ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS A GRUPOS PERIÓDICOS E GRUPOS DE EXPOENTE FINITO

Jhone Caldeira (UFG)

Alguns problemas relevantes envolvendo grupos periódicos e grupos de expoente finito têm sido discutidos desde 1902, quando em especial foi apresentado à comunidade matemática o Problema Geral de Burnside. Esse tema gerou grande interesse por parte de pesquisadores consolidados e norteou discussões muito profundas na Teoria de Grupos desde então. O impacto desse tema de pesquisa na Teoria de Grupos têm sido muito interessante sobretudo pela diversidade de técnicas desenvolvidas ou aplicadas na resolução de problemas envolvendo grupos com condições de Finitude, por exemplo, a teoria dos autômatas, a teoria dos grupos de permutações, técnicas de análise funcional, automorfismos de árvores, métodos lineares etc. Historicamente falando, as discussões convergiram ao famoso Problema Restrito de Burnside (PRB), cuja solução positiva obtida em 1989 por Efim Zelmanov, representou grande impacto no desenvolvimento de alguns temas da Teoria de Grupos. As técnicas utilizadas por Zelmanov em sua solução inspiraram a muitos outros investigadores e ainda hoje são aplicadas na resolução de problemas na Teoria de Grupos.

Um grupo G é dito periódico (ou de torção) se todo subgrupo cíclico de G é finito, ou seja, se todo elemento de G tem ordem finita. Um grupo G é dito localmente finito se todo subgrupo finitamente gerado de G é finito. Assim, todo grupo localmente finito é periódico. Já a recíproca disto é o que conhecemos como o Problema Geral de Burnside (1902). Essa questão permaneceu em aberto por algum tempo até que, em 1964, apareceu o primeiro contraexemplo. Essa tinha sido a primeira resposta negativa e outros contraexemplos surgiram por meio de diferentes técnicas, como citado anteriormente.

Quando as ordens dos elementos de G são finitas e limitadas, dizemos que G tem expoente finito. Assim, G tem expoente n se $x^n = 1$, para todo $x \in G$. Seja F_m o grupo livre com m geradores e consideremos N o subgrupo normal de F_m gerado pelo conjunto $\{x^n : x \in F_m\}$ (o subgrupo verbal correspondente à palavra $w(x) = x^n, x \in F_m$). Denotemos por $B(m, n)$ o quociente F_m/N , geralmente chamado de *Grupo Livre de Burnside m -gerado de expoente n* . Qualquer grupo G m -gerado de expoente n é uma imagem homomórfica de $B(m, n)$. Além disso, o grupo $B(m, n)$ é livre na variedade dos grupos de expoente n . Com essas considerações, outra versão do Problema Geral de Burnside surgiu e ficou conhecida como O Problema de Burnside: “É verdade que todo grupo de expoente n é localmente finito?” Equivalentemente, “É verdade que $B(m, n)$ é finito?”

Foram encontradas respostas afirmativas e negativas para essas perguntas e alguns grupos muito interessantes passaram a ser conhecidos nesse tema de investigação (e até mesmo foram construídos grupos especiais). Muitos pesquisadores se dedicaram à investigação da finitude ou não de $B(m, n)$, procurando descobrir quais valores de m e n levariam a grupos finitos e quais poderiam levar a grupos infinitos. Contudo, ainda há problemas em aberto.

A partir daí, outra pergunta surgiu: “Será que existe apenas um número finito de quocientes finitos não isomorfos de $B(m, n)$?” Em outras palavras, “será que dados inteiros $m, n \geq 2$, existe apenas um número finito de grupos m -gerados de expoente n que são finitos?” Essa questão ficou conhecida como O Problema Restrito de Burnside (PRB) e foi respondida afirmativamente em 1989 com um trabalho premiado de Efim Zelmanov.

Um grupo G é dito residualmente finito (nilpotente) se para todo $1 \neq g \in G$ existe $N_g \triangleleft G$ tal que $g \notin N_g$ e G/N_g é finito (nilpotente). Buscando discutir certas generalizações para o Problema Restrito de Burnside [2] discutimos os problemas abaixo. Atualmente é bem conhecido que a solução do PRB é equivalente a:

1. Um grupo residualmente finito de expoente n é localmente finito.
2. Um grupo residualmente nilpotente de expoente n é localmente nilpotente.

Denotamos por $w(G)$ o subgrupo verbal de G gerado por todos os w -valores. Os seguintes problemas generalizam o PRB:

3. Sejam $n \geq 1$ natural e w uma palavra. Seja G um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade $w^n \equiv 1$. O subgrupo verbal $w(G)$ é localmente finito?
4. Sejam $n \geq 1$ natural e w uma palavra. Seja G um grupo residualmente nilpotente satisfazendo a identidade $w^n \equiv 1$. O subgrupo verbal $w(G)$ é localmente nilpotente?

De acordo com o PRB, a resposta para cada problema é afirmativa no caso $w(x) = x$. Na verdade, a resposta é afirmativa para qualquer palavra w que não é do tipo comutador. A palavra w é chamada de comutador se a soma dos expoentes de cada variável envolvida em w é igual a zero. Dessa forma, (3) e (4) são essencialmente sobre palavras comutadores. Não é conhecido se eles são equivalentes, no entanto há respostas parciais nesse sentido [1,3,4,5].

Discutimos (3) e (4) para os casos de comutadores multilineares e comutadores não multilineares (os casos de palavras de Engel e outras palavras) [1,3,4,5]. Resultados mais recentes: problemas considerando valores de Engel em grupos profinitos; valores de Engel em grupos residualmente finitos. Há a perspectiva de explorar outras palavras não multilineares em grupos profinitos e grupos residualmente finitos.

Referências

- [1] J. Caldeira, P. Shumyatsky, *On Verbal Subgroups in Residually Finite Groups*, Bull. Austr. Math. Soc., 84, 2012.
- [2] P. Shumyatsky, *On varieties arising from the solution of the Restricted Burnside Problem*, J. Pure Appl. Alg. **171** (2002), 67 – 74.
- [3] P. Shumyatsky, J. C. Silva, *The Restricted Burnside Problem for Multilinear Commutators*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., v. 146, p. 603-613, 2009.
- [4] P. Shumyatsky, J. C. Silva, *Engel Words and the Restricted Burnside Problem*, Monatsh. Math., 2008.
- [5] P. Shumyatsky, J. C. Silva, *Varieties of Groups and the Restricted Burnside Problem*, Ischia Group Theory 2008, World Scientific, 2008.
- [6] E. Zelmanov, *The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent*. Math. USSR Izvestija **36** (1991), 41 – 60.