Classificação de grupos com uma quantidade fixada de subgrupos solúveis e o programa GAP (Groups, Algorithms and Programming)

Daniela Ferreira Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

e-mail: danisarv2020@gmail.com

Introdução

Este pôster aborda o Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC) que foi submetido recentemente. O conteúdo é parte do projeto de pesquisa "Groups with a finite number of centralizers". Este PIBIC visa estudar a classificação de grupos com uma quantidade fixada de subgrupos solúveis e o programa GAP (Groups, Algorithms and Programming). O projeto de PIBIC consiste em trabalhar sobre a **Conjectura de Zarrin**. O que motivou esta submissão do PIBIC, além do ótimo desempenho acadêmico e grande interesse da Daniela Rodrigues, foi também o interesse em estudar e determinar a classificação dos s_n-grupos. Para isto é necessário entender alguns resultados de Teoria de Grupos, tais como: grupos simples, grupos cíclicos, p-grupos, grupos solúveis e grupos nilpotentes. O uso da ferramenta GAP será de extrema importância e ainda é um estudo a ser feito.

Recordação: Recordamos que um grupo G é um conjunto não vazio, juntamente com uma operação, que satisfaz as propriedades de associatividade, existência de elemento neutro e existência de elemento inverso. Dizemos que G é simples, quando G não possuir nenhum subgrupo normal não trivial. E ainda, dizemos que um grupo finito G é um p-grupo, com p primo, se todo elemento de G tem ordem potência de p (como G é finito, isto equivale a G ter ordem potência de p). Vale recordar que o comutador de G é definido por $G' = [G, G] = \langle\{[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}\rangle$. Definimos $G'' = [G, G]$ e indutivamente definimos $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$, o n-ésimo comutador de G.

Definição: Seja G um grupo. Uma série subnormal de G é uma cadeia de subgrupos $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e_G\}$, onde G_{i+1} é um subgrupo normal de G_i, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

A série subnormal é uma série de composição se ela não admite um refinamento próprio (se algum subgrupo distinto dos já existentes é inserido na série).

Definição: Seja G um grupo. Dizemos que G é solúvel se satisfaz as condições equivalentes:

(i) O grupo G possui uma série subnormal cujos grupos quocientes são abelianos.

(ii) Existe um inteiro n tal que $G^{(n)} = \{e_G\}$ No caso de G ser finito, elas são também equivalentes a:

(iii) O grupo G possui uma série de composição cujos grupos quocientes são abelianos (e portanto, são cíclicos de ordem prima).

Teorema: Seja G um grupo.

1. Seja H um subgrupo de G. Se G é solúvel, então H é solúvel.
2. Seja H um subgrupo normal de G. Então, o grupo G é solúvel se, e somente se, os grupos H e $\frac{G}{H}$ são solúveis.

Demonstração: Como $\frac{G}{H}$ é solúvel, existe um inteiro positivo n tal que $(\frac{G}{H})^{(n)} = \left\{e_{\frac{G}{H}}\right\}$. Isto implica $G^{(n)} \subset H$. Ainda, como H também é solúvel, existe um inteiro positivo m tal que $H^m = \{e_G\}$. Logo $G^{(mn)} = \{e_G\}$, donde G é solúvel.

Exemplo:

- Todo grupo abeliano é solúvel;
- *Feit-Thompson*: Todo grupo de ordem ímpar é solúvel;
- *Burnside*: Todo grupo de ordem $p^a q^b$, onde p e q são primos, é solúvel;
- Os grupos simétricos s_3 e s_4 são solúveis (Burnside);
- Todo grupo de ordem menor do que 60 é solúvel.
- O menor grupo não solúvel tem ordem 60 (grupo alternado A_5, que corresponde ao único subgrupo de índice 2 do grupo simétrico s_5);
- Todo grupo diedral $2n$ é solúvel, pois possível um subgrupo normal de ordem n solúvel com quociente de ordem 2 portanto também solúvel.

Definição: Um grupo diz-se nilpotente se ele contém uma série de subgrupos $\{e_G\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$ tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G e cada quociente G_i/G_{i-1} está contido no centro de G_i/G_{i-1}, onde $1 \leq i \leq n$.

Teorema: Um grupo finito é nilpotente, se e somente se, ele for o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

Lema:

(i) Todo p-grupo finito é nilpotente.

(ii) Produto direto de dois grupos nilpotente é nilpotente.

Exemplo:

- Todo grupo abeliano é nilpotente.
- O grupo simétrico s_3 não é nilpotente, pois seu centro é trivial.

Seja G um grupo e denote que

$$SOLV(G) = \{H \mid H \text{é um subgrupo próprio solúvel de } G\}.$$

Dizemos que G é um s_n-grupo se $|SOLV(G)| = n$. Zarrin mostrou que se $n < 5$, então G é nilpotente e se $n < 58$, então G é solúvel.

Conjectura (Zarrin): Seja G um grupo simples não abeliano com exatamente n subgrupos próprios solúveis. Se H é um s_m-grupo e $|G| = |H|$, então G é isomorfo a H, se e somente se, $m = n$?

Se G é isomorfo a H, então necessariamente $m = n$.

Referências

[1] Polcino, C. Milies. *Grupos Nilpotentes: Uma Introdução*. Matemática Universitária. 2003.

[2] Zarrin, M. *GROUPS WITH FEW SOLVABLE SUBGROUPS*. Journal of Algebra and Its Applications. 2013.

[3] Garcia, A., Lequain Y. *Elementos de Álgebra*. IMPA, 2nd ed., 2003.

[4] Rocco, N.R. *Uma Breve Introdução ao Sistema GAP (Groups, Algorithms and Programming)*. UnB. Apostila, 1997.

[5] Rotman, J.J. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, revised 2nd ed., 2003.

Este projeto foi financiado pela FAPEG através do edital 05/2013 para realização de eventos.