

Raciocínio Matemático: Técnicas de demonstração.

Thiago Castilho de Mello

Universidade Federal de São Paulo

Proposições

Esta afirmação é falsa!

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. *$x < 2$;*
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. *$x < 2$;*
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. *$x < 2$;*
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. *$x < 2$;*
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. *$x < 2$;*
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. $x < 2$;
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. $x < 2$;
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. $x < 2$;
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é VERDADEIRA ou FALSA mas não ambos.

Exemplos

1. *3 é um número par;*
2. *Igor é professor na UFG de Catalão;*
3. *Igor dá aulas à noite.*
4. *Existe vida inteligente fora da Terra;*
5. *Todo estudante da UFG é inteligente;*
6. $x < 2$;
7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$;*
8. *Você vai ao II Workshop de álgebra da UFG-CAC?*

Conectivos

- **Conectivos** conecta proposições para obter novas proposições.

Exemplos

1. p : Igor trabalha na UFG de Catalão
 q : Igor dá aulas à noite
 $p \wedge q$: Igor trabalha na UFG de Catalão e dá aulas a noite;
2. p : Existe vida inteligente fora da Terra
 $\sim p$: Não existe vida inteligente fora da Terra ;
3. p : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$;
 q : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
 r : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.
 $p \vee q \vee r$: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
4. p : Eu estudo na UFG
 q : Eu sou inteligente
 $p \longrightarrow q$: Se eu estudo na UFG, então eu sou inteligente.

Conectivos

- **Conectivos** conecta proposições para obter novas proposições.

Exemplos

1. p : Igor trabalha na UFG de Catalão
 q : Igor dá aulas à noite
 $p \wedge q$: Igor trabalha na UFG de Catalão e dá aulas a noite;
2. p : Existe vida inteligente fora da Terra
 $\sim p$: Não existe vida inteligente fora da Terra ;
3. p : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$;
 q : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
 r : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.
 $p \vee q \vee r$: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
4. p : Eu estudo na UFG
 q : Eu sou inteligente
 $p \longrightarrow q$: Se eu estudo na UFG, então eu sou inteligente.

Conectivos

- **Conectivos** conecta proposições para obter novas proposições.

Exemplos

1. p : Igor trabalha na UFG de Catalão
 q : Igor dá aulas à noite
 $p \wedge q$: Igor trabalha na UFG de Catalão e dá aulas a noite;
2. p : Existe vida inteligente fora da Terra
 $\sim p$: Não existe vida inteligente fora da Terra ;
3. p : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$;
 q : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
 r : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.
 $p \vee q \vee r$: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
4. p : Eu estudo na UFG
 q : Eu sou inteligente
 $p \longrightarrow q$: Se eu estudo na UFG, então eu sou inteligente.

Conectivos

- **Conectivos** conecta proposições para obter novas proposições.

Exemplos

1. p : Igor trabalha na UFG de Catalão
 q : Igor dá aulas à noite
 $p \wedge q$: Igor trabalha na UFG de Catalão e dá aulas a noite;
2. p : Existe vida inteligente fora da Terra
 $\sim p$: Não existe vida inteligente fora da Terra ;
3. p : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$;
 q : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
 r : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$.
 $p \vee q \vee r$: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
4. p : Eu estudo na UFG
 q : Eu sou inteligente
 $p \longrightarrow q$: Se eu estudo na UFG, então eu sou inteligente.

Conectivos

Os conectivos mais usados são:

Símbolo	Conectivo
$p \wedge q$	p e q
$p \vee q$	p ou q
$\sim p$	não p
$\longrightarrow$	se p então q
$\longleftrightarrow$	p se e somente se q

Conectivos

Exemplos

Supondo p verdadeira e q e r falsas, temos:

- ▶ $\sim p$ é falsa;
- ▶ $\sim q$ é verdadeira;
- ▶ $p \wedge q$ é falsa;
- ▶ $p \vee q$ é verdadeira;
- ▶ $p \longrightarrow q$ é falsa;
- ▶ $q \longrightarrow p$ é verdadeira;
- ▶ $q \longleftrightarrow r$ é verdadeira;
- ▶ $q \vee r \vee (p \wedge q)$ é falsa;

Tabelas-verdade

- Uma **tabela-verdade** consiste de uma tabela com os valores de uma proposição composta em função dos valores das proposições que a compõem.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Tabelas-verdade

- Uma **tabela-verdade** consiste de uma tabela com os valores de uma proposição composta em função dos valores das proposições que a compõem.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Tabelas-verdade

- Uma **tabela-verdade** consiste de uma tabela com os valores de uma proposição composta em função dos valores das proposições que a compõem.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Tabelas-verdade

- Uma **tabela-verdade** consiste de uma tabela com os valores de uma proposição composta em função dos valores das proposições que a compõem.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Tabelas-verdade

- Uma **tabela-verdade** consiste de uma tabela com os valores de uma proposição composta em função dos valores das proposições que a compõem.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Contradição

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Tautologia

Tabelas-verdade

Exemplos

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

- Duas proposições são **logicamente equivalentes**, se elas têm a mesma tabela verdade.

Tabelas-verdade

Exemplos

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

- Duas proposições são **logicamente equivalentes**, se elas têm a mesma tabela verdade.

Tabelas-verdade

Exemplos

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

- Duas proposições são **logicamente equivalentes**, se elas têm a mesma tabela verdade.

Equivalência lógica

Exemplo

Uma pessoa nos diz:

$$\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \neq \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 e^x dx \neq e \text{"}$$

Outra pessoa nos diz:

"Não é verdade que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \int_0^1 e^x dx = e \text{"}$$

Ambas nos dizem o mesmo!

Equivalência lógica

Exemplo

Uma pessoa nos diz:

$$\text{“} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \neq \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 e^x dx \neq e \text{”}$$

Outra pessoa nos diz:

“Não é verdade que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \int_0^1 e^x dx = e \text{”}$$

Ambas nos dizem o mesmo!

Equivalência lógica

Exemplo

Uma pessoa nos diz:

$$\text{“} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \neq \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 e^x dx \neq e \text{”}$$

Outra pessoa nos diz:

“Não é verdade que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad \int_0^1 e^x dx = e \text{”}$$

Ambas nos dizem o mesmo!

Equivalência lógica

- Se p e q são duas proposições logicamente equivalentes, então $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia (sua tabela verdade só contém V).

Exemplo

As proposições $p \longrightarrow q$ e $\sim q \longrightarrow \sim p$ são logicamente equivalentes.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Equivalência lógica

- Se p e q são duas proposições logicamente equivalentes, então $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia (sua tabela verdade só contém V).

Exemplo

As proposições $p \longrightarrow q$ e $\sim q \longrightarrow \sim p$ são logicamente equivalentes.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Implicação e equivalência lógica

- Se p e q são proposições tais que $p \longrightarrow q$ é uma tautologia, então dizemos que $p \longrightarrow q$ é uma implicação lógica, e escrevemos $p \implies q$.
- Se p e q são logicamente equivalentes, escrevemos $p \iff q$.
- Um **Teorema** é uma proposição lógica que é uma tautologia.

Exemplos

- $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
- $\sim (p \longrightarrow q) \iff (p \wedge \sim q)$.

Implicação e equivalência lógica

- Se p e q são proposições tais que $p \longrightarrow q$ é uma tautologia, então dizemos que $p \longrightarrow q$ é uma implicação lógica, e escrevemos $p \implies q$.
- Se p e q são logicamente equivalentes, escrevemos $p \iff q$.
- Um **Teorema** é uma proposição lógica que é uma tautologia.

Exemplos

- $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
- $\sim (p \longrightarrow q) \iff (p \wedge \sim q)$.

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p$.
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p$.
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p.$
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p.$
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p.$
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p.$
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p$.
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p.$
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p$.
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\implies$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \implies p$
2. *Transitiva* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \implies (p \longrightarrow r)$
3. *Simplificação* $p \wedge q \implies p$.
4. *Adição* $p \implies p \vee q$
5. *Modus Ponens* $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \implies q$
6. *Modus Tollens* $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \implies \sim p$
7. *Reduction ad absurdum* $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \implies p$
8. *Simetria* $(p \longleftrightarrow q) \implies (q \longleftrightarrow p)$
9. *Transitiva* $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \implies (p \longleftrightarrow r)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. Reflexiva $p \iff p$
2. Dupla negação $\sim (\sim p) \iff p$
3. Lei de De Morgan $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. Lei de De Morgan $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. Negação da condicional $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. Negação da bicondicional
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. Contra-positiva $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. Distributividade $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. Distributividade $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. Bi-condicional $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. Reflexiva $p \iff p$
2. Dupla negação $\sim (\sim p) \iff p$
3. Lei de De Morgan $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. Lei de De Morgan $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. Negação da condicional $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. Negação da bicondicional
 $\sim (p \iff q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. Contra-positiva $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. Distributividade $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. Distributividade $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. Bi-condicional $p \iff q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Propriedades de $\iff$

Teorema

1. *Reflexiva* $p \iff p$
2. *Dupla negação* $\sim (\sim p) \iff p$
3. *Lei de De Morgan* $\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$
4. *Lei de De Morgan* $\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
5. *Negação da condicional* $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$
6. *Negação da bicondicional*
 $\sim (p \longleftrightarrow q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
7. *Contra-positiva* $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.
8. *Distributividade* $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. *Distributividade* $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. *Bi-condicional* $p \longleftrightarrow q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

- A afirmação $x + y = 5$ é uma sentença aberta (não é uma proposição).
- Existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 5$ é uma proposição VERDADEIRA.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 5$ é uma proposição FALSA.
- Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.
- Existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ acima são chamados de **domínio de discussão** ou **universo**.

Se $p(x)$ é uma sentença que depende da variável x , podemos usar os quantificadores para expressar quando $p(x)$ é satisfeita.

$\forall$: Quantificador Universal: $\forall x, p(x)$.

$\exists$: Quantificador Existencial: $\exists x, p(x)$.

Quantificadores

Exemplo (Função Contínua)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se a seguinte afirmação é verdadeira: “para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que Se $|y - x| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ”.

E podemos enunciar a afirmação como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Como negar proposições com quantificadores??

$$\sim (\forall x, p(x)) \iff \exists x, \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x, p(x)) \iff \forall x, \sim p(x).$$

Como negar: $\forall x, \exists y, \forall z, p(x, y, z)$?

Quantificadores

Exemplo (Função Contínua)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se a seguinte afirmação é verdadeira: “para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que Se $|y - x| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ”.

E podemos enunciar a afirmação como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Como negar proposições com quantificadores??

$$\sim (\forall x, p(x)) \iff \exists x, \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x, p(x)) \iff \forall x, \sim p(x).$$

Como negar: $\forall x, \exists y, \forall z, p(x, y, z)$?

Quantificadores

Exemplo (Função Contínua)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se a seguinte afirmação é verdadeira: “para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que Se $|y - x| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ”.

E podemos enunciar a afirmação como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Como negar proposições com quantificadores??

$$\sim (\forall x, p(x)) \iff \exists x, \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x, p(x)) \iff \forall x, \sim p(x).$$

Como negar: $\forall x, \exists y, \forall z, p(x, y, z)$?

Quantificadores

Exemplo (Função Contínua)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ se a seguinte afirmação é verdadeira: “para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que Se $|y - x| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ”.

E podemos enunciar a afirmação como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Como negar proposições com quantificadores??

$$\sim (\forall x, p(x)) \iff \exists x, \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x, p(x)) \iff \forall x, \sim p(x).$$

Como negar: $\forall x, \exists y, \forall z, p(x, y, z)$?

Exemplos e contra-exemplos

- O conjunto dos elementos do universo que tornam uma sentença aberta uma proposição verdadeira é denominado **conjunto-verdade**.
- Um **exemplo** para $p(x)$ é um x do universo que está no conjunto-verdade.
- Um **contra-exemplo** para $p(x)$ é um x do universo que não está no conjunto-verdade.

Método Dedutivo

- A **demonstração** de um teorema é uma verificação de que a proposição dada é uma tautologia.
- Utilizamos tabelas-verdade.
- Alternativa: Utilização das propriedades de $\implies$ e $\iff$.

Método Dedutivo

Exemplo

Considere as afirmações:

H_1 : *Tempo é dinheiro.*

H_2 : *Quem não trabalha tem tempo.*

T : *Quem não trabalha tem dinheiro.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ *é um teorema?*

Sim, vamos demonstrá-lo:

Vamos considerar as proposições:

p : *"tem tempo"*

q : *"tem dinheiro"*

r : *"não trabalha"*

Temos que $H_1 : p \longrightarrow q$, $H_2 : r \longrightarrow p$ e $T : r \longrightarrow q$.

$H_1 \wedge H_2 : (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow p) \implies r \longrightarrow q$ e provamos o teorema.

Método Dedutivo

Exemplo

Considere as afirmações:

H_1 : *Tempo é dinheiro.*

H_2 : *Quem não trabalha tem tempo.*

T : *Quem não trabalha tem dinheiro.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ *é um teorema?*

Sim, vamos demonstrá-lo:

Vamos considerar as proposições:

p : *“tem tempo”*

q : *“tem dinheiro”*

r : *“não trabalha”*

Temos que $H_1 : p \longrightarrow q$, $H_2 : r \longrightarrow p$ e $T : r \longrightarrow q$.

$H_1 \wedge H_2 : (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow p) \implies r \longrightarrow q$ e provamos o teorema.

Método Dedutivo

Exemplo

Considere as afirmações:

H_1 : *Tempo é dinheiro.*

H_2 : *Quem não trabalha tem tempo.*

T : *Quem não trabalha tem dinheiro.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ *é um teorema?*

Sim, vamos demonstrá-lo:

Vamos considerar as proposições:

p : *“tem tempo”*

q : *“tem dinheiro”*

r : *“não trabalha”*

Temos que $H_1 : p \longrightarrow q$, $H_2 : r \longrightarrow p$ e $T : r \longrightarrow q$.

$H_1 \wedge H_2 : (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow p) \implies r \longrightarrow q$ e provamos o teorema.

Método Dedutivo

Exemplo

Considere as afirmações:

H_1 : *Tempo é dinheiro.*

H_2 : *Quem não trabalha tem tempo.*

T : *Quem não trabalha tem dinheiro.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ *é um teorema?*

Sim, vamos demonstrá-lo:

Vamos considerar as proposições:

p : *“tem tempo”*

q : *“tem dinheiro”*

r : *“não trabalha”*

Temos que $H_1 : p \longrightarrow q$, $H_2 : r \longrightarrow p$ e $T : r \longrightarrow q$.

$H_1 \wedge H_2 : (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow p) \implies r \longrightarrow q$ e provamos o teorema.

Método Dedutivo

Exemplo

H_1 : *Penso, logo existo.*

H_2 : *Pedras não pensam.*

T : *Pedras não existem.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ *é um teorema?*

“existe uma pedra que não pensa”. Logo, temos um contra-exemplo.

Logo, não é um teorema.

Exemplo

“Para todo inteiro positivo n , o valor $\phi(n) = n^2 - n + 41$ é um número primo?”

Método Dedutivo

Exemplo

H_1 : *Penso, logo existo.*

H_2 : *Pedras não pensam.*

T : *Pedras não existem.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ é um teorema?

“existe uma pedra que não pensa”. Logo, temos um contra-exemplo.

Logo, não é um teorema.

Exemplo

“Para todo inteiro positivo n , o valor $\phi(n) = n^2 - n + 41$ é um número primo?”

Método Dedutivo

Exemplo

H_1 : *Penso, logo existo.*

H_2 : *Pedras não pensam.*

T : *Pedras não existem.*

$H_1 \wedge H_2 \implies T$ é um teorema?

“existe uma pedra que não pensa”. Logo, temos um contra-exemplo.

Logo, não é um teorema.

Exemplo

“Para todo inteiro positivo n , o valor $\phi(n) = n^2 - n + 41$ é um número primo?”

Métodos de Demonstração

- Demonstração direta.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $p \implies q$.
- Demonstração por contraposição.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $\sim q \implies \sim p$.
- Prova por contradição (ou redução ao absurdo).
 - Utiliza a implicação lógica
 $((p \wedge \sim q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)) \implies (p \longrightarrow q)$.

Métodos de Demonstração

- Demonstração direta.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $p \implies q$.
- Demonstração por contraposição.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $\sim q \implies \sim p$.
- Prova por contradição (ou redução ao absurdo).
 - Utiliza a implicação lógica
 $((p \wedge \sim q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)) \implies (p \longrightarrow q)$.

Métodos de Demonstração

- Demonstração direta.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $p \implies q$.
- Demonstração por contraposição.
 - Utiliza o método dedutivo para provar que $\sim q \implies \sim p$.
- Prova por contradição (ou redução ao absurdo).
 - Utiliza a implicação lógica
$$((p \wedge \sim q) \longrightarrow (r \wedge \sim r)) \implies (p \longrightarrow q).$$

Demonstração Direta

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro par. Então n^2 é par.

Demonstração: *Se n é par, então $n = 2k$, para algum inteiro k .
Então $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, n^2 é também par.*

Exercício

Seja n um número inteiro ímpar. Então n^2 é ímpar.

Demonstração Direta

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro par. Então n^2 é par.

Demonstração: *Se n é par, então $n = 2k$, para algum inteiro k . Então $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, n^2 é também par.*

Exercício

Seja n um número inteiro ímpar. Então n^2 é ímpar.

Demonstração Direta

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro par. Então n^2 é par.

Demonstração: *Se n é par, então $n = 2k$, para algum inteiro k . Então $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, n^2 é também par.*

Exercício

Seja n um número inteiro ímpar. Então n^2 é ímpar.

Deemonstração por Contraposição

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração:

Suponha que n não seja ímpar. Então n é par. Pelo teorema anterior, n^2 é par.

Exercício

Seja n um número inteiro. Se n^2 é par, então n é par.

Corolario

O inteiro m é ímpar se e somente se m^2 é ímpar.

Deemonstração por Contraposição

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração:

Suponha que n não seja ímpar. Então n é par. Pelo teorema anterior, n^2 é par.

Exercício

Seja n um número inteiro. Se n^2 é par, então n é par.

Corolario

O inteiro m é ímpar se e somente se m^2 é ímpar.

Deemonstração por Contraposição

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração:

Suponha que n não seja ímpar. Então n é par. Pelo teorema anterior, n^2 é par.

Exercício

Seja n um número inteiro. Se n^2 é par, então n é par.

Corolario

O inteiro m é ímpar se e somente se m^2 é ímpar.

Deemonstração por Contraposição

Exemplo

Teorema

Seja n um número inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração:

Suponha que n não seja ímpar. Então n é par. Pelo teorema anterior, n^2 é par.

Exercício

Seja n um número inteiro. Se n^2 é par, então n é par.

Corolario

O inteiro m é ímpar se e somente se m^2 é ímpar.

Demonstração por redução ao absurdo

Exemplo

Teorema

O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração: *Vamos supor $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ com m e n números inteiros. Vamos impor a hipótese adicional de $\frac{m}{n}$ ser irredutível.*

Então, $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2$. Logo, m^2 é um número par e então m é um número par.

Portanto, existe inteiro k tal que $m = 2k$, e $m^2 = 4k^2$.

Substituindo na equação, temos $2n^2 = 4k^2$ e $n^2 = 2k^2$, o que mostra que n é par. Então a fração $\frac{m}{n}$ não é irredutível. Uma contradição.

Demonstração por redução ao absurdo

Exemplo

Teorema

O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração: *Vamos supor $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ com m e n números inteiros. Vamos impor a hipótese adicional de $\frac{m}{n}$ ser irredutível.*

Então, $2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2$. Logo, m^2 é um número par e então m é um número par.

Portanto, existe inteiro k tal que $m = 2k$, e $m^2 = 4k^2$.

Substituindo na equação, temos $2n^2 = 4k^2$ e $n^2 = 2k^2$, o que mostra que n é par. Então a fração $\frac{m}{n}$ não é irredutível. Uma contradição.

Mais exemplos

Teorema (Leis de De Morgan)

Sejam U um conjunto e $A, B \subset U$. Então:

$$(1) \ U - (A \cap B) = (U - A) \cup (U - B).$$

$$(2) \ U - (A \cup B) = (U - A) \cap (U - B).$$

Mais exemplos

Teorema

Se n é um número ímpar, então a divisão de n por 4 deixa resto 1.

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

Princípio da casa dos pombos

“Se temos n casas para acomodar $n + 1$ pombos, então existe uma casa com pelo menos 2 pombos”.

Exemplos

- *Em um grupo de 13 pessoas, ao menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*
- *Em um conjunto de 5 números inteiros, ao menos dois deles deixam o mesmo resto na divisão por 4.*
- *Todo número inteiro tem um múltiplo formado apenas pelos algarismos 0 e 1 na representação decimal.*
- *“Pintando” todos os pontos de um plano de branco ou vermelho, aleatoriamente, qual a probabilidade de haver dois pontos da mesma cor com distância entre eles de 10cm?*

O princípio da indução finita

Teorema

Seja n um inteiro e S um conjunto de inteiros maiores que n com as seguintes propriedades:

- ▶ $n \in S$;
- ▶ Se um inteiro $k \geq n \in S$, então $k + 1 \in S$.

Então $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq n\}$.

O princípio da indução finita

Exemplo

A soma dos primeiros n inteiros é $\frac{n(n+1)}{2}$. Isto é:

$$1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração: Observe que para $n = 1$ a propriedade é verdadeira.

Suponha agora que a propriedade é verdadeira para $n - 1$, isto é:

$$1 + 2 + \cdots n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\text{Então, } (1 + 2 + \cdots + n - 1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O princípio da indução finita

Exemplo

A soma dos primeiros n inteiros é $\frac{n(n+1)}{2}$. Isto é:

$$1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração: Observe que para $n = 1$ a propriedade é verdadeira.

Suponha agora que a propriedade é verdadeira para $n - 1$, isto é:

$$1 + 2 + \cdots n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\text{Então, } (1 + 2 + \cdots + n - 1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O princípio da indução finita

Teorema

- ▶ *Seja $n \geq 3$. Então $2n + 1 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 5$. Então $n^2 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 4$. Então $2^n < n!$*

O princípio da indução finita

Teorema

- ▶ *Seja $n \geq 3$. Então $2n + 1 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 5$. Então $n^2 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 4$. Então $2^n < n!$*

O princípio da indução finita

Teorema

- ▶ *Seja $n \geq 3$. Então $2n + 1 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 5$. Então $n^2 < 2^n$*
- ▶ *Seja $n \geq 4$. Então $2^n < n!$*

Mais exemplos de prova por indução

Teorema

- ▶ *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2)180^\circ$.*
- ▶ *O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n - 3)}{2}$.*

Mais exemplos de prova por indução

Teorema

- ▶ *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2)180^\circ$.*
- ▶ *O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n - 3)}{2}$.*

Erros em demonstrações

Exemplo

Toda função $f : X \longrightarrow Y$ com domínio, X , finito, é constante.

Tentativa:

Indução sobre o número de elementos de X . Se X tem um elemento, f é constante.

Suponha que X tenha n elementos. Então se $a \in X$, $f : X - \{a\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante igual. Logo, existe $y \in Y$ pela hipótese de indução) tal que para todo $x \in X - \{a\}$, $f(x) = y$. Falta mostrar que $f(a) = y$.

Tomamos agora $b \in X$, $b \neq a$. Então $X - \{b\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante (pela hipótese de indução). Assim, para todo $x \in X - \{b\}$, $f(x) = y$. Como $a \in X - \{b\}$, se $x \neq b$ e $c \neq a$, então $f(a) = f(c) = y$.

QUAL O ERRO NA TENTATIVA DE DEMONSTRAÇÃO??

Erros em demonstrações

Exemplo

Toda função $f : X \longrightarrow Y$ com domínio, X , finito, é constante.

Tentativa:

Indução sobre o número de elementos de X . Se X tem um elemento, f é constante.

Suponha que X tenha n elementos. Então se $a \in X$, $f : X - \{a\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante igual. Logo, existe $y \in Y$ pela hipótese de indução) tal que para todo $x \in X - \{a\}$, $f(x) = y$. Falta mostrar que $f(a) = y$.

Tomamos agora $b \in X$, $b \neq a$. Então $X - \{b\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante (pela hipótese de indução). Assim, para todo $x \in X - \{b\}$, $f(x) = y$. Como $a \in X - \{b\}$, se $x \neq b$ e $c \neq a$, então $f(a) = f(c) = y$.

QUAL O ERRO NA TENTATIVA DE DEMONSTRAÇÃO??

Erros em demonstrações

Exemplo

Toda função $f : X \longrightarrow Y$ com domínio, X , finito, é constante.

Tentativa:

Indução sobre o número de elementos de X . Se X tem um elemento, f é constante.

Suponha que X tenha n elementos. Então se $a \in X$, $f : X - \{a\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante igual. Logo, existe $y \in Y$ pela hipótese de indução) tal que para todo $x \in X - \{a\}$, $f(x) = y$. Falta mostrar que $f(a) = y$.

Tomamos agora $b \in X$, $b \neq a$. Então $X - \{b\}$ tem $n - 1$ elementos. Logo, f é constante (pela hipótese de indução). Assim, para todo $x \in X - \{b\}$, $f(x) = y$. Como $a \in X - \{b\}$, se $x \neq b$ e $c \neq a$, então $f(a) = f(c) = y$.

QUAL O ERRO NA TENTATIVA DE DEMONSTRAÇÃO??

Mais erros

Suponha $x^2 + 1 = 0$. Então, multiplicando os dois membros da equação por $x^2 - 1$, obtemos

$$x^4 - 1 = 0.$$

Logo, $x = 1$ ou $x = -1$. Em qualquer caso, $x^2 = 1$ e, como $x^2 + 1 = 0$, temos $1 + 1 = 0$.

QUAL O ERRO?

Obrigado!