
II W. A.
31 de março a 03 de abril de 2014
$G \times G \to G$
$(g, h) \mapsto g \cdot h$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$g \cdot e = g = e \cdot g$
$\iota : G \to G$
$g \mapsto g^{-1}$
$g \cdot g^{-1} = e$

E se os garçons soubessem polinômios?

Jorge Alencar
Universidade Estadual de Campinas

II Workshop de Álgebra da UFG-CAC

Catalão, Brazil 31 de Março até 03 de Abril, 2014

Polinômios

Um polinômio é uma expressão matemática envolvendo a soma de potências em uma ou mais variáveis multiplicadas por coeficientes constantes. Polinômios aparecem em uma ampla variedade de áreas da matemática e das ciências. Por exemplo, eles são utilizados para formar as equações polinomiais, que modelam uma grande variedade de problemas, desde os mais elementares até os problemas mais complicados nas ciências, aparecem em ambientes que vão desde a química básica até física, da economia até as ciências sociais. Em matemática avançada, polinômios são usados para construir anéis de polinômios, um conceito central em álgebra e geometria algébrica.

Em particular, podemos usar polinômios em problemas de combinatória, problemas de contagem em geral. Introduziremos os conceitos essenciais de polinômios e combinatória, seguido dos principais conceitos de funções geradoras ordinárias e aplicações, dando ênfase para a resolução de problemas de contagem.

Polinômios - Definição

Dada uma sequência de números complexos $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, consideramos a função

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

A função f é donominada *função polinomial* ou *polinômio* associado a sequência dada. Os números $a_0, \ldots, a_n$ são chamados coeficientes e as parcelas a_0,$a_1 x$,$a_2 x^2$,... ,$a_n x^n$ são chamados termos do polinômio.

Polinômios - Exemplos

$$f(x) = 1 + 2x - 3x^3 + 5x^6$$

com $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = -3, a_4 = 0, a_5 = 0$ e $a_6 = 5$;

$$g(x) = 1 + 7x^5$$

com $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ e $a_5 = 7$;

$$h(x) = -3x^2 + 5x^3$$

com $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -3$ e $a_3 = 5$.

Polinômios - Exemplos

$$f(x) = 1 + 2x - 3x^3 + 5x^6$$

com $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = -3, a_4 = 0, a_5 = 0$ e $a_6 = 5$;

$$g(x) = 1 + 7x^5$$

com $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ e $a_5 = 7$;

$$h(x) = -3x^2 + 5x^3$$

com $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -3$ e $a_3 = 5$.

Polinômios - Exemplos

$$f(x) = 1 + 2x - 3x^3 + 5x^6$$

com $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = -3, a_4 = 0, a_5 = 0$ e $a_6 = 5$;

$$g(x) = 1 + 7x^5$$

com $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ e $a_5 = 7$;

$$h(x) = -3x^2 + 5x^3$$

com $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -3$ e $a_3 = 5$.

Polinômios - Igualdade

Dadas duas funções $f, g : A \longrightarrow B$, então

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \forall x \in A;$$

Em particular, se

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

então

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\};$$

Polinômios - Adição

Sejam $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, logo chamamos de *soma* de f com g o polinômio

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i\end{aligned}$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + 5x^4$, assim

$$(f+g)(x) = (4 + 3x + x^2) + (5 + 3x^2 + 5x^4)$$

$$= (4 + 3x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4) + (5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + 5x^4)$$

$$= (4+5) + (3+0)x + (1+3)x^2 + (0+0)x^3 + (0+5)x^4$$

$$= 9 + 3x + 4x^2 + 5x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + 5x^4$, assim

$$(f + g)(x) = (4 + 3x + x^2) + (5 + 3x^2 + 5x^4)$$

$$= (4 + 3x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4) + (5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + 5x^4)$$

$$= (4 + 5) + (3 + 0)x + (1 + 3)x^2 + (0 + 0)x^3 + (0 + 5)x^4$$

$$= 9 + 3x + 4x^2 + 5x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + 5x^4$, assim

$$(f + g)(x) = (4 + 3x + x^2) + (5 + 3x^2 + 5x^4)$$

$$= (4 + 3x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4) + (5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + 5x^4)$$

$$= (4 + 5) + (3 + 0)x + (1 + 3)x^2 + (0 + 0)x^3 + (0 + 5)x^4$$

$$= 9 + 3x + 4x^2 + 5x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + 5x^4$, assim

$$(f + g)(x) = (4 + 3x + x^2) + (5 + 3x^2 + 5x^4)$$

$$= (4 + 3x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4) + (5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + 5x^4)$$

$$= (4 + 5) + (3 + 0)x + (1 + 3)x^2 + (0 + 0)x^3 + (0 + 5)x^4$$

$$= 9 + 3x + 4x^2 + 5x^4$$

Polinômios - Adição

Sendo $P(\mathbb{C})$ o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos, então a adição de polinômios possui as propriedades:

- associativa:

$$(f+g)+h = f+(g+h) \;\; \forall f, g, h \in P(\mathbb{C});$$

- comutativa:

$$f+g = g+f \;\; \forall f, g \in P(\mathbb{C});$$

Polinômios - Adição

- existência de elemento neutro:

$$\exists 0 \in P(\mathbb{C}) : f + 0 = f \;\; \forall f \in P(\mathbb{C});$$

- existência de elemento inverso:

$$\forall f \in P(\mathbb{C}) \exists -f \in P(\mathbb{C}) : f + (-f) = 0.$$

Polinômios - Multiplicação

Sejam $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, logo chamamos de produto de f com g o polinômio

$$\begin{aligned}(fg)(x) = &(a_0 b_0)\\ &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)x\\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2\\ &+ \ldots + (a_m + b_n)x^{m+n}\end{aligned}$$

Polinômios - Multiplicação

Ou seja, fg é o polinômio

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n+m} x^{n+m},$$

tal que

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0,$$

com $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$.

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = x + 2x^2$ e $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$, assim

$$(f.g)(x) = (x + 2x^2)(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= (4x + 5x^2 + 6x^3) + (8x^2 + 10x^3 + 12x^4)$$

$$= 4x + 13x^2 + 16x^3 + 12x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = x + 2x^2$ e $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$, assim

$$(f.g)(x) = (x + 2x^2)(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= (4x + 5x^2 + 6x^3) + (8x^2 + 10x^3 + 12x^4)$$

$$= 4x + 13x^2 + 16x^3 + 12x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = x + 2x^2$ e $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$, assim

$$(f.g)(x) = (x + 2x^2)(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= (4x + 5x^2 + 6x^3) + (8x^2 + 10x^3 + 12x^4)$$

$$= 4x + 13x^2 + 16x^3 + 12x^4$$

Polinômios - Exemplo

Sejam $f(x) = x + 2x^2$ e $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$, assim

$$(f.g)(x) = (x + 2x^2)(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2)$$

$$= (4x + 5x^2 + 6x^3) + (8x^2 + 10x^3 + 12x^4)$$

$$= 4x + 13x^2 + 16x^3 + 12x^4$$

Polinômios - Multiplicação

A multiplicação de polinômios possui as propriedades:

- associativa:

$$(fg)h = f(gh) \ \ \forall f, g, h \in P(\mathbb{C});$$

- comutativa:

$$fg = gf \ \ \forall f, g \in P(\mathbb{C});$$

Polinômios - Multiplicação

- existência de elemento neutro:

$$\exists \mathbf{1} \in P(\mathbb{C}) : f\mathbf{1} = f \ \ \forall f \in P(\mathbb{C}).$$

E junto com a adição, a propriedade distributiva:

$$f(g + h) = fg + fh \ \ \forall f, g, h \in P(\mathbb{C}).$$

Polinômios - Outras informações

- Pelas definições e propriedades das operações de adição e multiplicação sobre $P(\mathbb{C})$ definem uma estrutura de anel comutativo, ou seja, $P(\mathbb{C})$ é o anel dos polinômios complexos;
- Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ um polinômio não nulo. Chamamos de grau de f o número p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$;
- Seja $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$, deizemos que a é uma raiz de f.

Arranjo Simples

O *Arranjo Simples* de n elementos tomados p a p , com $n \geq 1$ e $p \leq n$, são todas as possíveis sequências de p elementos escolhidos dentre os n existentes.

Arranjo Simples - Exemplo

Seja $\{A, B, C, D\}$ nosso conjunto de elementos. Os possíveis arranjos destes 4 elementos tomados 3 a 3 são:

$$\begin{array}{cccc}
ABC & ABD & ACD & BCD \\
ACB & ADB & ADC & BDC \\
BCA & BAD & CAD & CBD \\
BAC & BDA & CDA & CDB \\
CAB & DAB & DAC & DBC \\
CBA & DBA & DCA & DCB
\end{array}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\overline{L_1} \quad \overline{L_2} \quad \overline{L_3} \quad \cdots \quad \overline{L_{p-1}} \quad \overline{L_p}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\frac{n}{L_1} \quad \frac{}{L_2} \quad \frac{}{L_3} \quad \cdots \quad \frac{}{L_{p-1}} \quad \frac{}{L_p}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\frac{n}{L_1} \quad \frac{n-1}{L_2} \quad \frac{}{L_3} \quad \cdots \quad \frac{}{L_{p-1}} \quad \frac{}{L_p}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\frac{n}{L_1} \quad \frac{n-1}{L_2} \quad \frac{n-2}{L_3} \quad \cdots \quad \frac{}{L_{p-1}} \quad \frac{}{L_p}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\frac{n}{L_1} \quad \frac{n-1}{L_2} \quad \frac{n-2}{L_3} \quad \cdots \quad \frac{n-(p-1)+1}{L_{p-1}} \quad \frac{n-p+1}{L_p}$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

Se denotarmos por $A(n, p)$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, temos

$$A(n, p) = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1).$$

Arranjo Simples - Expressão Matemática

$$\begin{aligned}
A(n,p) &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\left(\frac{n-p}{n-p}\right)\ldots\left(\frac{1}{1}\right) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 1} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!}
\end{aligned}$$

Arranjo Simples - Exemplo

Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

Arranjo Simples - Exemplo

Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

$$A(23, 2) = \frac{23!}{21!} = 23 \cdot 22 = 506.$$

Combinação Simples

Combinação Simples de n elementos tomados p a p, com $n \geq 1$ e $p \leq n$, são todas as possíveis escolhas não ordenadas de p desses n elementos.

Combinação Simples - Exemplo

Seja $\{A, B, C, D\}$ nosso conjunto de elementos. Os possíveis arranjos destes 4 elementos tomados 3 a 3 são:

$$\begin{array}{cccc}
ABC & ABD & ACD & BCD \\
ACB & ADB & ADC & BDC \\
BCA & BAD & CAD & CBD \\
BAC & BDA & CDA & CDB \\
CAB & DAB & DAC & DBC \\
CBA & DBA & DCA & DCB
\end{array}$$

Combinação Simples - Exemplo

Assim, as possíveis combinações destes 4 elementos tomados 3 a 3 são:

$$ABC \quad ABD \quad ACD \quad BCD$$

Combinação Simples - Expressão Matemática

Tome um conjunto com n elementos e escolha p desses elementos. Temos que o total de formas de arranjar esses p elementos em ordem é o total de permutações de p elementos, isto é, $p!$ formas.

Combinação Simples - Expressão Matemática

Ou seja, um mesmo subconjunto de p elementos dos n existentes é contado um total de $p!$ vezes em $A(n,p)$, assim:

$$A(n,p) = p!C(n,p)$$

onde $C(n,p)$ é o total de combinações de n elementos tomados p a p. Portanto,

$$C(n,p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Combinação Simples - Exemplo

Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 alinhados?

Combinação Simples - Exemplo

Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 alinhados?

$$C(14,3) = \frac{14!}{11!3!} = 364.$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e m são inteiros não negativos.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Considerando a equação:

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Considerando a equação:

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Temos,

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_2 & = & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Considerando a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Considerando a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

São possíveis soluções:

$$(2, 2, 4, 3), (1, 8, 1, 1), (3, 4, 2, 2), (0, 0, 6, 5).$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Podemos reescrever as soluções $(2, 2, 4, 3)$, $(1, 8, 1, 1)$, $(3, 4, 2, 2)$ e $(0, 0, 6, 5)$, respectivamente, da seguinte forma:

$$\bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet = 11$$

$$\bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ |\ \bullet = 11$$

$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet = 11$$

$$|\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet = 11$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Em outras palavras, temos 14 espaços para distribuir 11 bolas idênticas e 3 hastes idênticas.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Em outras palavras, temos 14 espaços para distribuir 11 bolas idênticas e 3 hastes idênticas. Podemos fazer isso de $C(14, 11)$ formas.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Portanto a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

possui um total de $C(14, 11)$ possiveis soluções.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Mais geralmente, o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,$$

para $m > 0$, é dado por $C(n + m - 1, n - 1)$.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Encontrar o o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Encontrar o o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

$$C(12 + 5 - 1, 5 - 1) = C(16, 4) = 1820.$$

Funções Geradoras

- Criação $\Longrightarrow$ A. De Moivre (1667 - 1754);
- Teoria Aditiva dos Números $\Longrightarrow$ L. Euler (1707 - 1783);
- Estudo de Probabilidades $\Longrightarrow$ S. Laplace (1749 - 1827);
- Permutações Caóticas $\Longrightarrow$ N. Bernoulli (1687 - 1759).

Funções Geradoras - Exemplo

Encontrar o o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

de modo que $x_1, x_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $x_3 \in \{5, 6, 7\}$.

Funções Geradoras - Exemplo

Definimos 3 polinômios, um para cada variável x_i, da seguinte forma:

- $p_1(x) = x^2 + x^3 + x^4$ para x_1;
- $p_2(x) = x^2 + x^3 + x^4$ para x_2;
- $p_3(x) = x^5 + x^6 + x^7$ para x_3.

Funções Geradoras - Exemplo

Tomando $p(x)$ como o produto desses polinômios, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ &= (x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7) \\ &= x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}. \end{aligned}$$

Funções Geradoras - Exemplo

Tomando $p(x)$ como o produto desses polinômios, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) \\ &= (x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4)(x^5+x^6+x^7) \\ &= x^9+3x^{10}+6x^{11}+7x^{12}+6x^{13}+3x^{14}+x^{15}. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que a solução para nosso problema será o coeficiente de x^{12} no polinômio acima. Ou seja, o número de soluções da equação dada é 7.

Funções Geradoras - Exemplo

Note que, se (y_1, y_2, y_3) é uma soluções da equação, então $y_1 + y_2 + y_3 = 12$ com $y_1, y_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $y_3 \in \{5, 6, 7\}$.
Portanto,

- x^{y_1} é um termo de $p_1(x)$;
- x^{y_2} é um termo de $p_2(x)$;
- x^{y_3} é um termo de $p_3(x)$.

Funções Geradoras - Exemplo

Note que, se (y_1, y_2, y_3) é uma soluções da equação, então $y_1 + y_2 + y_3 = 12$ com $y_1, y_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $y_3 \in \{5, 6, 7\}$.
Portanto,

- x^{y_1} é um termo de $p_1(x)$;
- x^{y_2} é um termo de $p_2(x)$;
- x^{y_3} é um termo de $p_3(x)$.

E, além disso, $x^{y_1}x^{y_2}x^{y_3} = x^{y_1+y_2+y_3} = x^{12}$.

Funções Geradoras - Exemplo

Reciprocamente, sejam (y_1, y_2, y_3) tais que

- x^{y_1} é um termo de $p_1(x)$;
- x^{y_2} é um termo de $p_2(x)$;
- x^{y_3} é um termo de $p_3(x)$;
- $x^{y_1}x^{y_2}x^{y_3} = x^{12}$.

Funções Geradoras - Exemplo

Portanto cada o coeficiente de x^{12} de $p(x)$ é o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

de modo que $x_1, x_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $x_3 \in \{5, 6, 7\}$.

Funções Geradoras - Exemplo

$$p(x) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$$

Funções Geradoras - Exemplo

Consideremos uma caixa contendo 4 bolas, sendo duas amarelas (representadas pela letra a), uma branca (representada pela letra b) e uma cinza (representada pela letra c).

Funções Geradoras - Exemplo

Podemos retirar uma ou mais bolas das formas:

- Possíveis retiradas de 1 bola: a, b, c;
- Possíveis retiradas de 2 bolas: aa, ab, ac, bc;
- Possíveis retiradas de 3 bolas: aab, aac, abc;
- Possíveis retiradas de 4 bolas: $aabc$.

Funções Geradoras - Exemplo

Associamos os seguintes polinômios a cada cor:

- Amarela:
$$1 + ax + a^2x^2;$$
- Branca:
$$1 + bx;$$
- Cinza:
$$1 + cx.$$

Funções Geradoras - Exemplo

Tomando o produto desses polinômios obtemos:

$$\begin{aligned}(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) = & 1 \\ & + (a + b + c)x \\ & + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 \\ & + (a^2b + a^2c + abc)x^3 \\ & + (a^2bc)x^4\end{aligned}$$

Funções Geradoras - Exemplo

Caso não estivéssemos interessados nas possíveis listagens, mas somente no número de tais diferentes escolhas, bastaria tomarmos $a = b = c = 1$, obtendo

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4$$

Funções Geradoras - Definições

Uma série de potências é umas série infinita da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$, e x é uma variável.

Funções Geradoras - Exemplo

Note que qualquer polinômio em x é uma série de potências.

$$4x^2 + 3x^4 + x^5 = 0 + 0x + 4x^2 + 0x^3 + 3x^4 + 1x^5 + 0x^6 + 0x^7 + \ldots.$$

Funções Geradoras - Definições

Se a_r, para $r = 0, 1, 2, \ldots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

ou, mais geralmente, dada uma sequência (a_r), a função geradora ordinária para esta sequência é definida pela série de potências acima.

Funções Geradoras - Exemplo

Achar a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente de a_r de x^r é o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$2x + 3y + 7z = r.$$

Funções Geradoras - Exemplo

Tomando $x_1 = 2x$, $y_1 = 3y$ e $z_1 = 7z$, temos

$$x_1 + y_1 + z_1 = r,$$

onde x_1 é múltiplo de 2, y_1 é múltiplo de 3 e z_1 é múltiplo de 7.

Funções Geradoras - Exemplo

Dessa forma, a série de potências associada a:

- $x_1 \Longrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$;
- $y_1 \Longrightarrow 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots$;
- $z_1 \Longrightarrow 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + \ldots$.

Funções Geradoras - Exemplo

Portanto, a função geradora ordinária $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = (1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^7+x^{14}+x^{21}+\dots).$$

Funções Geradoras - Exemplo

Sabendo que se $|x| < 1$ então

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

E lembrando que não estamos interessados em dar valores para a variável x, sem perda de generalidade, podemos reescrever $f(x)$ por

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^7} = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^7)}.$$

Funções Geradoras - Exemplo

Quantas soluções possui a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r,$$

se cada variável é igual a 0 ou 1?

Funções Geradoras - Exemplo

Encontrar o número de soluções em inteiros da equação

$$x + y + z + w = 25,$$

onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.

Funções Geradoras - Exemplo

Encontrar o número de soluções em inteiros da equação

$$x + y + z + w = 25,$$

onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 10. Além disso, x deve ser um número primo, y é par, z pertence a $\{4, 5, 6, 8\}$ e w é uma potência de dois.

Referências

- SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. Introdução à análise combinatória. 3. ed. Campinas, 2002.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações. Atual, 2005.
- ROBERTS, Fred; TESMAN, Barry. Applied combinatorics. CRC Press, 2011.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- UFG - Catalão.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- UFG - Catalão.

Obrigado!