I Workshop de Álgebra da UFG – CAC

Subgrupos finitos de $\mathbb{C}^*$

Bruno Castilho

Igor dos Santos Lima(Orientador)

Resumo

- A Teoria dos Grupos é uma ramo da matemática que lida com o estudo de estruturas como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. É uma teoria estudada em álgebra abstrata, envolvendo o estudo de propriedades de um conjunto, munido de uma ou mais operações.
- Neste trabalho nós lidamos com noções de grupos, subgrupos, ordem e índice, mostrando exemplos de grupos, grupos cíclicos, mas nos fixaremos no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ que tem estrutura natural de grupo. E finalmente, mostraremos que os subgrupos finitos de $\mathbb{C}^*$ estão contidos na esfera unitária S^{-1} = {z∈ $\mathbb{C}$| $|z| = 1$}.

Preliminares

- Definição 1. Seja G um conjunto não vazio, munido de uma operação binária *.
- $GXG \to G$
- $(a, b) \to a * b$
- G é grupo se os axiomas seguintes são satisfeitos:
- $a, b \in G \to a * b \in G$
- Associativa: $(a * b) * c = a * (b * c) \forall\, a, b, c \in G$
- Elemento Neutro: $a * e = e * a = a, \forall a \in \forall G$
- Elemento Inverso: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \forall a \in G$
- Observação: Se, $a * b = b * a, \forall a, b \in\ G$, então G é abeliano.
-
- Exemplos de grupos:
- $G = (\mathbb{Z}, +)$; $G = (\mathbb{Q}, +)$; $G = (M_2(\mathbb{R}), +)$ $\;G = (\mathbb{C}^*, .)$
- Subgrupos.
- Definição 2. Seja $(G,*)$ um grupo. Se $\phi \neq H \subseteq G$, com a operação* é um grupo, então H é um subgrupo de G.
- Notação: $H \leq G$.
- Ordem e índice de um grupo.
- A ordem de um grupo G, é a quantidade de elementos de G. Notação: $|G|$
- Definição 3. Sejam G um grupo, $H \leq G$. Definimos como classe lateral à esquerda de H em G, o seguinte subconjunto $a * H$ de G|a∈ G.
- $a * H = \{a * h | h \in H\}$
- De modo análogo, definimos,
- $H * a = \{h * a | h \in H\}$, onde a∈ G, como classe lateral à direita de H em G.
- Seja G/H o conjunto das classes laterais, então o número de elementos distintos de G/H é chamado índice de H em G.
- Definição 4. Seja G um grupo. Dizemos que G é cíclico se existe $a \in G$, tal que $G = \{a^n \;|n \in \mathbb{Z}\}$.
- Notação: $G =< a >$, G é dito, gerado pelo elemento a.
- Observação. Se G é aditivo, a potência de base a e expoente n é denotada por na.
- Exemplo 2.1. G= $\{-1, 1, i, -i\}$ é um grupo cíclico, gerado por i.
- Exemplo 2.2. O grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é cíclico infinito gerado por 1.
- $\mathbb{Z} =< 1 >$={n.1 |n∈ $\mathbb{Z}$}.
- Propriedades dos números complexos.
- Sejam $z_1\ e\ z_2 \in \mathbb{C}^*$.
- P1) $z_1\overline{z_1}$ = $|z_1|^2$
- P2) $|z_1 z_2|$ = $|z_1||z_2|$
- P3) $|{z_1}^k|$ = $|z_1|^k$ com $k \in \mathbb{N}$.
- **Teorema 1.** Seja $H\leq (\mathbb{C}^*, \;.)$, $|H| < \infty$, com $n = |H|$e $n \in \mathbb{N}$. Então existe $k \leq n$, tal que $z^k = 1, com\, n, k \in \mathbb{N}$.
- **Proposição 1.** Se $z \in H$, então $|z| = 1$.
- Essa Proposição mostra que todos os números complexos pertencentes aos subgrupos finitos de $(\mathbb{C}^*, \;.)$ estão contidos na esfera unitária

Resultados

- Vamos primeiramente demonstrar que G=$(\mathbb{C}^*, \;.)$ é um grupo.
- Demonstração: Temos que $G \neq \phi$, pois $1 \in G$. Agora sejam $z_1, z_2, z_3 \in G$ tal que,
- $z_1 = a_1 +\ b_1 i$; $z_2 = a_2 +\ b_2 i$; $z_3\ = a_3 +\ b_3 i$, com a_i, $b_i \in\ \mathbb{Z}\ e\ a_i \neq b_i$ simultaneamente. Assim $z_1. z_2 = (\,a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (\,a_1\,a_2 + a_1\,b_2 i + b_1\,a_2 i - b_1\,b_2) = (\,a_1\,a_2 - b_1 b_2) + (\,a_1\,b_2 + b_1\,a_2)$i ∈ G. Logo G é fechado.
- Associativa: $(\,z_1.\,z_2).\,z_3 = z_1.(\,z_2.\,z_3\,)$
- $[(\,a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)](\,a_3 + b_3 i)$
- = $[(\,a_1\,a_2 - b_1 b_2) + (\,a_1\,b_2 + b_1\,a_2)$i] $(\,a_3 + b_3 i)$
- = {[$(\,a_1\,a_2 - b_1 b_2)\ a_3 - \ (a_1\,b_2 + b_1\,a_2)(\,b_3)$] +$i$[$(\,a_1\,a_2 - b_1 b_2)\ b_3 + (\,a_1\,b_2 + b_1\,a_2)\ \ a_3$]}
- = $(\,a_1 + b_1 i)[(a_2 + b_2 i)(\,a_3 + b_3 i)]$
- Elemento Neutro: $z_1.\ e = e.\ z_1 = z_1$
- Basta tomar e = $1 + 0i$, pois: $(\,a_1 + b_1 i)(1 + 0i)$= $(1 + 0i)(\,a_1 + b_1 i)$=$(\,a_1 + b_1 i)$
- Elemento Inverso: $z_1{z_1}^{-1} =\ {z_1}^{-1} z_1 = 1 + 0i$
- Basta tomar ${z_1}^{-1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|}$
- Portanto, G=$(\mathbb{C}^*, \;.)$ é um grupo.
-
- **Demonstração do Teorema 1.**
- Observe que existe $k \leq n$, tal que $z^k = 1$. De fato, considere o conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^{n+1}\}$. Daí existe $i, j \in \{z, z^2, z^3, \ldots, z^{n+1}\}$, sem perda de generalidade podemos supor $i < j$. Assim, z^i=$z^j \Rightarrow \frac{z^i}{z^i} = \frac{z^j}{z^i} \Rightarrow 1 = z^{j-i}$. Tome $k = j - i \Rightarrow 1 = z^k$.
- **Demonstração da Proposição 1.**
- Suponha que $|z| \neq 1$. Daí, $|z| > 1$ ou $|z| < 1$. Por outro lado, existe $k \in\ \mathbb{N}$, tal que $z^k = 1$. Aplicando a norma em ambos os lados, temos:
- $|z^k| = |1| \Rightarrow |z.z \ldots .z| = 1 \Rightarrow |z||z| \ldots |z| = |z|^k > 1$, o que é um absurdo em ambos os lados, portanto $|z| = 1$.
- Em geral, todos os subgrupos finitos de $(\mathbb{C}^*, \;.)$ que estão contidos na esfera unitária, podem ser descritos da seguinte forma:
- $H_n = \{z \in \mathbb{C}^*\ tal\ que\ z = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ e $n \in\ \mathbb{N}$, onde $0 \leq k \leq n - 1\}$.

Referências

- VIANA, Ricardo L. Teoria dos grupos. Curitiba. 2010.
- GARCIA, Arnaldo e LEQUAIN, Yves. Elementos de Álgebra. IMPA, 6º ed. Rio de Janeiro. 2012

* A impressão deste foi financiada pela FAPEG.