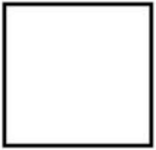
Simetrias, grupos de Lie e aplicações

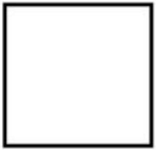
Igor Leite Freire

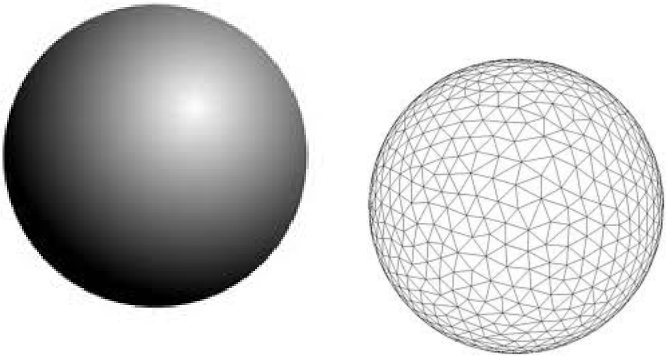
IV Workshop de Álgebra da UFG-CAC

10 de Junho de 2015

- Serão apresentadas algumas figuras. Escolha a que gosta mais:







- Se você escolheu mais opções da esquerda, provavelmente você é uma pessoa que gosta mais de simetria do que assimetria.

- Se você escolheu mais opções da esquerda, provavelmente você é uma pessoa que gosta mais de simetria do que assimetria.
- Pense em alguém que acha bonito fisicamente, qualquer pessoa. Como é o rosto dela? É assimétrico?

- Se você escolheu mais opções da esquerda, provavelmente você é uma pessoa que gosta mais de simetria do que assimetria.
- Pense em alguém que acha bonito fisicamente, qualquer pessoa. Como é o rosto dela? É assimétrico?
- Mais ainda: usualmente os humanos, nos processos de formação de casais, procuram parceiros que possuam rostos simétricos!

Há simetria na natureza

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

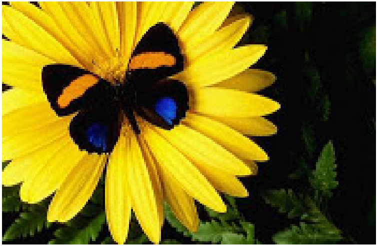


Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Fonte: http://3.bp.blogspot.com

Há simetrias nas construções

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

Figura : Imagem obtida no Google

- Afinal, o que é simetria?

- Afinal, o que é simetria?
- De acordo com o dicionário, simetria é:

- Afinal, o que é simetria?
- De acordo com o dicionário, simetria é:
- Qualidade de simétrico.

- Afinal, o que é simetria?
- De acordo com o dicionário, simetria é:
- Qualidade de simétrico.
- Proporção correta das partes de um corpo ou de um todo entre si, quanto a tamanho e forma.

- Sem preocupação em sermos rigorosos, ao menos agora, poderíamos definir, ingenuamente, que simetria é algo que é preservado, ou seja, é invariante em algum sentido.

- Sem preocupação em sermos rigorosos, ao menos agora, poderíamos definir, ingenuamente, que simetria é algo que é preservado, ou seja, é invariante em algum sentido.
- É amplamente utilizada em Ciência, particularmente, na Matemática.

- Sem preocupação em sermos rigorosos, ao menos agora, poderíamos definir, ingenuamente, que simetria é algo que é preservado, ou seja, é invariante em algum sentido.
- É amplamente utilizada em Ciência, particularmente, na Matemática.
- É intimamente relacionado a um importante conceito algébrico: **grupos**!

Grupos

- Em Matemática, podemos caracterizar um grupo da seguinte forma:

Grupos

- Em Matemática, podemos caracterizar um grupo da seguinte forma:
  1. Um primeiro ente, que consiste de um conjunto G **não-vazio**;

Grupos

- Em Matemática, podemos caracterizar um grupo da seguinte forma:
    1. Um primeiro ente, que consiste de um conjunto G **não-vazio**;
    2. Uma operação, digamos ϕ, que relaciona quaisquer dois elementos do conjunto com um terceiro.

Grupos

- Em Matemática, podemos caracterizar um grupo da seguinte forma:
  1. Um primeiro ente, que consiste de um conjunto G **não-vazio**;
  2. Uma operação, digamos ϕ, que relaciona quaisquer dois elementos do conjunto com um terceiro.
- Essa operação, todavia, deve satisfazer algumas propriedades, que são os axiomas de grupo.

Axiomas de Grupo

- **Fechamento**: Quais sejam $x, y \in G$, $\phi(x, y) \in G$.

Axiomas de Grupo

- **Fechamento**: Quais sejam $x, y \in G$, $\phi(x, y) \in G$.
- **Associatividade**: Quais sejam $x, y, z \in G$, $\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z))$.

Axiomas de Grupo

- **Fechamento**: Quais sejam $x, y \in G$, $\phi(x, y) \in G$.
- **Associatividade**: Quais sejam $x, y, z \in G$, $\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z))$.
- **Existência de uma identidade**: Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $x \in G$, $\phi(x, e) = \phi(e, x) = x$.

Axiomas de Grupo

- **Fechamento**: Quais sejam $x, y \in G$, $\phi(x, y) \in G$.
- **Associatividade**: Quais sejam $x, y, z \in G$, $\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z))$.
- **Existência de uma identidade**: Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $x \in G$, $\phi(x, e) = \phi(e, x) = x$.
- **Existência do inverso**: Para cada $x \in G$, existe $\tilde{x} \in G$ tal que $\phi(x, \tilde{x}) = \phi(\tilde{x}, x) = e$.

Axiomas de Grupo

- **Fechamento**: Quais sejam $x, y \in G$, $\phi(x, y) \in G$.
- **Associatividade**: Quais sejam $x, y, z \in G$, $\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z))$.
- **Existência de uma identidade**: Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $x \in G$, $\phi(x, e) = \phi(e, x) = x$.
- **Existência do inverso**: Para cada $x \in G$, existe $\tilde{x} \in G$ tal que $\phi(x, \tilde{x}) = \phi(\tilde{x}, x) = e$.
- No caso particular em que $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, dizemos que (G, ϕ) é um grupo comutativo ou abeliano.

Exemplos de grupos

- Considere $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, munido da operação $\phi(x, y) = x + y$. Então $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.

Exemplos de grupos

- Considere $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, munido da operação $\phi(x, y) = x + y$. Então $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.
- Considere o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+$ e $\phi(x, y) = xy$. Então $(\mathbb{R}_+, \phi)$ é um outro exemplo de grupo abeliano.

Exemplos de grupos

- Considere $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, munido da operação $\phi(x, y) = x + y$. Então $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.
- Considere o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+$ e $\phi(x, y) = xy$. Então $(\mathbb{R}_+, \phi)$ é um outro exemplo de grupo abeliano.
- Todos estes são exemplos de **grupos de Lie**.

Exemplos de grupos

- Considere $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, munido da operação $\phi(x, y) = x + y$. Então $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.
- Considere o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+$ e $\phi(x, y) = xy$. Então $(\mathbb{R}_+, \phi)$ é um outro exemplo de grupo abeliano.
- Todos estes são exemplos de **grupos de Lie**.
- Rotações de 90° de um quadrado.

Exemplos de grupos

- Considere $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, munido da operação $\phi(x, y) = x + y$. Então $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.
- Considere o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+$ e $\phi(x, y) = xy$. Então $(\mathbb{R}_+, \phi)$ é um outro exemplo de grupo abeliano.
- Todos estes são exemplos de **grupos de Lie**.
- Rotações de 90º de um quadrado.
- Seja $\Omega \neq \emptyset$ e G o conjunto de todas as bijeções $f : \Omega \to \Omega$. Se definirmos $\phi(f, g) = f \circ g$, então (G, ϕ) é um grupo, não necessariamente comutativo.

Grupos a 1-parâmetro (uniparamétricos)

- Considere a função $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y).$$

Grupos a 1-parâmetro (uniparamétricos)

- Considere a função $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y).$$

- Consideremos, ainda mais, o conjunto $G = \{T_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ e sejam T_ε e T_δ elementos de G.

Grupos a 1-parâmetro (uniparamétricos)

- Considere a função $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y).$$

- Consideremos, ainda mais, o conjunto $G = \{T_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ e sejam T_ε e T_δ elementos de G.
- Então

$$T_\varepsilon \circ T_\delta(x, y) = (x + \varepsilon + \delta, y) = T_{\varepsilon+\delta}(x, y).$$

Grupos a 1-parâmetro (uniparamétricos)

- Considere a função $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y).$$

- Consideremos, ainda mais, o conjunto $G = \{T_\varepsilon, \, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ e sejam T_ε e T_δ elementos de G.
- Então

$$T_\varepsilon \circ T_\delta(x, y) = (x + \varepsilon + \delta, y) = T_{\varepsilon+\delta}(x, y).$$

- Note que (G, ϕ) é um grupo, com propriedades similares a $(\mathbb{R}, +)$. Em particular as funções T_ε e sua inversa $T_{-\varepsilon}$ são bijeções (difeormorfismos).

- Note que o elemento T_ε de G depende continuamente do parâmetro real ε.

- Note que o elemento T_ε de G depende continuamente do parâmetro real ε.
- Cada elemento de G é caracterizado univocamente pelo parâmetro ε.

- Note que o elemento T_ε de G depende continuamente do parâmetro real ε.
- Cada elemento de G é caracterizado univocamente pelo parâmetro ε.
- Isso nos fornece um grupo contínuo a 1-parâmetro (ε).

- Note que o elemento T_ε de G depende continuamente do parâmetro real ε.
- Cada elemento de G é caracterizado univocamente pelo parâmetro ε.
- Isso nos fornece um grupo contínuo a 1-parâmetro (ε).
- Os elementos $T_\varepsilon \in G$ são chamadas simetrias, e o que é preservado é o domínio de cada uma dessas funções. No caso, $\mathbb{R}^2$.

Simetrias de equações diferenciais

- Essa mesma noção de simetria pode ser empregada para se encontrar soluções de equações diferenciais.

Simetrias de equações diferenciais

- Essa mesma noção de simetria pode ser empregada para se encontrar soluções de equações diferenciais.
- A ideia é procurar por algo que seja preservado. Neste caso, soluções de equações.

Simetrias de equações diferenciais

- Essa mesma noção de simetria pode ser empregada para se encontrar soluções de equações diferenciais.
- A ideia é procurar por algo que seja preservado. Neste caso, soluções de equações.
- Com isso, pode-se, além de outras possibilidades:

Simetrias de equações diferenciais

- Essa mesma noção de simetria pode ser empregada para se encontrar soluções de equações diferenciais.
- A ideia é procurar por algo que seja preservado. Neste caso, soluções de equações.
- Com isso, pode-se, além de outras possibilidades:
- Encontrar soluções especiais de uma determinada equação, chamadas soluções invariantes.

Simetrias de equações diferenciais

- Essa mesma noção de simetria pode ser empregada para se encontrar soluções de equações diferenciais.
- A ideia é procurar por algo que seja preservado. Neste caso, soluções de equações.
- Com isso, pode-se, além de outras possibilidades:
- Encontrar soluções especiais de uma determinada equação, chamadas soluções invariantes.
- A partir de uma solução qualquer, construir uma segunda, usando simetrias.

Simetrias de Lie

- Considere uma Equação Diferencial (ou um sistema) de ordem m, com n variáveis independente $x^1, \cdots, x^n$ e variável independente $u = u(x)$. Genericamente, tal ED é da forma

$$F(x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(m)}) = 0.$$

Simetrias de Lie

- Considere uma Equação Diferencial (ou um sistema) de ordem m, com n variáveis independente $x^1, \cdots, x^n$ e variável independente $u = u(x)$. Genericamente, tal ED é da forma

$$F(x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(m)}) = 0.$$

- Considere um conjunto de difeomorfismos locais em $\mathbb{R}^{n+1}$ dependendo de um parâmetro ε, $T_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, tais que $(x, u) \mapsto (\bar{x}, \bar{u})$, onde

- $\bar{x}^i = \bar{x}(x^i, u, \varepsilon)$, $\bar{u} = \bar{u}(x, y, \varepsilon)$ e $\bar{x}^i(x, y, 0) = x$, $\bar{u}(x, y, 0) = u$.

- $\bar{x}^i = \bar{x}(x^i, u, \varepsilon)$, $\bar{u} = \bar{u}(x, y, \varepsilon)$ e $\bar{x}^i(x, y, 0) = x$, $\bar{u}(x, y, 0) = u$.
- Fazendo uma expansão até primeira ordem

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^i(x, y, \varepsilon) &\approx \bar{x}^i(x, y, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= x^i + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

- $\bar{x}^i = \bar{x}(x^i, u, \varepsilon)$, $\bar{u} = \bar{u}(x, y, \varepsilon)$ e $\bar{x}^i(x, y, 0) = x$, $\bar{u}(x, y, 0) = u$.
- Fazendo uma expansão até primeira ordem

$$\begin{aligned} \bar{x}^i(x, y, \varepsilon) &\approx \bar{x}^i(x, y, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= x^i + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

- Analogamente, para $\bar{u}$, temos

$$\bar{u}(x, u, \varepsilon) \approx u + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{u}(x, u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

- $\bar{x}^i = \bar{x}(x^i, u, \varepsilon)$, $\bar{u} = \bar{u}(x, y, \varepsilon)$ e $\bar{x}^i(x, y, 0) = x$, $\bar{u}(x, y, 0) = u$.
- Fazendo uma expansão até primeira ordem

$$\begin{aligned} \bar{x}^i(x, y, \varepsilon) &\approx \bar{x}^i(x, y, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= x^i + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, y, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

- Analogamente, para $\bar{u}$, temos

$$\bar{u}(x, u, \varepsilon) \approx u + \varepsilon \left.\frac{\partial \bar{u}(x, u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

- Sejam

$$\xi^i(x, u) = \left.\frac{\partial \bar{x}^i(x, u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \eta(x, u) = \left.\frac{\partial \bar{u}(x, u, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

- O operador

$$X = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

é chamado gerador infinitesimal do grupo de transformações T_ε.

- O operador

$$X = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

  é chamado gerador infinitesimal do grupo de transformações T_ε.
- A transformação T_ε, que a princípio age no espaço das variáveis (x, u), induz transformações nas derivadas $u_{(1)},\ u_{(2)}, \cdots$

- O operador

$$X = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

  é chamado gerador infinitesimal do grupo de transformações T_ε.
- A transformação T_ε, que a princípio age no espaço das variáveis (x,u), induz transformações nas derivadas $u_{(1)},\ u_{(2)}, \cdots$
- Essas transformações são da forma

$$\bar{u}_{i_1\cdots i_k} \approx u_{i_1\cdots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\cdots,u_{(k)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \ 1 \leq k \leq m.$$

- O operador

$$X = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

é chamado gerador infinitesimal do grupo de transformações T_ε.

- A transformação T_ε, que a princípio age no espaço das variáveis (x, u), induz transformações nas derivadas $u_{(1)},\ u_{(2)}, \cdots$
- Essas transformações são da forma

$$\bar{u}_{i_1\cdots i_k} \approx u_{i_1\cdots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x, u, \cdots, u_{(k)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \ 1 \leq k \leq m.$$

- A transformação T_ε é uma **simetria** da ED $F = 0$ se

- O operador

$$X = \xi^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

  é chamado gerador infinitesimal do grupo de transformações T_ε.
- A transformação T_ε, que a princípio age no espaço das variáveis (x,u), induz transformações nas derivadas $u_{(1)},\ u_{(2)}, \cdots$
- Essas transformações são da forma

$$\bar{u}_{i_1\cdots i_k} \approx u_{i_1\cdots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1\cdots i_k}(x,u,\cdots,u_{(k)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \ 1 \leq k \leq m.$$

- A transformação T_ε é uma **simetria** da ED $F = 0$ se
- $X^{(n)}F = \lambda F$, ou seja, $X^{(n)}F$ se anula quando $F = 0$.

- O operador $X^{(n)}$ é chamado de extensão do operador X e é dado por

$$X^{(n)} = X + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \eta_{i_1\cdots i_n}^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}}.$$

- O operador $X^{(n)}$ é chamado de extensão do operador X e é dado por

$$X^{(n)} = X + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \eta_{i_1\cdots i_n}^{(n)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}}.$$

- Os coeficientes do gerador acima são dados por

$$\eta_{i_1\cdots i_j}^{(j)} := D_{i_j} \eta_{i_1\cdots i_{j-1}}^{(j-1)} - \sum_{k=1}^{n} u_{i_1\cdots i_k} D_{i_j} \xi^k, \;\; 1 \leq j \leq n,$$

onde

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \cdots ,$$

é chamado *operador derivação total*.

- Logo, para se encontrar uma simetria de uma equação, é preciso determinar quem são $\xi^i(x, u)$ e $\eta(x, u)$.

- Logo, para se encontrar uma simetria de uma equação, é preciso determinar quem são $\xi^i(x, u)$ e $\eta(x, u)$.
- Genericamente isso nos conduz ao seguinte problema: resolver um sistema sobredeterminado de equações diferenciais lineares envolvendo ξ e η.

- Logo, para se encontrar uma simetria de uma equação, é preciso determinar quem são $\xi^i(x,u)$ e $\eta(x,u)$.
- Genericamente isso nos conduz ao seguinte problema: resolver um sistema sobredeterminado de equações diferenciais lineares envolvendo ξ e η.
- Esse sistema surge da equação $X^{(n)}F = \lambda F$, quando $F = 0$, que é chamada *condição de invariância*.

Um exemplo de classificação de grupos

- Encontremos as simetrias da equação de Emden-Fowler de quarta-ordem
$$y'''' + ax^{\gamma}y^{p} = 0.$$

Um exemplo de classificação de grupos

- Encontremos as simetrias da equação de Emden-Fowler de quarta-ordem
$$y'''' + ax^{\gamma} y^{p} = 0.$$
- Assumiremos aqui que $a \neq 0$ e $p \notin \{0, 1\}$.

Um exemplo de classificação de grupos

- Encontremos as simetrias da equação de Emden-Fowler de quarta-ordem
$$y'''' + ax^\gamma y^p = 0.$$
- Assumiremos aqui que $a \neq 0$ e $p \notin \{0, 1\}$.
- Neste caso, $F = y'''' + ax^\gamma y^p$.

Um exemplo de classificação de grupos

- Encontremos as simetrias da equação de Emden-Fowler de quarta-ordem
$$y'''' + ax^{\gamma} y^{p} = 0.$$
- Assumiremos aqui que $a \neq 0$ e $p \notin \{0, 1\}$.
- Neste caso, $F = y'''' + ax^{\gamma} y^{p}$.
- Um gerador de simetrias para esta equação é da forma
$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Um exemplo de classificação de grupos

- Encontremos as simetrias da equação de Emden-Fowler de quarta-ordem
$$y'''' + ax^{\gamma}y^{p} = 0.$$
- Assumiremos aqui que $a \neq 0$ e $p \notin \{0, 1\}$.
- Neste caso, $F = y'''' + ax^{\gamma}y^{p}$.
- Um gerador de simetrias para esta equação é da forma
$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$
- Nesse caso particular, é possível mostrar que $\xi = \xi(x)$ e $\eta = \alpha(x)y + \beta(x)$.

- A condição de invariância, nesse caso, se resume a

$$\beta'''' + \alpha''''y + pa\beta x^{\gamma}y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma})y^{p}$$

$$+(4\alpha''' - \xi'''')y' + (6\alpha'' - 4\xi''')y'' + (4\alpha' - 6\xi'')y'''$$

$$+(\alpha - 4\xi')y'''' = \lambda(y'''' + ax^{\gamma}y^{p}).$$

- A condição de invariância, nesse caso, se resume a

$$\beta'''' + \alpha'''' y + pa\beta x^{\gamma} y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma})y^{p}$$

$$+(4\alpha''' - \xi'''')y' + (6\alpha'' - 4\xi''')y'' + (4\alpha' - 6\xi'')y'''$$

$$+(\alpha - 4\xi')y'''' = \lambda(y'''' + ax^{\gamma}y^{p}).$$

- Com isso, o sistema de equações que precisamos resolver é:

- $\beta'''' + \alpha'''' y + pa\beta x^{\gamma} y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma}) y^{p} = \lambda a x^{\gamma} y^{p}.$

- $\beta'''' + \alpha''''y + pa\beta x^{\gamma}y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma})y^{p} = \lambda a x^{\gamma}y^{p}$.
- $4\alpha''' - \xi'''' = 0$, $6\alpha'' - 4\xi''' = 0$, $4\alpha' - 6\xi'' = 0$, $\alpha - 4\xi' = \lambda$,

- $\beta'''' + \alpha'''' y + pa\beta x^{\gamma} y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma})y^{p} = \lambda a x^{\gamma} y^{p}$.
- $4\alpha''' - \xi'''' = 0$, $6\alpha'' - 4\xi''' = 0$, $4\alpha' - 6\xi'' = 0$, $\alpha - 4\xi' = \lambda$,
- Concluímos que $\xi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, $\alpha = 3c_2 x + \frac{3}{2}c_1 + k$ e

- $\beta'''' + \alpha''''y + pa\beta x^{\gamma}y^{p-1} + a(\gamma x^{\gamma-1}\xi + p\alpha x^{\gamma})y^{p} = \lambda a x^{\gamma}y^{p}$.
- $4\alpha''' - \xi'''' = 0$, $6\alpha'' - 4\xi''' = 0$, $4\alpha' - 6\xi'' = 0$, $\alpha - 4\xi' = \lambda$,
- Concluímos que $\xi = c_0 + c_1x + c_2x^2$, $\alpha = 3c_2x + \frac{3}{2}c_1 + k$ e
- $$\beta''''(x) + pax^{\gamma}\beta(x)y^{p-1} +$$
  $$a\left[\frac{5+3p}{2}c_1 + k(p-1) + (5+3p)c_2x\right]x^{\gamma}y^{p}$$
  $$+a\gamma(c_0 + c_1x + c_2x^2)x^{\gamma-1}y^{p} \equiv 0,$$
  onde c_0, c_1, c_2 e k são constantes arbitrárias.

- Resumindo, o que temos é:

$$X = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x} + [(3c_2 x + \frac{3}{2}c_1 + k)y + \beta]\frac{\partial}{\partial y},$$

- Resumindo, o que temos é:

$$X = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x} + [(3c_2 x + \frac{3}{2}c_1 + k)y + \beta]\frac{\partial}{\partial y},$$

- Resumindo, o que temos é:

$$X = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x} + [(3c_2 x + \frac{3}{2}c_1 + k)y + \beta]\frac{\partial}{\partial y},$$

- onde

$$\beta''''(x) + pax^{\gamma}\beta(x)y^{p-1} +$$

$$a\left[\frac{5+3p}{2}c_1 + k(p-1) + (5+3p)c_2 x\right]x^{\gamma}y^{p}$$

$$+a\gamma(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)x^{\gamma-1}y^{p} \equiv 0,$$

onde c_0, c_1, c_2 e k são constantes arbitrárias.

Geradores para os casos não-lineares

Resolvendo o sistema obtido a partir da identidade anterior, obtemos

p	γ	Geradores
$\forall$	$\neq 0, -(5+3p)$	$(1-p)x\partial_x + (4+\gamma)y\partial_y$
$p \neq -5/3$	$-(5+3p)$	$(p-1)x\partial_x + (3p+1)y\partial_y,$ $x^2\partial_x + 3xy\partial_y$
$\forall$	0	$\partial_x,\ (1-p)x\partial_x + 4y\partial_y$
$-5/3$	$\neq 0$	$x\partial_x + \dfrac{12+3\gamma}{8}y\partial_y$
$-5/3$	0	$\partial_x,\ x\partial_x + \dfrac{3}{2}y\partial_y,\ x^2\partial_x + 3xy\partial_y$

Tabela : Geradores da equação $y''''(x) + ax^\gamma y(x)^p = 0$ com $a \neq 0,\ p \neq 0, 1.$

Algumas observações

- É interessante observar o seguinte:

Algumas observações

- É interessante observar o seguinte:
- O sistema de equações determinantes nos dá, usualmente, uma combinação linear de soluções. Ou seja, as funções ξ^i e η são combinações lineares de várias soluções desse sistema.

Algumas observações

- É interessante observar o seguinte:
- O sistema de equações determinantes nos dá, usualmente, uma combinação linear de soluções. Ou seja, as funções ξ^i e η são combinações lineares de várias soluções desse sistema.
- Quando se substitui ξ^i, η em

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

obtemos uma combinação linear de operadores.

Algumas observações

- É interessante observar o seguinte:
- O sistema de equações determinantes nos dá, usualmente, uma combinação linear de soluções. Ou seja, as funções ξ^i e η são combinações lineares de várias soluções desse sistema.
- Quando se substitui ξ^i, η em

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

  obtemos uma combinação linear de operadores.
- O conjuntos desses operadores, munidos da operação

$$[X, Y] := XY - YX$$

  fornece uma *álgebra de Lie*.

- Conhecendo um gerador de simetria X, é possível encontrar as simetrias através da aplicação exponencial

$$T_\varepsilon(x, y) = e^{\varepsilon X}(x, u) = (e^{\varepsilon X} x, e^{\varepsilon} u).$$

- Conhecendo um gerador de simetria X, é possível encontrar as simetrias através da aplicação exponencial

$$T_\varepsilon(x,y) = e^{\varepsilon X}(x,u) = (e^{\varepsilon X}x, e^{\varepsilon}u).$$

- Por exemplo, mostramos que

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

é um gerador de simetrias para a equação de Emden-Fowler de quarta ordem.

- Conhecendo um gerador de simetria X, é possível encontrar as simetrias através da aplicação exponencial

$$T_\varepsilon(x, y) = e^{\varepsilon X}(x, u) = (e^{\varepsilon X} x, e^\varepsilon u).$$

- Por exemplo, mostramos que

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

é um gerador de simetrias para a equação de Emden-Fowler de quarta ordem.

- Neste caso,

$$e^{\varepsilon X} x = x + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X^i x = x + \varepsilon, \;\; e^{\varepsilon X} y = y + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X^i y = y.$$

- Conhecendo um gerador de simetria X, é possível encontrar as simetrias através da aplicação exponencial

$$T_\varepsilon(x, y) = e^{\varepsilon X}(x, u) = (e^{\varepsilon X}x, e^{\varepsilon}u).$$

- Por exemplo, mostramos que

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

é um gerador de simetrias para a equação de Emden-Fowler de quarta ordem.

- Neste caso,

$$e^{\varepsilon X}x = x + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X^i x = x + \varepsilon, \;\; e^{\varepsilon X}y = y + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X^i y = y.$$

- Assim, o grupo de simetrias é $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$.

Construção de soluções

- Mostraremos agora como construir uma solução da equação $y'''' + ax^{\gamma}y^{p} = 0$ a partir dos geradores de simetria.

Construção de soluções

- Mostraremos agora como construir uma solução da equação $y'''' + ax^\gamma y^p = 0$ a partir dos geradores de simetria.
- Sejam

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \; X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \; X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Construção de soluções

- Mostraremos agora como construir uma solução da equação $y'''' + ax^\gamma y^p = 0$ a partir dos geradores de simetria.
- Sejam

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \ X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Considere a seguinte combinação linear de geradores

$$X = \lambda X_1 + \epsilon X_2 + \delta X_3 = (\lambda + \varepsilon x + \delta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{3}{2}\varepsilon y + 3xy\delta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Construção de soluções

- Mostraremos agora como construir uma solução da equação $y'''' + ax^\gamma y^p = 0$ a partir dos geradores de simetria.
- Sejam

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Considere a seguinte combinação linear de geradores

$$X = \lambda X_1 + \epsilon X_2 + \delta X_3 = (\lambda + \varepsilon x + \delta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{3}{2}\varepsilon y + 3xy\delta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Da equação

$$\frac{dx}{\lambda + \varepsilon x + \delta x^2} = \frac{dy}{\frac{3}{2}\varepsilon y + 3xy\delta},$$

Construção de soluções

- Mostraremos agora como construir uma solução da equação $y'''' + ax^\gamma y^p = 0$ a partir dos geradores de simetria.
- Sejam

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Considere a seguinte combinação linear de geradores

$$X = \lambda X_1 + \epsilon X_2 + \delta X_3 = (\lambda + \varepsilon x + \delta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{3}{2}\varepsilon y + 3xy\delta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Da equação

$$\frac{dx}{\lambda + \varepsilon x + \delta x^2} = \frac{dy}{\frac{3}{2}\varepsilon y + 3xy\delta},$$

- Concluímos que

$$y = K(\lambda + \varepsilon x + \delta x^2)^{3/2}.$$

- Substituindo y na equação

$$y'''' + ay^{-\frac{5}{3}} = 0$$

- Substituindo y na equação

$$y'''' + ay^{-\frac{5}{3}} = 0$$

- concluímos que

$$y(x) = \left[\frac{-16a}{9(\epsilon^2 - 4\lambda\delta)^2}\right]^{3/8} (\lambda + \epsilon x + \delta x^2)^{3/2}.$$

- Substituindo y na equação

$$y'''' + ay^{-\frac{5}{3}} = 0$$

- concluímos que

$$y(x) = \left[\frac{-16a}{9(\epsilon^2 - 4\lambda\delta)^2}\right]^{3/8} (\lambda + \epsilon x + \delta x^2)^{3/2}.$$

- Essa expressão para y dá uma família a três parâmetros de soluções, desde que $\epsilon^2 - 4\lambda\delta \neq 0$.

- Substituindo y na equação

$$y'''' + ay^{-\frac{5}{3}} = 0$$

- concluímos que

$$y(x) = \left[\frac{-16a}{9(\epsilon^2 - 4\lambda\delta)^2}\right]^{3/8} (\lambda + \epsilon x + \delta x^2)^{3/2}.$$

- Essa expressão para y dá uma família a três parâmetros de soluções, desde que $\epsilon^2 - 4\lambda\delta \neq 0$.
- Isso nos mostra **como construir**, a partir do gerador de simetrias, uma **solução**.

- Agora utilizemos o fato que uma simetria **preserva** soluções, para construir uma **nova** solução partir de uma **solução conhecida**.

- Agora utilizemos o fato que uma simetria **preserva** soluções, para construir uma **nova** solução partir de uma **solução conhecida**.
- Tomemos como exemplo a equação de difusão

$$u_t = u_{xx}.$$

- Agora utilizemos o fato que uma simetria **preserva** soluções, para construir uma **nova** solução partir de uma **solução conhecida**.
- Tomemos como exemplo a equação de difusão

$$u_t = u_{xx}.$$

- Podemos provar que esta equação possui os geradores de simetria

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

- Estes geradores correspondem às seguintes transformações:

- Estes geradores correspondem às seguintes transformações:
- G_1: $e^{\varepsilon X_1}(x, t, u) = (x, t + \varepsilon, u)$, ou seja,

- Estes geradores correspondem às seguintes transformações:
- G_1: $e^{\varepsilon X_1}(x, t, u) = (x, t + \varepsilon, u)$, ou seja,
- $\bar{x} = x, \;\; \bar{t} = t + \varepsilon, \;\; \bar{u} = u.$

- Estes geradores correspondem às seguintes transformações:
- G_1: $e^{\varepsilon X_1}(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u)$, ou seja,
- $\bar{x} = x, \ \bar{t} = t + \varepsilon, \ \bar{u} = u.$
- G_2:

$$e^{\varepsilon X_2}(x,t,u) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}} \right),$$

cuja transformação é:

- Estes geradores correspondem às seguintes transformações:
- G_1: $e^{\varepsilon X_1}(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u)$, ou seja,
- $\bar{x} = x,\ \bar{t} = t+\varepsilon,\ \bar{u} = u.$
- G_2:

$$e^{\varepsilon X_2}(x,t,u) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\,e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}\right),$$

  cuja transformação é:
- $$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t},\ \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t},\ \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\,e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}$$

- Isso significa que se $u = f(x,t)$ é uma solução da equação $u_t = u_{xx}$, então $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$ é outra solução.

- Isso significa que se $u = f(x, t)$ é uma solução da equação $u_t = u_{xx}$, então $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$ é outra solução.
- A partir da transformação G_1, temos que $\bar{x} = x,\ \ \bar{t} = t + \varepsilon,\ \ \bar{u} = u.$

- Isso significa que se $u = f(x, t)$ é uma solução da equação $u_t = u_{xx}$, então $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$ é outra solução.
- A partir da transformação G_1, temos que $\bar{x} = x,\ \bar{t} = t + \varepsilon,\ \bar{u} = u$.
- Logo $u = f(x, t + \varepsilon)$ é outra solução.

- Analogamente, da transformação G_2 temos

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t}, \ \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t}, \ \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}.$$

- Analogamente, da transformação G_2 temos

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t}, \; \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t}, \; \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}.$$

- Substituindo essas expressões na relação $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$, concluímos que

- Analogamente, da transformação G_2 temos

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t}, \ \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t}, \ \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}.$$

- Substituindo essas expressões na relação $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$, concluímos que
- $$u\sqrt{1-4\varepsilon t}e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}} = f\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right).$$

- Analogamente, da transformação G_2 temos

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t},\ \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t},\ \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}.$$

- Substituindo essas expressões na relação $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$, concluímos que
-
$$u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}} = f\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right).$$

- De onde encontramos outra solução

$$u = \frac{e^{\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}}{\sqrt{1-4\varepsilon t}} f\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right).$$

- Analogamente, da transformação G_2 temos

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t}, \quad \bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t}, \quad \bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}.$$

- Substituindo essas expressões na relação $\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{t})$, concluímos que
- $$u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}} = f\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right).$$
- De onde encontramos outra solução

$$u = \frac{e^{\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}}{\sqrt{1-4\varepsilon t}} f\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right).$$

- Reforçando: $u = f(x,t)$ é uma solução conhecida da equação $u_t = u_{xx}$.

- Para construirmos uma solução explícita, note que $u = c = \mathit{constante}$ é uma solução da equação da difusão. Ou seja, neste caso, $f(x, t) = c$.

- Para construirmos uma solução explícita, note que $u = c = \mathit{constante}$ é uma solução da equação da difusão. Ou seja, neste caso, $f(x, t) = c$.
- Assim, como f é constante, e trocando $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$, obtemos

$$u = \frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right) = c\frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}.$$

- Para construirmos uma solução explícita, note que $u = c = \textit{constante}$ é uma solução da equação da difusão. Ou seja, neste caso, $f(x,t) = c$.
- Assim, como f é constante, e trocando $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$, obtemos

$$u = \frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right) = c\frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}.$$

- Isso significa que, para cada ε fixado,

$$u(x,t) = c\frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}$$

é uma solução de $u_t = u_{xx}$.

- Lembrando que da transformação G_1 as translações no tempo são simetrias. Fixado $\varepsilon > 0$, podemos fazer

$$t \mapsto t - \frac{1}{4\varepsilon}.$$

- Lembrando que da transformação G_1 as translações no tempo são simetrias. Fixado $\varepsilon > 0$, podemos fazer

$$t \mapsto t - \frac{1}{4\varepsilon}.$$

- Com essa mudança, nossa solução se torna

$$u(x,t) = c\frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon(t-\frac{1}{4\varepsilon})}}}{\sqrt{1+4\varepsilon(t-\frac{1}{4\varepsilon})}} = c\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\varepsilon t}}$$

- Lembrando que da transformação G_1 as translações no tempo são simetrias. Fixado $\varepsilon > 0$, podemos fazer

$$t \mapsto t - \frac{1}{4\varepsilon}.$$

- Com essa mudança, nossa solução se torna

$$u(x,t) = c\frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon(t-\frac{1}{4\varepsilon})}}}{\sqrt{1+4\varepsilon(t-\frac{1}{4\varepsilon})}} = c\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\varepsilon t}}$$

- Se escolhermos

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$$

obtemos a solução fundamental da equação da difusão

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Algumas observações

- Resumindo: a partir das simetrias, podemos construir soluções de equações.

Algumas observações

- Resumindo: a partir das simetrias, podemos construir soluções de equações.
- Usualmente as soluções vindas das simetrias tem propriedades muito especiais. Não à toa, alguns dizem que as simetrias mostram o DNA da equação.

Algumas observações

- Resumindo: a partir das simetrias, podemos construir soluções de equações.
- Usualmente as soluções vindas das simetrias tem propriedades muito especiais. Não à toa, alguns dizem que as simetrias mostram o DNA da equação.
- A partir das simetrias é possível construir outros invariantes associados à equação como, por exemplo, primeiras integrais ou leis de conservação.

Algumas observações

- Resumindo: a partir das simetrias, podemos construir soluções de equações.
- Usualmente as soluções vindas das simetrias tem propriedades muito especiais. Não à toa, alguns dizem que as simetrias mostram o DNA da equação.
- A partir das simetrias é possível construir outros invariantes associados à equação como, por exemplo, primeiras integrais ou leis de conservação.
- Mas isso é tema para outro seminário.

Algumas observações

- Resumindo: a partir das simetrias, podemos construir soluções de equações.
- Usualmente as soluções vindas das simetrias tem propriedades muito especiais. Não à toa, alguns dizem que as simetrias mostram o DNA da equação.
- A partir das simetrias é possível construir outros invariantes associados à equação como, por exemplo, primeiras integrais ou leis de conservação.
- Mas isso é tema para outro seminário.
- Fim!