Álgebra abstrata aplicada: alguém duvida?

Manuela da Silva Souza

IM-UFBA

22 de outubro de 2014

Álgebra é a ciência do **cálculo** das grandezas abstratas, representadas por **letras**.

Álgebra é o ramo que estuda a manipulação formal de **equações**, operações matemáticas, **polinômios** e **estruturas algébricas**.

De onde surge a necessidade de fazer operações (contas, cálculos) em conjuntos não necessariamente numéricos?

- Mais de 3000 áreas aplicam a Matemática regularmente.
- Computação, Engenharia, Física, Química e Economia.
- Linguística, Medicina, Biologia e Psicologia.
- Pelo menos metade dos 100000 matemáticos, nos Estados Unidos, trabalham em outras áreas.

Aplicações da álgebra

- Modelos lineares na Economia, Administração e na Engenharia.
- Computação gráfica e processamento de imagens.
- Criptografia.
- Sistemas dinâmicos.
- Mecânica quântica, eletromagnetismo, relatividade.
- Cruzamento de organismos e genética.
- Simetria molecular na química inorgânica.

Apresentação

Apresentação

- Uma equipe de cientistas da Universidade de Cambridge desenvolveu uma dieta para pacientes obesos nos anos 80.
- A fórmula da dieta é uma combinação equilibrada de carboidratos, proteínas, gordura, vitaminas, minerais, etc.
- Para atingir as quantidades e as proporções desejadas de cada nutriente foi necessário introduzir a dieta uma grande variedade de tipos alimentares.
- Cada tipo alimentar fornecia muitos ingredientes da dieta mas não na proporção desejada.

- O leite desnatado é uma grande fonte de proteínas mas contém muito cálcio.
- A farinha de soja é usada para se obter parte das proteínas porque contém pouco cálcio.
- A farinha de soja contém muita gordura.
- O soro de leite talhado tem menos gordura em porporção ao cálcio.
- O soro de leite contém caiboidratos demais...

Problema em pequena escala

Table: Quantidade (gramas) fornecidas por 100 gramas de ingredientes

Nutrientes(gramas)	Leite desnatado	Farinha de soja	Soro de leite	Quantidade fornecidas pela dieta (dia)
Proteína	36	51	13	33
Carboidrato	52	34	74	45
Gordura	0	7	1,1	3

Problema: Determinar uma combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite de modo a obter as quantidades diárias exatas de proteínas, carboidratos e gordura para a dieta.

Solução: Sejam x_1, x_2 e x_3 os números de unidades (100 gramas) de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite, respectivamente. A equação vetorial é:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

em que $\mathbf{a}_i$ é a i-ésima coluna da tabela, ou seja,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 36 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 51 \\ 34 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 74 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}$ é a última coluna da tabela anterior, ou seja,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução: Sejam x_1, x_2 e x_3 os números de unidades (100 gramas) de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite, respectivamente. A equação vetorial é:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

em que $\mathbf{a}_i$ é a i-ésima coluna da tabela, ou seja,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 36 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 51 \\ 34 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 74 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}$ é a última coluna da tabela anterior, ou seja,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,277 \\ 0 & 1 & 0 & 0,392 \\ 0 & 0 & 1 & 0,233 \end{pmatrix}$$

Com precisão de três casas decimais, a dieta requer $0,277$ unidades de leite desnatado, $0,392$ unidades de farinha de soja e $0,233$ unidades de soro de leite de modo a obter as quantidades desejadas de proteínas, carboidratos e gordura.

$$\begin{pmatrix} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,277 \\ 0 & 1 & 0 & 0,392 \\ 0 & 0 & 1 & 0,233 \end{pmatrix}$$

Com precisão de três casas decimais, a dieta requer $0,277$ unidades de leite desnatado, $0,392$ unidades de farinha de soja e $0,233$ unidades de soro de leite de modo a obter as quantidades desejadas de proteínas, carboidratos e gordura.

Considerações

- Para que a solução seja fisicamente viável, os valores x_1, x_2 e x_3 não podem ser negativos.
- Com um número grande de nutrientes necessários possivelmente será preciso uma quantidade maior de tipos alimentares (para que exista solução não negativa).
- O fabricante da dieta de Cambridge conseguiu fornecer 31 nutrientes, em quantidades precisas, usando apenas 33 ingredientes.
- Técnicas de programação linear são utilizadas em problemas desse tipo.

Considerações

- Para que a solução seja fisicamente viável, os valores x_1, x_2 e x_3 não podem ser negativos.
- Com um número grande de nutrientes necessários possivelmente será preciso uma quantidade maior de tipos alimentares (para que exista solução não negativa).
- O fabricante da dieta de Cambridge conseguiu fornecer 31 nutrientes, em quantidades precisas, usando apenas 33 ingredientes.
- Técnicas de programação linear são utilizadas em problemas desse tipo.

Apresentação

Em uma certa espécie de gado os animais podem ser pretos ou marrons, de uma única cor ou pintados.


Sabe-se que preto é dominante e marrom recessivo e que monocromático é dominante sobre pintado.

Assim, existem 4 possíveis tipos de gado neste rebanho:

1. $a =$ Preto.
2. $b =$ Preto pintado.
3. $c =$ Marrom.
4. $d =$ Marrom pintado.

Devido a dominância, em um cruzamento de um gado preto pintado com um marrom temos um gado preto. Podemos simbolizar esse cruzamento por:

$$b * c = a.$$

Assim, existem 4 possíveis tipos de gado neste rebanho:

1. $a =$ Preto.
2. $b =$ Preto pintado.
3. $c =$ Marrom.
4. $d =$ Marrom pintado.

Devido a dominância, em um cruzamento de um gado preto pintado com um marrom temos um gado preto. Podemos simbolizar esse cruzamento por:

$$b * c = a.$$

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$S = (\{a, b, c, d\}, *)$ é um semigrupo ($*$ é associativa e d é o elemento neutro). Além disso, a tabela é simétrica em relação a diagonal principal, portanto $*$ é comutativa.

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$S = (\{a, b, c, d\}, *)$ é um semigrupo ($*$ é associativa e d é o elemento neutro). Além disso, a tabela é simétrica em relação a diagonal principal, portanto $*$ é comutativa.

Apresentação

Na floresta de sequóias da Califórnia, um tipo de rato-do-mato fornece até 80% da dieta da coruja malhada que é o principal predador do rato-do mato.

Vamos denotar as populações de corujas e ratos-do-mato, em k-meses por C_k e R_k respectivamente (medidos em milhares).

Exemplo:

$$C_0 = 15 \text{ e } R_0 = 14$$

significa que existiam 15 mil corujas e 14 mil ratos quando o estudo foi iniciado.

Vamos denotar as populações de corujas e ratos-do-mato, em k-meses por C_k e R_k respectivamente (medidos em milhares).

Exemplo:

$$C_0 = 15 \text{ e } R_0 = 14$$

significa que existiam 15 mil corujas e 14 mil ratos quando o estudo foi iniciado.

Sendo p é um parâmetro positivo a ser especificado, suponha

$$\begin{aligned} C_1 &= (0,5)C_0 + (0,4)R_0 \\ R_1 &= -pC_0 + (1,1)R_0 \end{aligned}$$

represente a população de corujas e de ratos após **1 mês**,

$$\begin{aligned} C_2 &= (0,5)C_1 + (0,4)R_1 \\ R_2 &= -pC_1 + (1,1)R_1 \end{aligned}$$

represente a população de corujas e de ratos após **2 mês**.

Sendo p é um parâmetro positivo a ser especificado, suponha

$$\begin{aligned} C_1 &= (0,5)C_0 + (0,4)R_0 \\ R_1 &= -pC_0 + (1,1)R_0 \end{aligned}$$

represente a população de corujas e de ratos após **1 mês**,

$$\begin{aligned} C_2 &= (0,5)C_1 + (0,4)R_1 \\ R_2 &= -pC_1 + (1,1)R_1 \end{aligned}$$

represente a população de corujas e de ratos após **2 mês**.

Após **k+1 meses**...

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= (0,5)C_k + (0,4)R_k \\ R_{k+1} &= -pC_k + (1,1)R_k \end{aligned}$$

As equações acima representam a evolução da população de corujas e de ratos no tempo.

Após **k+1 meses**...

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= (0,5)C_k + (0,4)R_k \\ R_{k+1} &= -pC_k + (1,1)R_k \end{aligned}$$

As equações acima representam a evolução da população de corujas e de ratos no tempo.

De forma equivalente,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -p & 1,1 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{x}_k$$

em que $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}$.

Problema: Determinar a evolução desse sistema quando o parâmetro predatório é $0,104$.

Neste caso,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{x}_k$$

em que $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}$. Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = A^2\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A^3\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k &= A\mathbf{x}_{k-1} = A^k\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} C_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$.

Neste caso,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{x}_k$$

em que $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}$. Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = A^2\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A^3\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k &= A\mathbf{x}_{k-1} = A^k\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} C_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$.

Exemplo

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 = ? \\ \mathbf{x}_2 &= A^2\mathbf{x}_0 = ? \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{100} &= A^{100}\mathbf{x}_0 = ? \end{aligned}$$

Computacionamente a razão entre as populações de corujas e ratos é aproximadamente

$$0,769231 \approx \frac{10}{13}$$

para k suficientemente grande.

Exemplo

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 = ? \\ \mathbf{x}_2 &= A^2\mathbf{x}_0 = ? \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{100} &= A^{100}\mathbf{x}_0 = ? \end{aligned}$$

Computacionamente a razão entre as populações de corujas e ratos é aproximadamente

$$0,769231 \approx \frac{10}{13}$$

para k suficientemente grande.

Problema: Vale para qualquer x_0?

A Álgebra Linear nos dá essa resposta!!!!!!!!

Problema: Vale para qualquer x_0?

A Álgebra Linear nos dá essa resposta!!!!!!!!

Prova

Os autovalores da matriz dos coeficientes A são: $\lambda_1 = 1,02$ e $\lambda_2 = 0,58$. Como autovetores associados temos, respectivamente:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um $\mathbf{x}_0$ inicial pode ser escrito como $x_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Suponha $c_1 \neq 0$. Então, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\
&= c_1A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 \\
&= c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2 \\
&= c_1(1,02)^k\mathbf{v}_1 + c_2(0,58)^k\mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Para k suficientemente grande $(0,58)^k$ é praticamente zero. Disso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &\approx c_1(1,02)^k v_2 \\
&= c_1(1,02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusão 1: $\mathbf{x}_k$ é aproximadamente um múltiplo de $\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$, ou seja, para cada 10 mil corujas existem cerca de 13 mil ratos.

Um $\mathbf{x}_0$ inicial pode ser escrito como $x_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Suponha $c_1 \neq 0$. Então, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\ &= c_1A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 \\ &= c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2 \\ &= c_1(1,02)^k\mathbf{v}_1 + c_2(0,58)^k\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Para k suficientemente grande $(0,58)^k$ é praticamente zero. Disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\approx c_1(1,02)^k v_2 \\ &= c_1(1,02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusão 1: $\mathbf{x}_k$ é aproximadamente um múltiplo de $\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$, ou seja, para cada 10 mil corujas existem cerca de 13 mil ratos.

Um $\mathbf{x}_0$ inicial pode ser escrito como $x_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Suponha $c_1 \neq 0$. Então, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\
&= c_1A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 \\
&= c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2 \\
&= c_1(1,02)^k\mathbf{v}_1 + c_2(0,58)^k\mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Para k suficientemente grande $(0,58)^k$ é praticamente zero. Disso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &\approx c_1(1,02)^k v_2 \\
&= c_1(1,02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusão 1: $\mathbf{x}_k$ é aproximadamente um múltiplo de $\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$, ou seja, para cada 10 mil corujas existem cerca de 13 mil ratos.

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &\approx c_1(1,02)^{k+1}v_2 \\ &= (1,02)c_1(1,02)^k v_2 \\ &\approx (1,02)\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

Conclusão 2: Assintoticamente as duas componentes de $\mathbf{x}_k$ (os números de corujas e de ratos) crescem com fator de cerca de $1,02$ por mês, uma taxa mensal de crescimento de 2%.

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &\approx c_1(1,02)^{k+1}v_2 \\ &= (1,02)c_1(1,02)^k v_2 \\ &\approx (1,02)\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

Conclusão 2: Assintoticamente as duas componentes de $\mathbf{x}_k$ (os números de corujas e de ratos) crescem com fator de cerca de $1,02$ por mês, uma taxa mensal de crescimento de 2%.

Apresentação

1. Como montar uma dieta equilibrada para a perda de peso
2. Semigrupos e biologia
3. Um sistema presa-predador
4. Considerações finais e bibliografia

Por que estudar álgebra?

- **Por que é legal!**
- **Bônus**: É útil em diversas áreas!
- Como a arte, a Álgebra não precisa representar objetos ou coisas reais. Ao contrário, uma de suas marcas registradas é afastar-se da realidade. Pelo menos da realidade imediata.

Por que estudar álgebra?

- **Por que é legal!**
- **Bônus**: É útil em diversas áreas!
- Como a arte, a Álgebra não precisa representar objetos ou coisas reais. Ao contrário, uma de suas marcas registradas é afastar-se da realidade. Pelo menos da realidade imediata.

Por que estudar álgebra?

- **Por que é legal!**
- **Bônus**: É útil em diversas áreas!
- Como a arte, a Álgebra não precisa representar objetos ou coisas reais. Ao contrário, uma de suas marcas registradas é afastar-se da realidade. Pelo menos da realidade imediata.

Por que estudar álgebra?

- **Por que é legal!**
- **Bônus**: É útil em diversas áreas!
- Como a arte, a Álgebra não precisa representar objetos ou coisas reais. Ao contrário, uma de suas marcas registradas é afastar-se da realidade. Pelo menos da realidade imediata.

Referências

- Lay, David C. Álgebra Linear e suas aplicações, LTC, 1999.
- Lidl, Rudolf.; Pilz, Gunter. Applied Abstract Algebra, Springer, 1997.
- http://super.abril.com.br/cotidiano/aplicacoes-algebra-arte-inventar-mundo-440822.shtml

Obrigada pela atenção!

```
In[1]:= Exit[]

In[1]:= A = {{0.5, 0.4}, {-0.104, 1.1}}

Out[1]= {{0.5, 0.4}, {-0.104, 1.1}}

In[2]:= Eigenvalues[A]

Out[2]= {1.02, 0.58}

In[3]:= Eigenvectors[A]

Out[3]= {{-0.609711, -0.792624}, {-0.980581, -0.196116}}
```

```
N[-0.6097107608496924` / -0.7926239891046`]

Out[15]= 0.769231

In[5]:= Table[c = MatrixPower[A, i] . (15
                                        14), {i, 100}]

{{{13.100000000000001`}, {13.840000000000002`}},
 {{12.086`}, {13.861600000000001`}}, {{11.587640000000002`}, {13.990816000000002`}},
 {{11.390146400000004`}, {14.184783040000003`}},
 {{11.368986416000004`}, {14.418686118400007`}},
 {{11.45196765536`}, {14.678180142976007`}},
 {{11.597255884870403`}, {14.954993521116167`}},
 {{11.780625350881675`}, {15.244378261201263`}},
 {{11.98806397992134`}, {15.543631050829697`}},
 {{12.21148441029255`}, {15.851235502000849`}},
 {{12.446236405946612`}, {16.166364673530506`}},
 {{12.68966407238551`}, {16.488592554665114`}},
 {{12.940269058058801`}, {16.817726746603533`}},
 {{13.197225227670815`}, {17.153711439225773`}},
 {{13.460097189525719`}, {17.496571159470587`}},
 {{13.728677058551096`}, {17.846378167706966`}},
 {{14.002889796358334`}, {18.2032335703 8835`}},
 {{14.282738326334508`}, {18.567256388605927`}},
 {{14.568271718609628`}, {18.93857724152773`}},
 {{14.859566755915907`}, {19.3173347069451`}},
 {{15.156717260735995`}, {19.703673235024354`}},
 {{15.459827924377741`}, {20.097741963410254`}},
 {{15.769010747552972`}, {20.499694055615997`}},
 {{16.08438299602289`}, {20.909686343432092`}},
 {{16.40606603538428`}, {21.327879146188927`}},
 {{16.73418467616771`}, {21.75443619312785`}},
 {{17.068866815335`}, {22.1895246061192`}},
 {{17.410243250115172`}, {22.633314917936268`}},
 {{17.7584475922321`}, {23.085981111717917`}},
 {{18.113616240803225`}, {23.547700673297584`}},
 {{18.475888389720645`}, {24.018654651583812`}},
 {{18.845406055493843`}, {24.49902772421123`}},
 {{19.22231411743141`}, {24.989008266860996`}},
 {{19.60676036546011`}, {25.48878842533423`}},
 {{19.99889555286375`}, {25.998564189859803`}},
 {{20.398873452375803`}, {26.518535471347974`}},
 {{20.806850914727086`}, {27.048906179435683`}},
 {{21.222987929137823`}, {27.589884302247636`}},
 {{21.647447685467963`}, {28.14168198784206 3`}},
 {{22.080396637870813`}, {28.704515627337603`}},
```

```
{{22.52200456987044`}, {29.27860593973280 2`}},
```

```
{{56.00347082104055`}, {72.8045120673527З`}},
{{57.123540237461405`}, {74.26060230869983`}},
{{58.266011042210636`}, {75.74581435487384`}},
{{59.43133126305487`}, {77.26073064197132`}},
{{60.61995788831598`}, {78.80594525481077`}},
{{61.83235704608229`}, {80.382064159907`}},
{{63.06900418700395`}, {81.98970544310514`}},
{{64.33038427074402`}, {83.62949955196726`}},
{{65.6169919561589`}, {85.3020895430066`}},
{{66.92933179528214`}, {87.00813133386684`}},
{{68.26791843118781`}, {88.7482939605442`}},
{{69.63327679981157`}, {90.52325983975508`}},
{{71.02594233580783`}, {92.33372503655019`}},
{{72.44646118252398`}, {94.18039953728118`}}}
```

In[12]:=

```
N[13.100000000000001` / 13.840000000000002`]
```

Out[12]= 0.946532

In[13]:=

```
N[12.086` / 13.861600000000001`]
```

Out[13]= 0.871905

In[14]:=

```
N[12.446236405946612` / 16.166364673530506`]
```

Out[14]= 0.769885

In[11]:=

```
N[14.859566755915907` / 19.3173347069451`]
```

Out[11]= 0.769235

```
N[28.003281854484406` / 36.404266410826985`]
```

Out[10]= 0.769231

In[8]:=

```
72.4464611 / 94.1803995
```

Out[8]= 0.769231