

Prof. Dr. Jhone Caldeira
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
IME/UFG - jhone@ufg.br

A Aritmética da Sequência de Fibonacci

RESUMO

A Teoria dos Números e seus elementos nos permitem estudar diversas propriedades aritméticas bastante interessantes. Nesse minicurso, iremos abordar a *Sequência de Fibonacci*, buscando conhecer fatos importantes presentes em suas propriedades aritméticas e estabelecer uma conexão entre algumas propriedades especiais com a aritmética usual dos números naturais (inteiros).

1. INTRODUÇÃO

Fibonacci... foi assim que ficou conhecido o matemático Leonardo de Pisa (1180-1250) (significa filho de Bonaccio). Fibonacci foi considerado um notável e original matemático de sua época. Ficou muito conhecido devido a uma de suas obras *Liber Abaci* (1202), cuja tradução literal é *Livro do Ábaco*, em que buscava ensinar numerais indo-arábicos. Nesta obra, Fibonacci incluiu alguns problemas curiosos e interessantes, dentre os quais um se destacou:

"Um homem põe um casal adulto de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza dos coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Note que:

- ao final de um mês, haverá dois casais de coelhos, o casal adulto que fora introduzido no cercado e um jovem casal de coelhos nascidos;

- ao final do segundo mês (dois meses após o início da experiência), haverá três casais de coelhos, dois adultos e um casal jovem;

- ao final do terceiro mês, haverá cinco casais de coelhos, três casais adultos e dois casais jovens;

- ao final do quarto mês, haverá oito casais de coelhos, cinco casais adultos e três casais jovens.

E, assim, a criação de coelhos aumenta. Em geral, se ao final de um certo mês houver m casais de coelhos adultos e n casais de coelhos jovens, então ao final do mês seguinte haverá $m + n$ casais de coelhos adultos e m casais de coelhos jovens. Ao final do próximo mês, haverá $2m + n$ casais adultos e $m + n$ casais jovens.

Com isso, o número de casais jovens, ao final de certo mês, a partir do terceiro mês, será igual à soma dos números de casais jovens ao final dos dois meses anteriores.

Utilizaremos o processo de crescimento da quantidade de casais de coelhos jovens neste problema para apresentar uma sequência numérica conhecida por *Sequência de Fibonacci*. O nome Sequência de Fibonacci foi introduzido séculos depois que o problema fora proposto, pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891). Indicando por f_n o número de casais jovens ao final do n -ésimo mês, temos

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, & f_2 &= 1, & f_3 &= 1+1=2, & f_4 &= 2+1=3, \\ f_5 &= 3+2=5, & f_6 &= 5+3=8, & f_7 &= 8+5=13, \dots \end{aligned}$$

Assim, podemos ver esses *números de Fibonacci* como sendo os termos de uma sequência recursiva

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Esta sequência (f_n) tornou-se historicamente famosa, mas observe que o

problema dos coelhos nos permite também observar outra sequência (g_n) , referente ao número de casais de coelhos adultos. Vejamos uma relação entre o número de casais adultos com o número de casais de coelhos jovens: ao final do primeiro mês, há 1 casal de coelhos adultos (número de casais de coelhos jovens ao final do segundo mês); ao final do segundo mês, há dois casais adultos (número de casais jovens ao final do terceiro mês); ao final do terceiro mês, há três casais adultos (número de casais jovens ao final do quarto mês); ao final do quarto mês, há cinco casais adultos (número de casais jovens ao final do quinto mês) etc. Podemos ver que se g_n indica o número de casais de coelhos adultos ao final do n -ésimo, então vale a relação $g_n = f_{n+1}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$

Certamente a sequência de Fibonacci despertou toda a atenção que o fez por diversas propriedades interessantes e não tão somente devido à sua origem. Seu comportamento reflete uma aritmética rica em aplicações. Neste texto, apresentamos alguns resultados interessantes a respeito da aritmética da sequência de Fibonacci. Muitas discussões de cunho prático e contextualizado podem ser feitas e não é difícil encontrar exemplos da presença desta famosa sequência em aplicações (é um convite ao leitor realizar uma pesquisa a respeito dessas aplicações!). Eis alguns casos:

- em arranjos das folhas de ramos de plantas, em copas de árvores ou no número de pétalas de flores;

- em certos retângulos cujas medidas dos lados são termos consecutivos da sequência de Fibonacci pode-se notar que a razão entre o comprimento e a largura de cada retângulo vai tendendo ao número áureo $1,6180339887\dots$;

- em obras de arte, inclusive de Leonardo da Vinci;

- em análises de mercados financeiros e projeções de bolsas de valores;

- aplicações na Física, por exemplo, na óptica dos raios de luz;

- aplicações na Ciência da Computação e na Teoria dos Jogos.

2. A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A famosa sequência numérica

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \\ 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

é conhecida por *Sequência de Fibonacci*. A razão de ter este nome, bem como a sua origem, foram apresentadas na introdução deste texto. Os números que compõem esta sequência são conhecidos por *Números de Fibonacci*.

A sequência de Fibonacci é um caso particular do que chamamos sequências recorrentes:

Definição 1. Uma sequência de números inteiros em que a partir de um determinado termo cada um dos seguintes é determinado por meio de uma combinação linear (em $\mathbb{Z}$) de termos anteriores é chamada *sequência recorrente*. O processo pelo qual se determinam sucessivamente os termos da sequência é chamado *processo recorrente* ou *recursividade*.

Exemplo 1. São sequências recorrentes:

a) Seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$ uma sequência de números inteiros na qual cada termo, a partir do segundo, é o triplo do termo precedente, isto é, para todo $n \geq 2$:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1}.$$

Casos particulares:

i) Para $a_1 = 0$: $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

ii) Para $a_1 = 1$: $1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$

iii) Para $a_1 = -2$: $-2, -6, -18, -54, -162, -486, \dots$

b) Seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$ uma sequência de números inteiros na qual cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos precedentes, isto é, para todo $n \geq 3$:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Casos particulares:

i) Para $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

ii) Para $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$: -2, 1, -1, 0, -1, -1, -2, -3, -5, -8, ...

iii) Para $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (esta é a sequência de Fibonacci).

Notação.

Agora desejamos apresentar a sequência de Fibonacci seguindo uma notação particular:

A sequência

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13,$$

$$f_8 = 21, f_9 = 34, f_{10} = 55, f_{11} = 89,$$

$$f_{12} = 144, f_{13} = 233, f_{14} = 377, f_{15} = 610, f_{16} = 987, \dots$$

é definida pela recorrência

$$\begin{cases} f_1 = 1 \text{ e } f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \cdot f_3 &= f_2 + f_1 \\ \cdot f_4 &= f_3 + f_2 \\ \cdot f_5 &= f_4 + f_3 \\ &\vdots \\ \cdot f_{10} &= f_9 + f_8 . \end{aligned}$$

Trataremos o número f_n por *n-ésimo número de Fibonacci*. Assim, o primeiro e o segundo números de Fibonacci são iguais a 1, o 5º é igual a 5 e o 9º é igual a 34.

3. SOMAS DE NÚMEROS DE FIBONACCI

3.1. Soma dos n primeiros números de Fibonacci

Propriedade 1: A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $f_{n+2} - 1$.

Exemplo 2. Estamos afirmando que, no caso de somarmos os 10 primeiros números de Fibonacci, obteremos por resultado $f_{10+2} - 1 = f_{12} - 1 = 143$.

$$\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{5}, \boxed{8}, \boxed{13}, \boxed{21}, \boxed{34}, \boxed{55}, 89, \\ \boxed{144}, 233, 377, 610, 987, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 144 - 1.$$

Demonstração da Propriedade 1.

Note que, da definição, temos:

$$\begin{aligned}
 & \cdot f_1 = f_3 - f_2 \\
 & \cdot f_2 = f_4 - f_3 \\
 & \cdot f_3 = f_5 - f_4 \\
 & \quad \vdots \\
 & \cdot f_{n-1} = f_{n+1} - f_n \\
 & \cdot f_n = f_{n+2} - f_{n+1} .
 \end{aligned}$$

Somando,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1 .$$

□

3.2. Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices ímpares

Propriedade 2: A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices ímpares é igual a f_{2n} .

Exemplo 3. Estamos afirmando que, no caso de somarmos os 8 primeiros números de Fibonacci com índices ímpares, obteremos por resultado $f_{2 \cdot 8} = f_{16} = 987$.

$$\begin{aligned}
 & \boxed{1}, 1, \boxed{2}, 3, \boxed{5}, 8, \boxed{13}, 21, \boxed{34}, 55, \boxed{89}, \\
 & 144, \boxed{233}, 377, \boxed{610}, \boxed{987}, \dots
 \end{aligned}$$

$$S_8^{IMP} = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 + 610 = 987.$$

Demonstração da Propriedade 2.

Note que, da definição, temos:

$$\cdot \text{ Para } k = 1: \quad f_{2k-1} = f_1 = 1 = f_2$$

(1° número com índice ímpar)

$$\cdot \text{ Para } k = 2: \quad f_{2k-1} = f_3 = f_4 - f_2$$

(2° número com índice ímpar)

$$\cdot \text{ Para } k = 3: \quad f_{2k-1} = f_5 = f_6 - f_4$$

(3° número com índice ímpar)

$\vdots$

$$\cdot \text{ Para } k = n - 1: \quad f_{2k-1} = f_{2n-3} = f_{2n-2} - f_{2n-4}$$

((n - 1)° número com índice ímpar)

$$\cdot \text{ Para } k = n: \quad f_{2k-1} = f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$$

(n° número com índice ímpar).

Somando,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-3} + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

□

3.3. Soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares

Propriedade 3: A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares é igual a $f_{2n+1} - 1$.

Exemplo 4. Estamos afirmando que, no caso de somarmos os 7 primeiros números de Fibonacci com índices pares, obteremos por resultado $f_{2 \cdot 7+1} - 1 = f_{15} - 1 = 987$.

$$1, \boxed{1}, 2, \boxed{3}, 5, \boxed{8}, 13, \boxed{21}, 34, \boxed{55}, 89, \\ \boxed{144}, 233, \boxed{377}, \boxed{610}, 987, \dots$$

$$S_7^{PAR} = 1 + 3 + 8 + 21 + 55 + 144 + 377 = 609 = 610 - 1.$$

Demonstração da Propriedade 3.

Note que, da definição, temos:

- Para $k = 1$: $f_{2k} = f_2 = f_3 - f_1$
(1° número com índice par)
- Para $k = 2$: $f_{2k} = f_4 = f_5 - f_3$
(2° número com índice par)
- Para $k = 3$: $f_{2k} = f_6 = f_7 - f_5$
(3° número com índice par)
- $\vdots$
- Para $k = n - 1$: $f_{2k} = f_{2n-2} = f_{2n-1} - f_{2n-3}$
(($n - 1$)° número com índice par)
- Para $k = n$: $f_{2k} = f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1}$
(n ° número com índice par).

Somando,

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n-2} + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1 = f_{2n+1} - 1.$$

□

3.4. Soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci

Propriedade 4: A soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $f_n \cdot f_{n+1}$.

Exemplo 5. Estamos afirmando que, no caso de somarmos os quadrados dos 8 primeiros números de Fibonacci, obteremos por resultado $f_8 \cdot f_{8+1} = f_8 \cdot f_9 = 21 \times 34 = 714$.

$$\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{5}, \boxed{8}, \boxed{13}, \boxed{21}, \boxed{34}, 55, 89, \\ 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

$$S_8^Q = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 714 = 21 \times 34.$$

Demonstração da Propriedade 4.

Note que:

$$f_1 = f_2 = 1 \Rightarrow f_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2.$$

Agora, considere $r > 1$, $r \in \mathbb{N}$:

$$f_r \cdot f_{r+1} - f_{r-1} \cdot f_r = f_r \cdot \underbrace{(f_{r+1} - f_{r-1})}_{f_r} = f_r \cdot f_r = f_r^2,$$

donde

$$f_r^2 = f_r \cdot f_{r+1} - f_{r-1} \cdot f_r, \quad r > 1.$$

Assim,

$$\text{para } r = 2: \quad f_2^2 = f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2,$$

$$\text{para } r = 3: \quad f_3^2 = f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3,$$

$$\text{para } r = 4: \quad f_4^2 = f_4 \cdot f_5 - f_3 \cdot f_4 .$$

Continuando,

$$\text{para } r = n-1: \quad f_{n-1}^2 = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n-1} ,$$

$$\text{para } r = n: \quad f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n .$$

Somando,

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \cdots + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} .$$

□

4. IDENTIDADES ENVOLVENDO NÚMEROS DE FIBONACCI

4.1. Identidade envolvendo a soma de índices de números de Fibonacci

Propriedade 5: Para $m > 1, n \geq 1$: $f_{m+n} = f_{m-1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1}$.

Exemplo 6.

a) $f_{10} = f_{4+6} = f_3 \cdot f_6 + f_4 \cdot f_7$, ou seja, $55 = 2 \times 8 + 3 \times 13 = 16 + 39$.

$$1, 1, \overline{2}, \overline{3}, 5, \overline{8}, \overline{13}, 21, 34, \underline{55}, \dots$$

b) $f_{15} = f_{7+8} = f_6 \cdot f_8 + f_7 \cdot f_9$, ou seja, $610 = 8 \times 21 + 13 \times 34 = 168 + 442$.

$$1, 1, 2, 3, 5, \overline{8}, \overline{13}, \overline{21}, \overline{34}, 55, 89, 144, 233, 377, \underline{610}, 987, \dots$$

Demonstração da Propriedade 5.

Utilizaremos o Segundo Princípio de Indução Finita, aplicado a n .

Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 f_{m+1} &\stackrel{def}{=} f_{m-1} + f_m \\
 &= f_{m-1} \cdot 1 + f_m \cdot 1 \\
 &= f_{m-1} \cdot f_1 + f_m \cdot f_2 \\
 &= f_{m-1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Como hipótese de indução, suponhamos que a identidade é válida para todo $n < k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, e mostremos que a mesma vale para $n = k$. Desta forma, estamos supondo que a identidade vale para todo $n \in \{2, 3, \dots, k-1\}$.

Para $n = k-1$, temos:

$$\begin{aligned}
 f_{m+(k-1)} &= f_{m-1} \cdot f_{k-1} + f_m \cdot f_{(k-1)+1} \\
 &= f_{m-1} \cdot f_{k-1} + f_m \cdot f_k.
 \end{aligned}$$

Para $n = k-2$, temos:

$$\begin{aligned}
 f_{m+(k-2)} &= f_{m-1} \cdot f_{k-2} + f_m \cdot f_{(k-2)+1} \\
 &= f_{m-1} \cdot f_{k-2} + f_m \cdot f_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Somando,

$$\begin{aligned}
 f_{m+(k-1)} + f_{m+(k-2)} &= f_{m-1} \cdot (f_{k-1} + f_{k-2}) + f_m \cdot (f_k + f_{k-1}) \\
 &= f_{m-1} \cdot f_k + f_m \cdot f_{k+1}
 \end{aligned}$$

e esta é exatamente a identidade para $n = k$.

Portanto, a identidade é verdadeira para todos $n \geq 1$.

□

4.2. Identidade envolvendo o dobro de um índice de um número de Fibonacci

Propriedade 6: Para $n \geq 1$: $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$.

Exemplo 7. $f_8 = f_{2 \cdot 4} = f_{4+1}^2 - f_{4-1}^2 = f_5^2 - f_3^2$, ou seja, $21 = 5^2 - 2^2$.

1, 1, $\overline{2}$, 3, $\overline{5}$, 8, 13, $\boxed{21}$, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Demonstração da Propriedade 6.

É consequência imediata da Propriedade 5:

$$\begin{aligned} f_{2n} &= f_{n+n} = f_{n-1} \cdot f_n + f_n \cdot f_{n+1} \\ &= f_n \cdot (f_{n-1} + f_{n+1}) \\ &= (f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot (f_{n-1} + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2. \end{aligned}$$

□

4.3. Identidade envolvendo o quadrado de um número de Fibonacci

Propriedade 7: Para $n \geq 1$: $f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$.

Exemplo 8. $f_8^2 = 21^2 = 441 = f_{7+1}^2 = f_7 \cdot f_9 + (-1)^7 = 13 \times 34 + (-1)$.

1, 1, 2, 3, 5, 8, $\underline{13}$, $\boxed{21}$, $\underline{34}$, 55, 89, 144, 233, ...

A demonstração da Propriedade 7 é um exercício. Aplique o Primeiro Princípio de Indução Finita.

5. PROPRIEDADES ARITMÉTICAS ENVOLVENDO DIVISIBILIDADE E NÚMEROS DE FIBONACCI

Propriedade 8: Dois números de Fibonacci consecutivos são coprimos, isto é,

$$\text{para } n \geq 1: \text{mdc}(f_n, f_{n+1}) = 1.$$

Exemplo 9. É fácil verificar esta propriedade para os primeiros números na sequência

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Demonstração da Propriedade 8.

Utilizaremos o Algoritmo de Euclides, ou Processo das Divisões Sucessivas (ver Apêndice), para obter $d = \text{mdc}(f_n, f_{n+1}) = 1$. Este processo consiste em sucessivas aplicações do Algoritmo da Divisão (ver Apêndice).

Note que, se aplicarmos o Algoritmo da Divisão aos números f_{n+1} e f_n , existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $f_{n+1} = f_n \cdot q + r$ e $0 \leq r \leq f_n - 1$. Como, por definição, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, dada a unicidade, resta escrevermos $f_{n+1} = f_n \cdot 1 + f_{n-1}$.

$$\begin{array}{r} f_{n+1} \quad | \quad f_n \\ \hline - f_n \quad 1 \\ \hline f_{n-1} \end{array}$$

Analogamente,

- Dividindo-se f_n por f_{n-1} : $f_n = f_{n-1} \cdot 1 + f_{n-2}$;
- Dividindo-se f_{n-1} por f_{n-2} : $f_{n-1} = f_{n-2} \cdot 1 + f_{n-3}$;
- ⋮
- Dividindo-se f_5 por f_4 : $f_5 = f_4 \cdot 1 + f_3$;

· Dividindo-se f_4 por f_3 : $f_4 = f_3 \cdot 1 + f_2$;

· Dividindo-se f_3 por f_2 : $f_3 = f_2 \cdot 2 + 0$

(lembre-se que $f_3 = 2$ e $f_2 = f_1 = 1$).

Sendo o último resto não nulo obtido igual a f_2 , segue que $d = f_2 = 1$.

Portanto, os números f_{n+1} e f_n são coprimos.

(Observe que foram realizadas exatamente $n-1$ divisões!)

□

Propriedade 9: Para todos $m \geq 1, n \geq 1$, se $m \mid n$, então $f_m \mid f_n$.

Exemplo 10.

a) Como $3 \mid 6$, devemos ter $f_3 \mid f_6$. De fato, $f_3 = 2$ divide $f_6 = 8$.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

b) Como $4 \mid 12$, devemos ter $f_4 \mid f_{12}$. De fato, $f_4 = 3$ divide $f_{12} = 144$.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Demonstração da Propriedade 9.

Como $m \mid n$, existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $n = mq$. Agora procederemos a demonstração por indução (primeiro princípio) sobre q .

Se $q = 1$, então $n = m$, donde $f_n = f_m$ e o resultado é imediato.

Suponhamos o resultado válido para $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$. Assim, $n = mr$ e estamos supondo verdadeiro que $f_m \mid f_{mr}$.

Pela Propriedade 5, $f_{m(r+1)} = f_{mr+m} = f_{mr-1} \cdot f_m + f_{mr} \cdot f_{m+1}$.

Agora: claro que $f_m \mid f_{mr-1} \cdot f_m$ e de $f_m \mid f_{mr}$ segue que $f_m \mid f_{mr} \cdot f_{m+1}$.

Desta forma, f_m divide a soma $f_{mr-1} \cdot f_m + f_{mr} \cdot f_{m+1}$. Em símbolos, $f_m \mid (f_{mr-1} \cdot f_m + f_{mr} \cdot f_{m+1})$, que é exatamente o mesmo que $f_m \mid f_{m(r+1)}$. Isto significa que o resultado é válido para $r+1$ e, portanto, é válido para todo $q \in \mathbb{N}^*$.

□

Propriedade 10: Para todos $m \geq 1, n \geq 1$, $f_m \mid f_{mn}$.

A Propriedade 10 é consequência imediata da Propriedade 9.

Propriedade 11: Se $m = nq + r$, então $\text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_n, f_r)$.

Antes de exemplificarmos a Propriedade 11, vejamos uma de suas aplicações: se aplicarmos o Algoritmo da Divisão, dividindo-se m por n , então o mdc entre os números de Fibonacci tendo por índices *dividendo* e *divisor* é igual ao mdc entre os números de Fibonacci tendo por índices *divisor* e *resto*. Isto está de acordo com a propriedade que afirma: se $m = nq + r$ nas condições do Algoritmo da Divisão, então $\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(n, r)$ (ver Apêndice - Proposição 2).

Exemplo 11. Como $15 = 10 \cdot 1 + 5$, a Propriedade 11 afirma que

$$\text{mdc}(f_{15}, f_{10}) = \text{mdc}(610, 55) = 5 = \text{mdc}(55, 5) = \text{mdc}(f_{10}, f_5).$$

$$1, 1, 2, 3, \boxed{5}, 8, 13, 21, 34, \boxed{55}, 89, \\ 144, 233, 377, \boxed{610}, 987, \dots$$

Demonstração da Propriedade 11.

Pela Propriedade 5, $f_{nq+r} = f_{nq-1} \cdot f_r + f_{nq} \cdot f_{r+1}$. Assim,

$$\text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_{nq+r}, f_n) = \text{mdc}(f_{nq-1} \cdot f_r + f_{nq} \cdot f_{r+1}, f_n).$$

Usaremos a seguinte propriedade (ver Apêndice):

$$\text{se } b \mid c \text{ então } \text{mdc}(a+c, b) = \text{mdc}(a, b).$$

Uma vez que $f_n \mid f_{nq}$ (Propriedade 10), $f_n \mid f_{nq} \cdot f_{r+1}$, donde obtemos:

$$\text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_{nq-1} \cdot f_r, f_n).$$

Neste momento, mostremos que f_{nq-1} e f_n são coprimos, isto é, mostremos que $d = \text{mdc}(f_{nq-1}, f_n) = 1$. Sabemos que $d \mid f_n$ e $f_n \mid f_{nq}$, donde, por transitividade, $d \mid f_{nq}$. Agora, $d \mid f_{nq}$ e $d \mid f_{nq-1}$, mas f_{nq} e f_{nq-1} são números de Fibonacci consecutivos e, portanto, são coprimos, pela Propriedade 8. Logo, d divide $\text{mdc}(f_{nq}, f_{nq-1}) = 1$, donde $d = 1$.

Agora usaremos a seguinte propriedade (ver Apêndice):

$$\text{se } \text{mdc}(a, c) = 1, \text{ então } \text{mdc}(a, bc) = \text{mdc}(a, b).$$

Aplicando-a para:

$$\text{mdc}(f_{nq-1}, f_n) = 1 \text{ e } \text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_{nq-1} \cdot f_r, f_n),$$

obtemos

$$\text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_{nq-1} \cdot f_r, f_n) = \text{mdc}(f_r, f_n) = \text{mdc}(f_n, f_r),$$

como queríamos demonstrar.

□

Propriedade 12: O mdc entre dois números de Fibonacci é um número de Fibonacci e, ainda,

$$\text{se } d = \text{mdc}(m, n), \text{ então } \text{mdc}(f_m, f_n) = f_d = f_{\text{mdc}(m, n)}.$$

Exemplo 12. Como $4 = \text{mdc}(16, 12)$, a Propriedade 12 afirma que

$$\text{mdc}(f_{16}, f_{12}) = \text{mdc}(987, 144) = f_{\text{mdc}(16, 12)} = f_4 = 3.$$

$$1, 1, 2, \boxed{3}, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \\ \underline{144}, 233, 377, 610, \underline{987}, \dots$$

Demonstração da Propriedade 12.

Caso $n \mid m$.

Assim, $\text{mdc}(m, n) = n$. Pela Propriedade 9, $f_n \mid f_m$, donde

$$\text{mdc}(f_m, f_n) = f_n = f_{\text{mdc}(m, n)}.$$

Caso $n \nmid m$.

Sem perda de generalidade, suponhamos $m > n$. Primeiramente, obtenhamos o $\text{mdc}(m, n)$ pelo Algoritmo de Euclides e suponhamos que sejam necessárias as seguintes divisões:

- Dividindo-se m por n :

$$m = nq_1 + r_1, \quad q_1, r_1 \in \mathbb{N}, \quad 0 < r_1 < n;$$

- Dividindo-se n por r_1 :

$$n = r_1q_2 + r_2, \quad q_2, r_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 < r_2 < r_1 < n;$$

- Dividindo-se r_1 por r_2 :

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad q_3, r_3 \in \mathbb{N}, \quad 0 < r_3 < r_2 < r_1 < n;$$

$\vdots$

- Dividindo-se r_{k-2} por r_{k-1} :

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \quad q_k, r_k \in \mathbb{N}, \quad 0 < r_k < r_{k-1} < \dots < n;$$

· Dividindo-se r_{k-1} por r_k :

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0, \quad q_{k+1} \in \mathbb{N}, \quad r_{k+1} = 0.$$

Aplicando sucessivamente a Propriedade 11:

$$\begin{aligned} \text{mdc}(f_m, f_n) &= \text{mdc}(f_n, f_{r_1}) = \text{mdc}(f_{r_1}, f_{r_2}) \\ &= \text{mdc}(f_{r_2}, f_{r_3}) = \dots = \text{mdc}(f_{r_{k-1}}, f_{r_k}). \end{aligned}$$

Como $r_k \mid r_{k-1}$, segue que $f_{r_k} \mid f_{r_{k-1}}$ (Propriedade 9) e, assim,
 $\text{mdc}(f_{r_{k-1}}, f_{r_k}) = f_{r_k}$.

Agora, sendo r_k o último resto não nulo obtido pelo Algoritmo de Euclides aplicado a m e n , sabemos que $r_k = \text{mdc}(m, n)$.

Portanto,

$$\text{mdc}(f_m, f_n) = \text{mdc}(f_{r_{k-1}}, f_{r_k}) = f_{r_k} = f_{\text{mdc}(m, n)}.$$

□

Propriedade 13 (Recíproca da Propriedade 9): Para todos $n \geq 1, m \neq 2$, se $f_m \mid f_n$, então $m \mid n$.

Exemplo 13.

a) Note que $8 = f_6$ divide $144 = f_{12}$ e 6 divide 12.

$$1, 1, 2, 3, 5, \boxed{8}, 13, 21, 34, 55, 89, \\ \boxed{144}, 233, 377, 610, 987, \dots$$

b) Para $m = 2$ a Propriedade 13 não se verifica: $1 = f_2$ divide $13 = f_7$, mas 2 não divide 7.

$$1, \boxed{1}, 2, 3, 5, 8, \boxed{13}, 21, 34, 55, 89, \\ 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Demonstração da Propriedade 13.

Primeiramente, note que o caso em que $m = 1$ é óbvio, uma vez que $f_1 = 1$ e f_1 divide f_n , para todo $n \geq 1$, e 1 divide n , para todo $n \geq 1$.

Consideremos $m > 2$. Se $f_m \mid f_n$, então $\text{mdc}(f_m, f_n) = f_m$. Mas sabemos que $\text{mdc}(f_m, f_n) = f_{\text{mdc}(m,n)}$ (Propriedade 12). Logo, $f_m = f_{\text{mdc}(m,n)}$.

Da definição da sequência de Fibonacci, sendo $m > 2$, temos:

$f_m \geq 2$ e $f_{\text{mdc}(m,n)} \geq 2$ (ou seja, estamos com números localizados no mínimo na terceira posição da sequência), o que implica $m = \text{mdc}(m,n)$. Portanto, $m \mid n$.

□

6. CURIOSIDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

I. Números Primos e a Sequência de Fibonacci

Note que

$$f_3 = 2, \quad f_5 = 5, \quad f_7 = 13, \quad f_{11} = 89.$$

Nestes casos, f_p é um número primo, com p primo. Será que vale sempre?

A resposta é NÃO: $f_{19} = 4.181 = 37 \times 113$ é um número composto.

II. O Processo de Divisões Sucessivas, o mdc e a Sequência de Fibonacci

Sabemos que um método de se obter o mdc entre dois números naturais é dado pelo Algoritmo de Euclides, realizando divisões sucessivas. Há um resultado que nos permite saber o número máximo de divisões envolvidas nesse processo:

Resultado - Gabriel Lamé (1795-1870)

Sejam a e b dois números naturais. O número de divisões realizadas no Algoritmo de Euclides a fim de se obter o $\text{mdc}(a,b)$ nunca ultrapassa o quádruplo do número de algarismos do menor entre os números a e b .

Exemplo.

Para os naturais $a = 17.456$ e $b = 3.125$, o resultado de Lamé afirma que o $\text{mdc}(a,b)$ pode ser obtido com, no máximo, $4 \times 20 = 80$ divisões sucessivas.

O mdc entre Números de Fibonacci

A sequência de Fibonacci nos permite ver que para todo natural $n > 0$, existem naturais a e b tais que o número de divisões sucessivas na obtenção do $\text{mdc}(a,b)$ pelo Algoritmo de Euclides é exatamente n . A saber, basta considerar os números

$$a = f_{n+2} \text{ e } b = f_{n+1}.$$

Exemplo.

$$n = 1: \text{mdc}(f_3, f_2) = \text{mdc}(2,1) \text{ ----- } 1 \text{ divisão}$$

$$n = 2: \text{mdc}(f_4, f_3) = \text{mdc}(3,2) \text{ ----- } 2 \text{ divisões}$$

$$n = 3: \text{mdc}(f_5, f_4) = \text{mdc}(5,3) \text{ ----- } 3 \text{ divisões}$$

$$\vdots$$

$$\text{Propriedade 8: } n = k - 1: \text{mdc}(f_{k+1}, f_k) \text{ ----- } k - 1 \text{ divisões}$$

III. Critérios de Divisibilidade e Números de Fibonacci

- Um número de Fibonacci é divisível por 2 (é par) se, e somente se, seu índice é divisível por 3.
- Um número de Fibonacci é divisível por 3 se, e somente se, seu índice é divisível por 4.
- Um número de Fibonacci é divisível por 4 se, e somente se, seu índice é divisível por 6.
- Um número de Fibonacci é divisível por 5 se, e somente se, seu índice é divisível por 5.

Os critérios de divisibilidade também podem ser escritos na seguinte forma:

**f_n é divisível por 2, 3, 4, 5 se, e somente se,
 n é divisível por 3, 4, 6, 5, respectivamente.**

IV. A Fórmula de Binet

Podemos expressar o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci da seguinte maneira:

$f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, onde a e b são raízes da equação quadrática $x^2 = x + 1$,

isto é, $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

V. Números de Fibonacci obtidos por Divisões

Se r é o resto da divisão euclidiana de f_n por f_m ($n > m$), então r ou $f_m - r$ é um número de Fibonacci.

Exemplo.

Para $f_9 = 34$ e $f_7 = 13$: $34 = 13 \times 2 + 8 \Rightarrow r = 8 = f_6$.

Para $f_{11} = 89$ e $f_7 = 13$:

$$89 = 13 \times 6 + 11 \Rightarrow r = 11 \Rightarrow f_7 - r = 13 - 11 = 2 = f_3 .$$

No segundo caso, r não é um número de Fibonacci.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.
- [2] FILHO, Edgard de A. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo: Nobel, 2. ed., 1984.
- [3] GOMES, Olimpio R.; SILVA, Jhone C. *Estruturas Algébricas para Licenciatura: Introdução à Teoria dos Números*. Brasília: Ed. do Autor, 2008.

APÊNDICE

Os resultados que apresentamos aqui visam listar um aporte teórico básico para um método de obtenção do mdc entre dois números naturais, bem como algumas propriedades satisfeitas pelo mdc. As definições formais, bem como as demonstrações podem ser encontradas nas obras indicadas nas referências bibliográficas.

1. Teorema. *Algoritmo da Divisão - Versão para os Números Naturais*

Se a e b são dois naturais, então existem e são únicos os naturais q e r que satisfazem as seguintes condições

$$a = bq + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < b .$$

Os elementos a , b , q e r acima são chamados *dividendo*, *divisor*, *quociente* e *resto* na divisão euclidiana de a por b , respectivamente.

O resultado a seguir afirma, em particular, que nas condições do Algoritmo da Divisão, o mdc entre *dividendo* e *divisor* é igual ao mdc entre *divisor* e *resto*.

2. Proposição. Se $a = bq + r$, então $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,r)$.

A Proposição 2 é a chave para o método de obtenção do mdc que apresentamos. Ele consiste em aplicá-la sucessivamente em conjunto com o Algoritmo da Divisão.

3. *Algoritmo de Euclides ou Processo das Divisões Sucessivas*

Discutimos aqui um processo para calcular $\text{mdc}(a,b)$, para a e b naturais. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $\text{mdc}(a,b) = b$; se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $\text{mdc}(a,b) = a$. Assim, consideremos $a > 0$ e $b > 0$.

Iniciamos dividindo a por b (onde estamos supondo, sem perda de generalidade, $a > b$). Se $b \mid a$, então $\text{mdc}(a, b) = b$ e o processo está encerrado. Caso contrário, podemos escrever $a = bq_1 + r_1$, onde $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ e $0 < r_1 < b$. Pela Proposição 2, $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1)$.

Dividindo b por r_1 , se $r_1 \mid b$ então $\text{mdc}(b, r_1) = r_1 = \text{mdc}(a, b)$. Caso contrário, podemos escrever $b = r_1q_2 + r_2$, onde $q_2, r_2 \in \mathbb{N}$ e $0 < r_2 < r_1$. Pela Proposição 2, $\text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2)$.

Agora, dividindo r_1 por r_2 , se $r_2 \mid r_1$ então $\text{mdc}(r_1, r_2) = r_2 = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(a, b)$. Caso contrário, podemos escrever $r_1 = r_2q_3 + r_3$, onde $q_3, r_3 \in \mathbb{N}$ e $0 < r_3 < r_2$. Pela Proposição 2, $\text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(r_2, r_3)$.

Seguimos com o processo enquanto for possível. O $\text{mdc}(a, b)$ será o último resto não nulo obtido destas divisões sucessivas.

4. Duas propriedades do mdc

a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $b \mid c$, então $\text{mdc}(a + c, b) = \text{mdc}(a, b)$.

b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $\text{mdc}(a, c) = 1$, então $\text{mdc}(a, bc) = \text{mdc}(a, b)$.