V WORKSHOP DE ÁLGEBRA DA UFG-CAC

Minicurso: Teoria de Conjuntos e Técnicas de Demonstração

José dos Reis Moura Júnior / Kelvin Rodrigues Couto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS / INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS

Resumo

A matemática é um campo essencial do conhecimento humano, organizada segundo uma cadeia lógica de ideias. Pretendemos apresentar conceitos importantes encontrados em uma teoria matemática, tais como: axiomas ou postulados, hipotése, tese, condição suficiente e condição necessária. Discutiremos sobre algumas técnicas de demonstração, tais como demonstração: direta, por indução matemática, por construção, não construtiva, contrapositiva, visual, e por exaustão. Por fim, serão apresentados alguns paradigmas de linguagens de programação (Lógica, Funcional e Estruturada) e suas principais características para os principais tipos de demonstração matemáticas. Alguns exemplos de implementação nestas linguagens, além de introduzir os conceitos destas linguagens, complementa a compreensão dos potenciais usos de cada linguagem e formas de demonstração.

CONCEITOS IMPORTANTES

As proposições que não são verificadas como verdadeiras por outras proposições previamente estabelecidas como verdadeiras, são chamadas de axiomas ou postulados. Assim, um axioma é uma proposição considerada verdadeira sem prova. Um axioma é o que poderíamos dizer: "o início de uma teoria matemática".

Uma proposição é considerada verdadeira em uma teoria matemática, se ela é um axioma ou se deriva de um axioma, segundo regras de raciocínio lógico. Esse processo de "nascimento"de uma nova verdade em uma teoria matemática é o que chamamos de demonstração. Portanto, uma demonstração deduz uma proposição verdadeira em conformidade com regras de raciocínio lógico, segundo verdades anteriormente estabelecidas: axiomas, definições e teoremas anteriores.

A lógica proposicional e a lógica de predicados permite construir sistemas de regras de raciocínio para formular corretamente resultados deduzidos.

Para um bom domínio em matemática o estudante deve compreender o que é hipótese e o que é tese em um enunciado matemático. Por exemplo, consideremos a seguinte afirmação $AF1$:

$$a + b = 2 \Rightarrow 2a + 2b = 4 \tag{1}$$

Neste exemplo a proposição $P :=$"$a + b = 2$ "é a hipótese da afirmação $AF1$. E a proposição $Q :=$"$2a + 2b = 4$ "é a tese da afirmação $AF1$.

Em geral, poderíamos dizer que a hipótese é o que assumimos como verdade e a tese é aquilo o que queremos mostrar ou verificar.

A afirmação $AF1$ pode ser reescrita, segundo nossa notação, como: Se P, então Q. Uma vez demonstrada a afirmação $AF1$, dizemos que P é condição suficiente para Q. E dizemos que Q é condição necessária para P.

Em geral, uma condição Y é dita condição suficiente para X, se X sempre for verdadeira sempre que Y for verdadeira. E, dizemos que N é condição necessária para M, se M só tiver chance de ser verdadeira se N for verdadeira. Isto é, se N for falsa necessariamente M também será falsa.

Observamos que em nosso exemplo acima P é condição necessária e suficiente para Q e vice-versa.

Para esclarecer mais estes conceitos poderíamos pensar em outro exemplo simples: "Se um local é uma biblioteca, então neste local existem livros."

Veja que uma condição necessária para que um local seja considerado uma biblioteca é que existam livros neste local, mas não é qualquer lugar que existem livros que será uma biblioteca. Logo existir livros em um local é uma condição necessária (mas não suficiente) para que este local seja uma biblioteca.

Uma definição matemática é uma demarcação ou delimitação precisa, de um conceito. No desenvolvimento de uma teoria matemática é importante observar com cuidado o efeito das definições e axiomas, pois poderíamos mesmo desenvolver uma teoria que trabalhe em um conjunto vazio.

A seguir veremos algumas técnicas de demonstração.

TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

O homem pode avançar no campo do conhecimento matemático através da dedicação, trabalho, bom senso, rigor e sistematica revisão. Por meio do estudo de trabalhos matemáticos anteriores o homem pode enunciar novas conjecturas (suposições ainda sem provas), buscando demonstrar novos resultados matemáticos podemos lançar mãos de diversas técnicas, discutiremos algumas destas técnicas nesta seção:

Prova direta

Uma conclusão é estabelecida a partir de argumentação direta, por combinação lógica de axiomas, definições e teoremas mais simples.

Exemplo: Se n é par, então n^2 é par.

Demonstração: Neste caso temos a hipótese n é par. E a tese: n^2 é par.

Por definição de número par, temos que $n = 2k$, para algum k inteiro.

Logo, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Portanto, n^2 é par.

Prova por indução matemática

Enunciaremos o princípio da indução matemática ou princípio de indução finita, ou simplesmente princípio de indução no formato dado em [2], como um dos axiomas de Peano (istó é, um dos axiomas para a construção dos conjunto dos números naturais, para maiores informações veja [2]):

"Se X é um subconjunto do conjunto dos números naturais tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ temos $n + 1 \in X$, então X é o conjunto dos números naturais."

Observe que tal enunciado, pode ser reescrito da seguinte forma:

"Se uma propriedade P referente a números naturais é verdadeira para 1, e se sempre que for verdadeira para n pudermos concluir que é verdadeira para $(n + 1)$. Então P será verdadeira para todos os números naturais. "

Prova por construção

A prova exibe um exemplo diretamente ou um algoritmo que produz um exemplo.

Prova não construtiva

Mostra que um objeto matemático existe, mas sem fornecer um exemplo específico ou um algoritmo que exiba algum exemplo.

Exemplo: Existem números irracionais a e b, tais que a^b seja racional.

Demonstração: Admita o lema,(isto é, o resultado prévio a uma demonstração de um teorema, que neste caso é o próprio exemplo), que $\sqrt{2}$ seja irracional. Tome $a = b = \sqrt{2}$.

Sabemos que a^b é racional ou é irracional. Se é irracional, então não há mais o que fazer e a afirmação do exemplo está demonstrada.

Se a^b é irracional, então tomemos agora um novo a e b como sendo, $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$.

Então, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{4}} = \sqrt{2}^2 = 2.$. E, portanto, a^b seria racional.

Prova visual

É a prova que é baseada em elementos visuais, sem qualquer comentário.

Prova por exaustão

Em uma prova por exaustão estabelecemos nossa proposição dividindo o nosso problema em um número finito de casos e resolvendo cada um separadamente. Tais demonstrações costumam aparecer em alguns exercícios que envolvem grupos de Sylow. A primeira prova para o teorema das quatro cores foi por exaustão (com 1936 casos).

Referências

[1] Thierry Vialar. *Handbook of mathematics* BoD - Books on Demand, 2015.

[2] E. L. Lima. *Curso de Análise.* vol.1, 12a ed., 3a impressão. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.