Categoria de Conjuntos

Henrique Thavares

Orientador: Tiago Macedo

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

email: `coloque@seu.email.aqui`

Introdução

Nesse poster vamos tratar da teoria de categorias, em especial com a categoria de conjuntos. Primeiro, vamos mostrar a definição abstrata de categoria. Em seguida, vamos aplicar essa definição e contruir a categoria de conjuntos, definindo seus objetos, morfismos e composições.

A teoria de categorias, nos permite estudar objetos aparentemente distintos de maneira geral. Por exemplo, podemos tratar de como conjuntos, grupos e espaços vetoriais, ou lidar com homomorfismos de grupos, transformações lineares e funções contínuas da mesma forma.

Categorias

Definição: Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

(a) Um conjunto de objetos, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$;

(b) Um conjunto de morfismos, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, que é decomposto como $\cup_{c,c' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$, com $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$ denotando o conjunto de morfismos de c para c';

(c) Uma função $\circ$, chamada de composição de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c',c'') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c'')$$

dada por $\circ(\beta,\alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c,c',c'' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c',c'')$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$;

satisfazendo as seguintes condições:

1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para quaisquer $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1,c_2)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_2,c_3)$, $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_3,c_4)$, $c_1,c_2,c_3,c_4 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, existe uma função $id_a : a \to a$ satisfazendo:
   - $id_a \circ \alpha = \alpha$ para qualquer morfismo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,a)$ e objeto $b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
   - $\beta \circ id_a = \beta$ para qualquer morfismo $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,c)$ e objeto $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exemplo: Uma categoria com um único objeto. Considere

(a) $\mathrm{Obj}(\mathbf{1}) = \{\bullet\}$

(b) $\mathrm{Mor}(\mathbf{1}) = \{id_\bullet\}$

(c) $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(\bullet,\bullet) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(\bullet,\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(\bullet,\bullet)$ dada por $id_\bullet \circ id_\bullet = id_\bullet$.

Exemplo: Uma categoria com dois objetos. Considere

(a) $\mathrm{Obj}(\mathbf{2}) = \{\bullet, *\}$

(b) $\mathrm{Mor}(\mathbf{2}) = \{id_\bullet, id_*, (\bullet \xrightarrow{f} *)\}$, com

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(\bullet,\bullet) = \{id_\bullet\}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(*,*) = \{id_*\}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(\bullet,*) = \{f\}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(*,\bullet) = \emptyset$$

(c) $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(b,c) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(a,c)$ dada por:

$$id_\bullet \circ id_\bullet = id_\bullet$$
$$f \circ id_\bullet = f$$
$$id_* \circ f = f$$
$$id_* \circ id_* = id_*$$

Categoria de conjuntos

Objetos. Fixe uma cardinalidade γ e considere o conjunto $\mathrm{Obj}(\mathrm{Sets})$ como o conjunto formado por todos os conjuntos com cardinalidade menor que γ.

Por exemplo, temos os seguintes conjuntos:

$\emptyset$,

$\{1,2,3\}$,

$\{\bullet, *, \#\}$,

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$,

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n,m \in \mathbb{Z}, m > 0\}$,

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Morfismos. Dados dois conjuntos X e Y uma função $f : X \to Y$ é definida como uma relação que, para cada $x \in X$, associa um único $y \in Y$. Neste caso, denotamos $y = f(x)$.

Considere o conjunto $\mathrm{Mor}(\mathrm{Sets})$ como o conjunto formado por todas as funções $f : X \to Y$ entre conjuntos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Sets})$.

Por exemplo, temos as seguintes funções:

(i) Tome $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$ e defina $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como $q(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Observe que q é uma função pois $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ são conjuntos e, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos um único $q(x) = x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ associado a x.

(ii) Considere $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = \pm\sqrt{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Observe que, apesar de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathbb{R}$ serem conjuntos, r associa mais de um elemento de $\mathbb{R}$ a cada $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, a saber $\pm\sqrt{x}$. Mas podemos redefinir r de modo a obter uma função.

(iii) Considere $r_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $r_+(x) = +\sqrt{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Observe que r_+ é uma função pois associa um único elemento de $\mathbb{R}$ a cada $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, a saber $+\sqrt{x}$.

Composição. Dados conjuntos $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Sets})$ e funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, definimos a função $(g \circ f) : X \to Z$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para cada $x \in X$.

Observe que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. De fato, para quaisquer objetos $X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Sets})$ e morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y,Z)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Z,W)$ temos

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= (h \circ g) \circ f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Observe também que, para cada conjunto $X \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Sets})$, existe uma função $id_X : X \to X$ dada por $id_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Essa função satisfaz:

- Para todo $f : X \to Y$, temos que

  $$(f \circ id_X)(x) = (f(id_X(x)) = f(x)$$

  para todo $x \in X$.
- Para todo $g : Y \to X$ temos que

  $$(id_X \circ g)(y) = id_X(g(y)) = g(y)$$

  para todo $y \in Y$.

Agora, como um exemplo, vamos calcular explicitamente a composição de algumas funções dadas acima.

- $q \circ r_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é dada por

  $$\begin{aligned} q \circ r_+(x) &= q(r_+(x)) \\ &= q(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x}^2 \\ &= x, \end{aligned}$$

  para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $r_+ \circ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

  $$\begin{aligned} r_+ \circ q(x) &= r_+(q(x)) \\ &= r_+(x^2) \\ &= +\sqrt{x^2} \\ &= |x|, \end{aligned}$$

  para todo $x \in \mathbb{R}$.

Referências

[1] A. Ananin, Categorias e Álgebra (Co)Homológica.

[2] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, second ed. Springer, GTM **5**.

Este projeto foi financiado pela FAPEG através do edital 05/2013 para realização de eventos.