

Relações

Daniela de Oliveira Albanez

Relações Binárias

Na vida real, quando dizemos que duas pessoas, Maria e José, se relacionam, entendemos que Maria e José se distinguem dos demais pares de pessoas por haver uma relação que eles satisfazem ou verificam.

Ex. Maria e José são casados.

Maria e José são colegas de trabalho.

Maria e José não se entendem.

Maria manda em José.

Em matemática é análogo: distinguimos determinados pares de objetos dos demais porque seus elementos satisfazem alguma relação que os elementos dos demais pares, em geral, não satisfazem.

Notação: casado-com(Maria, José),	(Maria, casado-com, José)
mora-em(Maria, Campina Grande)	(Maria, mora-em, Campina Grande)

Relações Binárias

Dados dois conjuntos **A** e **B**

Uma relação **R** entre **A** e **B** é dada por

$$R \subseteq A \times B$$

$$B=A, \text{ então } R \subseteq A \times A$$

Relações Binárias

Ex.: Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{2,3\}$

Temos que $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

- Relação de igualdade: os elementos do par são iguais.

O único par do “universo” ($A \times B$) que satisfaz essa relação é $(2,2)$.

- Relação menor do que: isto é, primeiro elemento do par é menor do que o segundo.

Três pares se distinguem: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$.

Relações Binárias

Uma relação $R \subseteq A \times B$ pode ser representada:

- Lei de formação
- Diagrama de Venn
- Plano Cartesiano

Usaremos a notação **xRy** ou **$R(x,y)$** para indicar que o par ordenado (x,y) satisfaz ou pertence à relação R :

$$x Ry \Leftrightarrow (x,y) \in R.$$

Uma relação $R \subseteq A \times B$ também é denotada por $R(A \times B)$

Propriedades

Seja R uma relação binária em A .

→ R é reflexiva quando

xRx para todo $x \in A$.

→ R é simétrica quando

xRy se, e somente se yRx para todo x e $y \in A$.

→ R é transitiva quando,

xRy e yRz implica xRz para todo x, y e $z \in A$.

Relação de Equivalência

- Uma relação binária em um conjunto A que seja reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma relação de equivalência em A .

Exemplo 1

Seja $A=\{0, 1, 2, 3\}$ uma relação binária S definida por
 $S=\{(0,0), (0,2), (0,3), (2,3)\}$.

A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Exemplo 2

Seja $A=\{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como:
 $R=\{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$.
A propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva?

Exemplo 3

Seja R uma relação sobre o conjunto dos números reais de forma que aRb se e somente se, $a-b$ é um inteiro. R é uma relação de equivalência?

Congruência módulo um inteiro

Sejam A e B pertencentes aos números inteiros.

Dizemos que a é congruo a b módulo m se $m|a-b$. Isso quer dizer, que existe um k inteiro tal que $mk=a-b$.

Exemplo 4

Seja $m > 1$. Mostre que $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos inteiros.

Relembrando $a \equiv b$ se e somente se m divide $a - b$.

Exemplo 5

Dois triângulos são congruentes se os tamanhos de seus lados, quando dispostos em ordem crescente, são iguais. A congruência de triângulos é uma relação de equivalência no conjunto de todos os triângulos no plano.

Exemplo 6

Seja F o conjunto de todas as funções de R em R . Defina que fRg se e somente se existe uma constante c tal que $f(x) = g(x) + c$, para todo x . Então R é uma relação de equivalência.

Bibliografia

CAVALCANTE, G. D. C. Relações de Equivalência. Cin, IFPE.

GOUSSEVSKAIA, O. N. ; LOUREIRO, A. A. F. Relações. IFMG.

NETO, Lineu. Álgebra 1. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática, 2004.

PELLEGRINI, J. C. Relações de Equivalência e Ordem. Complemento pra a disciplina de Matemática Discreta, versão 1, 2013.