



I Workshop de Álgebra da UFG – CAC

APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NAS POTÊNCIAS DE MATRIZES

Ana Nívia Pantoja

Daniela Rodrigues

Vinícius Elías de Godoy

Igor dos Santos Lima(Orientador)



Resumo

Neste seminário, demonstraremos uma maneira mais fácil e didática para efetuar cálculos de potência de matrizes semelhantes a uma diagonal. Para isto lançaremos mão de conceitos básicos da álgebra linear, tais como: espaço vetorial; subespaço vetorial; base vetorial; transformação linear; diagonalização de operadores; autovalores e autovetores, e por fim, iremos calcular potência de matrizes.

Preliminares

Espaço Vetorial

Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e subtração por um escalar, isto é,

$$\forall u, v \in V, u+v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall u \in V, \alpha u \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre REAIS $\mathbf{R}$) se forem verificadas as seguintes propriedades:

Em relação à adição:

$$A_1) (u+v)+w = u+(v+w), \forall u, v, w \in V;$$

$$A_2) u+v = v+u, \forall u, v \in V;$$

$$A_3) \exists 0 \in V, \forall u \in V, u+0 = u;$$

$$A_4) \forall u \in V, \exists (-u) \in V, u + (-u) = 0.$$

M) Em relação à multiplicação para escalar:

$$M_1) (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u);$$

$$M_2) (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u;$$

$$M_3) \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v;$$

$$M_4) 1u = u.$$

Para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Subespaço Vetorial

Um subconjunto S , não vazio, de um espaço vetorial V , é um subespaço se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$A_1) \text{ Para qualquer } u, v \in S, \text{ tem-se que:}$$

$$u+v \in S;$$

$$A_2) \text{ Para qualquer } \alpha \in \mathbf{R}, u \in S \text{ tem-se que:}$$

$$\alpha u \in S.$$

Obs.: Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$, chamado subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V .

Base Vetorial

Um conjunto $B=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base do espaço vetorial V se:

A) B é L.I. (linearmente independente – se há uma combinação linear do tipo:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \text{ que implica que } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0);$$

B) B gera V .

Transformações Lineares

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W , escreve-se: $T: V \rightarrow W$.

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é chamada transformação linear se:

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \text{ com } u, v \in V.$$

$$T(ku) = k \cdot T(u), \text{ com } k \in \mathbf{R} \text{ e } u \in V.$$

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, então $T(0) = 0$.

Autovalores e Autovetores

Definição: Sejam V um espaço vetorial e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que um escalar λ é um autovalor de T , se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, dizemos que v é um autovetor de T , associado ao autovalor λ .

De um modo geral toda transformação $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, v \mapsto \alpha v, \alpha \neq 0$ tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v .

1) $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.

2) $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.

3) $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.

4) $\alpha = 1$, T é a identidade.

Autovalores e autovetores de uma matriz

Consideremos de agora em diante, apenas os espaços vetoriais onde $V = \mathbf{R}_n$, e as operações lineares definidas por:

$$T: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_n$$

$$v \mapsto T(v) = Av$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n .

Por definição, $v \neq 0$ é um autovetor de T se:

$$T(v) = \lambda v.$$

$$\text{Assim, } T(v) = Av = \lambda v$$

Equivalentemente,

$$Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0, \text{ onde } I \text{ é a matriz identidade } (Iv = v).$$

Assim, podemos escrever:

$$(A - \lambda I)v = 0 \text{ (sistema linear homogêneo)}$$

Queremos determinar as soluções não nulas do sistema homogêneo, ou seja,

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0$$

Quando uma matriz é diagonalizável?

Uma matriz é diagonalizável se ela obtiver tantos autovetores distintos quanto for a dimensão do espaço e seguir esta forma:

$$A = PDP^{-1}$$

onde A é a matriz, D a matriz de seus autovalores na diagonal principal, P a matriz dos autovetores, e P^{-1} a matriz inversa dos autovetores.

Dada uma matriz A , podemos sempre também formar uma transformação linear do tipo $T(v) = Av$. Por isso, também dizemos que A é diagonalizável se, e somente se, a transformação linear T definida por $T(v) = Av$ for diagonalizável.

Resultados

Potências de uma matriz

Calcular a potência de uma matriz nem sempre é uma tarefa fácil. Perceba que calcular A^n equivale a multiplicar A por A por A n vezes. A seguir explicaremos como calcular a n -ésima de uma matriz diagonalizável de um modo relativamente simples.

Em primeiro lugar observamos que se D for uma matriz diagonal então, calcular D^n é bem simples. Se D é diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

então

$$D^n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k^n \end{pmatrix}.$$

Observamos que se A é diagonalizável e D sua forma diagonal,

$$A = P D P^{-1}$$

temos,

$$A^2 = A A = (P D P^{-1}) (P D P^{-1}) = P D^2 P^{-1}.$$

onde calcular D^2 , como vimos, é muito simples.

Em geral, se A é diagonalizável, como acima, indutivamente podemos escrever que:

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

Referências

- BOLDRINI, José Luiz e outros. Álgebra Linear, 3a ed., Harbra, São Paulo, 1986.

- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2a ed., São Paulo, Editora Makron Books, 1987.