

Aprendendo sobre produto direto e produto semidireto de grupos de forma fácil e rigorosa.

Igor Lima e Tiago Macedo

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC



Definição de grupo

Definição

Um grupo é um conjunto G não vazio munido de uma função

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g * h, \end{aligned}$$

satisfazendo

- (i) $a * (b * c) = (a * b) * c$ para quaisquer $a, b, c \in G$.
- (ii) Existe $e \in G$ tal que $e * g = g = g * e$ para todo $g \in G$.
- (iii) Para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$.

Em geral, como fazemos com a multiplicação de números reais, vamos denotar $g * h$ simplesmente por gh .

Exemplos de grupos

Exemplos

1. Para cada $n > 0$, considere $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, (n - 1)\}$.
2. S_3 é o grupo de permutação de três números.
 $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

Definição de subgrupo

Definição

$(G, *)$ grupo.

$\emptyset \neq H \subseteq G$ é subgrupo quando, munido da mesma função

$$\begin{aligned} * : H \times H &\longrightarrow H \\ (h_1, h_2) &\longmapsto h_1 * h_2, \end{aligned}$$

$(H, *)$ é um grupo.

Notação: $H \leq G$.

Equivalência para subgrupo

Proposição

$(G, *)$ grupo.

$H \leq G$ é um subgrupo $\Leftrightarrow$

- (i) $h_1 * h_2 \in H$ para quaisquer $h_1, h_2 \in H$.
- (ii) $h^{-1} \in H$ para todo $h \in H$.

Exemplos de subgrupos

Exemplos

Subgrupos de S_3 :

- (a) $\{(1)\}$.
- (b) $\{(1), (12)\}, \{(1), (13)\}, \{(1), (23)\}$.
- (c) $\{(1), (132), (123)\}$.
- (d) S_3 .

Definição e exemplos de subgrupo normal

Definição

Um subgrupo $N \triangleleft G$ é normal quando $gng^{-1} \in N$ para quaisquer $g \in G$ e $n \in N$.

Exemplos

1. $\{e\}$, G são ditos subgrupos triviais de qualquer grupo G .
2. $\{(1), (132), (123)\} \triangleleft S_3$.
3. Todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.

Homomorfismos de grupos

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$, $(H, \bullet)$, um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ é uma função que satisfaz

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2), \quad (1)$$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$.

Observe que a Equação (1) implica que:

1. $\varphi(e_G) = e_H$.
2. $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ para cada $g \in G$.

- Um homomorfismo que é bijetor é chamado de isomorfismo.
- Se $G = H$, um isomorfismo é chamado de automorfismo.

Exemplos de homomorfismos de grupos

Exemplos

1. A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(z) = 2z$ para cada $z \in \mathbb{Z}$ é um homomorfismo de grupos.
2. A função $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } z \text{ é par} \\ 1 & , \text{ se } z \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

é um homomorfismo de grupos.

Definição de produto direto

Definição

Dados dois grupos G, H , o produto direto de G por H é o conjunto $G \times H$ munido da função

$$\begin{aligned} * : (G \times H) \times (G \times H) &\longrightarrow (G \times H) \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) &\longmapsto (g_1 g_2, h_1 h_2). \end{aligned}$$

Equivalência para produto direto

G grupo.

$H, K \leq G$.

$HK := \{hk \in G | h \in H, k \in K\}$.

Teorema

G é o (isomorfo ao) produto direto $H \times K \Leftrightarrow$

- (i) H, K são normais em G ;
- (ii) $H \cap K = \{e\}$;
- (iii) $HK = G$.

Exemplo de produto direto

Exemplo

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}.$$

Vamos fazer algumas somas ...

Definição de produto semidireto

Vamos denotar por $\text{Aut}(N)$ o conjunto (grupo) de todos os automorfismos de um grupo N .

Definição

Considere dois grupos G, H e um homomorfismo de grupos $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(H)$. O produto semidireto $G \ltimes_{\sigma} H$ é o conjunto $G \times H$ munido da função

$$\begin{aligned} *_{\sigma} : (G \times H) \times (G \times H) &\longrightarrow (G \times H) \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) &\longmapsto (g_1 g_2, h_1 \sigma(g_1)(h_2)). \end{aligned}$$

Um exemplo simples

Exemplo

Considere

- $G = \mathbb{Z}_2, H = \mathbb{Z}_3$
- $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3), \sigma(0) = \text{id}_{\mathbb{Z}_3}, \sigma(1) = \text{id}_{\mathbb{Z}_3}.$

Vamos calcular $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}_3$.

- Como conjunto $\mathbb{Z}_2 \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.
- A função $*_{\sigma} : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ é dada por
$$*_{\sigma}((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = (g_1 g_2, h_1 \text{id}_{\mathbb{Z}_2}(h_2)) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Equivalência para produto semidireto

Teorema

Considere um grupo G e dois subgrupos $H, N \leq G$.

Existe $\sigma : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ tal que $G = N \rtimes_{\sigma} H$ se, e somente se

- (i) $N \leq G$ é normal;
- (ii) $H \cap N = \{e\}$;
- (iii) $HN = G$.

Observe que: todo produto direto é, em particular, um produto semidireto.

Exemplo de produto semidireto

Exemplo

Considere $G = S_3$, $N = \{(1), (123), (132)\}$, $H = \{(1), (12)\}$.

Observe que

- $N \cong \mathbb{Z}_3$.
- $H \cong \mathbb{Z}_2$.

Observe ainda que:

- $N \leq G$ é normal.
- $S_3 = NH$.
- $N \cap H = \{(1)\}$.

Pelo resultado anterior, existe $\sigma : H \rightarrow \text{Aut}(N)$, tal que

$$S_3 \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes_{\sigma} \mathbb{Z}_3.$$

Continuação do exemplo de produto semidireto

Exemplo

Considere $\sigma : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ dada por

$$\begin{aligned}\sigma(12)(123) &= (12)(123)(12) = (132) \\ \sigma(12)(132) &= (12)(132)(12) = (123).\end{aligned}$$

Considere o isomorfismo $\varphi : H \ltimes_{\sigma} N \rightarrow S_3$ dado por

$$\varphi(h, n) = hn.$$

Observe que

- φ é sobrejetora, porque $HN = S_3$.
- φ é injetora, porque $H \cap N = \{(1)\}$.
- φ é um homomorfismo de grupos.