo da física de partículas. Esse campo estuda as iterações entre particulas elementares, bósons e férmions. O nome ‘super espaço’ vem de supersimetria, e sua definição é motivada pela relação entre estes bósons e férmions.

Espaços Vetoriais

Vamos denotar por $\mathbb{F}$ os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1: Um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um conjunto munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, satisfazendo os seguinte axiomas:

1) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2) Comutatividade: $u + v = v + u$;
3) Elemento neutro da soma: Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$;
4) Elemento inverso da soma: Existe um elemento $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;
5) Compatibilidade da soma com o produto por escalar: Se $v \in V$ e $a, b \in \mathbb{F}$, então $a.(b.v) = (ab).v$;
6) Elemento neutro do produto escalar: Se $1 \in \mathbb{F}$ é o elemento identidade, então $1.v = v$;
7) Distributividade do produto escalar com relação a soma de V: $a.(u + v) = a.u + a.v$;
8) Distributividade do produto com relação a soma de $\mathbb{F}$: $(a + b).v = a.v + b.v$;

para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{F}$.

Exemplo 2: Todo corpo $\mathbb{F}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre si mesmo. Por exemplo, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, cuja soma e a multiplicação por escalar são a soma e a multiplicação usual de números reais.

Exemplo 3: Seja $M(m, n; \mathbb{F})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{F}$. Considere as seguintes operações $(+, \cdot)$

$$\begin{aligned}(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij})\\ f.(a_{ij}) &= (fa_{ij}),\end{aligned}$$

para quaisquer matrizes (a_{ij}), (b_{ij}) e escalar $f \in \mathbb{F}$. O conjunto $M(n, m; \mathbb{F})$ munido das operações acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Definição 4: Se V é um espaço vetorial e $W \subseteq V$ é um subconjunto que também é um espaço vetorial com a mesma soma e multiplicação por escalar de V, dizemos que W é um subespaço de V.

Exemplo 5: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$. Considere o conjunto $U \oplus V = \{(u, v) \,|\, u \in U,\, v \in V\}$ munido das operações $(+, \cdot)$ definidas por

$$\begin{aligned}(u_1, v_1) + (u_2, v_2) &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2)\\ c.(u_1, v_2) &= (cu_1, cv_2),\end{aligned}$$

para quaisquer (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in U \oplus V$, $c \in \mathbb{F}$. Tal conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, chamado de soma direta de U com V. Note que tanto U quanto V são subespaços vetoriais de $U \oplus V$.

Super Espaços

Considere o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ munido da seguinte soma

$$\begin{aligned}\bar{0} + \bar{0} &= \bar{0} & \bar{0} + \bar{1} &= \bar{1}\\ \bar{1} + \bar{0} &= \bar{1} & \bar{1} + \bar{1} &= \bar{0},\end{aligned}$$

e da seguinte multiplicação

$$\begin{aligned}\bar{0} \cdot \bar{0} &= \bar{0} & \bar{0} \cdot \bar{1} &= \bar{0}\\ \bar{1} \cdot \bar{0} &= \bar{0} & \bar{1} \cdot \bar{1} &= \bar{1}.\end{aligned}$$

Com essas operações, $\mathbb{Z}_2$ é um corpo. Um super espaço vetorial é um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$–graduado.

A escolha de $\mathbb{Z}_2$ na definição de super espaço é motivada pela forma como as partículas elementares, os bósons (spins inteiros) e férmions (spins meio-inteiros), iteragem entre si.

Definição 6: Um super espaço vetorial é um espaço vetorial V para o qual existem subespaços $V_{\bar{0}}$ e $V_{\bar{1}}$ tais que $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$.

Observação 7: Todo espaço vetorial V é um super espaço. De fato, podemos escrever $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, com $V_{\bar{0}} = V$ e $V_{\bar{1}} = \{0\}$.

Exemplo 8: O conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\\ c.(a_1 + b_1 i) &= ca_1 + cb_1 i,\end{aligned}$$

para quaisquer $(a_1 + b_1 i)$, $(a_2 + b_2 i) \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$. Observe que, tomando $\mathbb{C}_{\bar{0}} = \{a + 0i : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{C}_{\bar{1}} = \{0 + bi : b \in \mathbb{R}\}$, temos que $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\bar{0}} \oplus \mathbb{C}_{\bar{1}}$ e portanto $\mathbb{C}$ é um super espaço vetorial.

Exemplo 9: Considere o conjunto $M(m|n)$ formado por matrizes da forma

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \right\},$$

onde $A \in M(m; \mathbb{F})$, $B \in M(m, n; \mathbb{F})$, $C \in M(n, m; \mathbb{F})$ e $D \in M(n; \mathbb{F})$. Munido da soma e do produto por escalar como no Exemplo 3, $M(m|n)$ se torna um espaço vetorial.

Tomando $M(m|n)_{\bar{0}}$ como o subespaço formado pelas matrizes tais que $B = C = 0$ e $M(m|n)_{\bar{1}}$ como o espaço formado pelas matrizes tais que $A = D = 0$, temos que $M(m|n) = M(m|n)_{\bar{0}} \oplus M(m|n)_{\bar{1}}$. Dessa forma $M(m|n)$ é um super espaço vetorial.

Super Transformações

Definição 10: Considere dois super espaços vetoriais $U = U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}$ e $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Uma super transformação linear $T : U \to V$ é uma transformação linear, tal que $T(U_{\bar{0}}) \subseteq V_{\bar{0}}$ e $T(U_{\bar{1}}) \subseteq V_{\bar{1}}$.

Exemplo 11: Seja $M(m|n)$ como no Exemplo 9, $\mathbb{F}$ como na Observação 7 e considere a função $str : M(m|n) \to \mathbb{F}$ dada por

$$str \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = tr(A) - tr(D).$$

Essa função é uma super transformação linear, chamada de super traço. Ela é uma generalização da transformação linear traço.

Exemplo 12: Considere $V = \mathbb{C}$ como no Exemplo 9 e $W = \mathbb{R}$ como na Observação 7. Observe que $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(a + bi) = a + b$$

é uma transformação linear, mas $T(V_{\bar{1}}) \nsubseteq W_{\bar{1}}$. Logo T não é uma super transformação linear.

Referências

[1] V. S. Varadarajan. Supersymmetry for Mathematicians, An Introduction (2004).

[2] Calixto, Lucas H., Dissertação de Mestrado: Super algebras de funções (2013).

Este trabalho é financiado pela FAPESP através do processo 2013/08430-4.