Problemas envolvendo automorfismos de grupos e pontos fixos

Emerson Ferreira de Melo

Universidade de Brasília

9/11/2016 - V Workshop de Álgebra da UFG-CAC

Subgrupo dos pontos fixos

Definições

1. Seja G um grupo e φ um elemento do grupo de automorfismos de G. Denotamos por $C_G(\varphi)$ o subgrupo formado pelos pontos fixos de φ em G, que é
$$C_G(\varphi) = \{x \in G \ ; \ x^{\varphi} = x\}.$$

Subgrupo dos pontos fixos

Definições

1. Seja G um grupo e φ um elemento do grupo de automorfismos de G. Denotamos por $C_G(\varphi)$ o subgrupo formado pelos pontos fixos de φ em G, que é
$$C_G(\varphi) = \{x \in G \ ; \ x^{\varphi} = x\}.$$

2. O subgrupo $C_G(\varphi)$ também é chamado de centralizador de φ em G.

Subgrupo dos pontos fixos

Definições

1. Seja G um grupo e φ um elemento do grupo de automorfismos de G. Denotamos por $C_G(\varphi)$ o subgrupo formado pelos pontos fixos de φ em G, que é
$$C_G(\varphi) = \{x \in G \ ; \ x^{\varphi} = x\}.$$

2. O subgrupo $C_G(\varphi)$ também é chamado de centralizador de φ em G.
3. No caso particular em que $C_G(\varphi) = 1$, dizemos que φ é livre de pontos fixos em G.

Subgrupo dos pontos fixos

Definições

1. Seja G um grupo e φ um elemento do grupo de automorfismos de G. Denotamos por $C_G(\varphi)$ o subgrupo formado pelos pontos fixos de φ em G, que é
$$C_G(\varphi) = \{x \in G \ ; \ x^{\varphi} = x\}.$$

2. O subgrupo $C_G(\varphi)$ também é chamado de centralizador de φ em G.
3. No caso particular em que $C_G(\varphi) = 1$, dizemos que φ é livre de pontos fixos em G.
4. De maneira análoga, dado um subgrupo A do grupo de automorfismos de G, definimos o centralizador de A em G como $C_G(A) = \{x \in G \ ; \ x^a = x \text{ para todo } a \in A\}$ e dizemos que A é livre de pontos fixos em G, sempre que $C_G(A) = 1$.

Grupo de Frobenius

Definição

Um grupo de Frobenius F é um grupo de permutações transitivo sobre um conjunto finito tal que nenhum elemento não trivial fixa mais que um ponto e algum elemento não trivial fixa um ponto.

Grupo de Frobenius

Definição

Um grupo de Frobenius F é um grupo de permutações transitivo sobre um conjunto finito tal que nenhum elemento não trivial fixa mais que um ponto e algum elemento não trivial fixa um ponto.

- Seja B um subgrupo que fixa um ponto. Então o subconjunto que consiste da identidade junto com os elementos que não fixa nenhuma letra formam um subgrupo normal K cuja ordem é $[F : H]$.

Grupo de Frobenius

Definição

Um grupo de Frobenius F é um grupo de permutações transitivo sobre um conjunto finito tal que nenhum elemento não trivial fixa mais que um ponto e algum elemento não trivial fixa um ponto.

- Seja B um subgrupo que fixa um ponto. Então o subconjunto que consiste da identidade junto com os elementos que não fixa nenhuma letra formam um subgrupo normal K cuja ordem é $[F : H]$.
- O subgrupo K é chamado de *núcleo*, o subgrupo H é chamado de complemento e temos $F = K \rtimes B$.

Grupo de Frobenius

Definição

Um grupo de Frobenius F é um grupo de permutações transitivo sobre um conjunto finito tal que nenhum elemento não trivial fixa mais que um ponto e algum elemento não trivial fixa um ponto.

- Seja B um subgrupo que fixa um ponto. Então o subconjunto que consiste da identidade junto com os elementos que não fixa nenhuma letra formam um subgrupo normal K cuja ordem é $[F : H]$.
- O subgrupo K é chamado de *núcleo*, o subgrupo H é chamado de complemento e temos $F = K \rtimes B$.
- Um grupo de Frobenius KB com núcleo K e complemento B pode ser definido como o produto semi-direto de K por B tal que $C_K(b) = 1$ para todo $b \in B \setminus \{1\}$.

Alguns Resultados sobre Automorfismos Livres de Pontos Fixos

Teoremas

1. (Higman - 1957) Se um grupo finito nilpotente admite um automorfismo de ordem prima p livre de pontos fixos, então sua classe de nilpotência é p-limitada.

Alguns Resultados sobre Automorfismos Livres de Pontos Fixos

Teoremas

1. (Higman - 1957) Se um grupo finito nilpotente admite um automorfismo de ordem prima p livre de pontos fixos, então sua classe de nilpotência é p-limitada.
2. (Thompson - 1959) Se um grupo finito admite um automorfismo de ordem prima livre de pontos fixos, então ele é nilpotente.

Alguns Resultados sobre Automorfismos Livres de Pontos Fixos

Teoremas

1. (Higman - 1957) Se um grupo finito nilpotente admite um automorfismo de ordem prima p livre de pontos fixos, então sua classe de nilpotência é p-limitada.
2. (Thompson - 1959) Se um grupo finito admite um automorfismo de ordem prima livre de pontos fixos, então ele é nilpotente.
3. (Dade - 1969) Se um grupo finito admite um automorfismo de ordem n livre de pontos fixos, então sua altura de Fitting é n-limitada.

Alguns Resultados sobre Automorfismos Livres de Pontos Fixos

Teoremas

1. (Higman - 1957) Se um grupo finito nilpotente admite um automorfismo de ordem prima p livre de pontos fixos, então sua classe de nilpotência é p-limitada.
2. (Thompson - 1959) Se um grupo finito admite um automorfismo de ordem prima livre de pontos fixos, então ele é nilpotente.
3. (Dade - 1969) Se um grupo finito admite um automorfismo de ordem n livre de pontos fixos, então sua altura de Fitting é n-limitada.
4. (CGSF - 1982) Se um grupo finito admite um automorfismo livre de pontos fixos, então ele é solúvel.

Estrutura de um grupo de Frobenius

Seja F um grupo de Frobenius com núcleo K e complemento B então:

- B é um grupo de automorfismos de K tal que $C_K(b) \neq 1$ para todo $b \in B \setminus \{1\}$.
- K é nilpotente de classe "limitada".
- Os p-subgrupos de Sylow de B são cíclicos ou quatérnio generalizado.
- Qualquer subgrupo de B de ordem pq, p e q primos, é cíclico.

Grupos não cíclicos agindo como automorfismos

- Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G. Então $G = \langle C_G(a); a \in A \setminus \{1\} \rangle$.

Grupos não cíclicos agindo como automorfismos

- Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G. Então $G = \langle C_G(a); a \in A \setminus \{1\} \rangle$.

Teoremas

1. **(Ward - 1968)** Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é solúvel.

Grupos não cíclicos agindo como automorfismos

- Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G. Então $G = \langle C_G(a); a \in A \setminus \{1\} \rangle$.

Teoremas

1. **(Ward - 1968)** Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é solúvel.
2. **(Ward - 1971)** Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 3 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é nilpotente.
3. **(Shumyatsky - 2001)** If $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para todo $a \in A \setminus \{1\}$, então G é nilpotente de classe limitada por c e p.

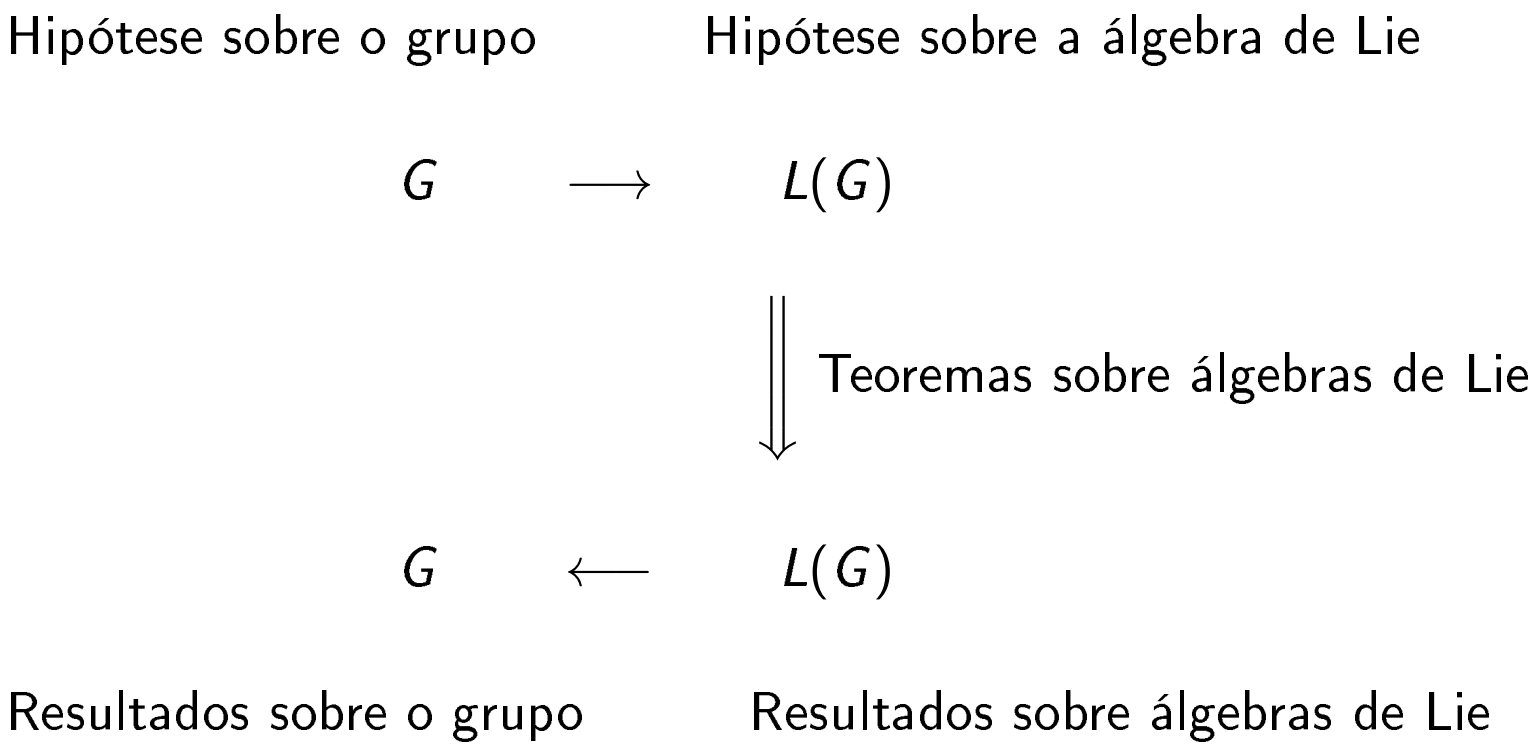
Grupos não cíclicos agindo como automorfismos

- Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G. Então $G = \langle C_G(a); a \in A \setminus \{1\} \rangle$.

Teoremas

1. **(Ward - 1968)** Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 2 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é solúvel.
2. **(Ward - 1971)** Suponha que um p-grupo abeliano elementar A de posto ≥ 3 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é nilpotente.
3. **(Shumyatsky - 2001)** If $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para todo $a \in A \setminus \{1\}$, então G é nilpotente de classe limitada por c e p.
4. **(de Melo; Shumyastky - 2016)** Suponha que um p-grupo A de expoente p e ordem ≥ 3 age sobre um p'-grupo finito G de tal forma que $C_G(a)$ é nilpotente de classe no máximo c para todo $a \in A \setminus \{1\}$. Então G é nilpotente de classe limitada por c e p.

Método do Anel de Lie Associado



- J. Caldeira; E. de Melo; P. Shumyatsky. *On groups and Lie algebras admitting a Frobenius group of automorphisms*, J. Pure and Applied Algebra **216** (2012), 2730-2736.
- E. de Melo, *Positive laws in finite groups admitting a dihedral group of automorphisms*, J. Group Theory **16** (2013), 767-778.
- E. de Melo, *Fitting height of a finite group with a metabelian group of automorfisms* Comm. Alg. **43** (2015), 4797-4808.
- E. de Melo, *On p-groups of maximal class as group of automorphisms*, J. Algebra **440** (2015), 100-112.
- E. de Melo; P. Shumyatsky. *Finite groups and their coprime automorphisms*, Proc. Amerc. Math. Soc. To appear.
- Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook, no. 17, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.

Obrigado!