p-grupos e Aplicações

Pedro Henrique Cavalcanti da Silva[1] *Igor dos Santos Lima(Orientador)*[2]
[1] Graduando em Matemática - UFG – CAC, Bolsista de Iniciação Científica - PIBIC, Catalão, Brasil,
pedriw@gmail.com
[2] Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas UNICAMP e Professor do Departamento de Matemátic da – UFG – CAC
igor.matematico@gmail.com

Resumo: Como sabemos, a ordem de um grupo traz consequências para sua estrutura, e quanto mais fatores primos a sua ordem possui, mais complicado pode ser o grupo. Assim, utilizando a conjugação de classes, entenderemos algumas propriedades particulares de p-grupos finitos. Hoje a teoria dos grupos é aplicável em outras áreas tanto das ciências afins quanto em outras da Matemática.
.

I. Introdução

Usando a conjugação de classes de um elemento, conseguimos demonstrar uma equação na qual podemos retirar efeitos sobre a teoria de grupos. A aplicação desta equação chamada, de equação de classes nos ajuda a demonstrar algumas propriedades para p-grupos. Como por exemplo, todo p-grupo com ordem p² é abeliano, ou um p-grupo não trivial, então o centro deste também é não trivial.

II. Considerações Iniciais

Para tal demonstração, serão necessários alguns conceitos básicos de Álgebra. Seguem alguns conceitos:

1. Dizemos que um conjunto "G" não vazio é grupo, se munido de uma operação binária "*" bem definida. Se com "a ∈ G" satisfaz as seguintes propriedades:

- Possui Associatividade. "a*(b*c)=(a*b)*c"
- Existe Elemento Neutro. "a*e=e*a=a"
- Existe Elemento Inverso. "$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$".

2. Dizemos que um subconjunto H, não vazio, de um grupo G é um subgrupo, se munido da mesma operação de G, respeita as mesmas propriedades.
3. Dizemos centro, o subconjunto que contém todos os elementos que comutam com outros elementos.
4. Pelo teorema de Lagrange temos que, a ordem de H divide a ordem de G.
5. Sejam um Grupo G, H um subgrupo de G e a ∈ G$. Os subconjuntos de G, aH={ah, h ∈ H} e Ha={ha,h ∈ H} são chamados, respectivamente, de classe lateral a esquerda e a direita de H.
6. Seja G um grupo, H subgrupo de G, a um elemento de G. O grupo quociente, G/H, contém todas as classes laterais a direita de H por a.
7. Dizemos que um grupo finito G é um p-grupo, se G possui ordem p^n, sendo p um número primo, e n um natural.
8. Um homomorfismo é uma aplicação F de um grupo G em outro grupo G' que satisfaz a seguinte situação, sendo "a,b ∈ G", sendo a operação de G "*" e G'+:

- F(a*b)=F(a)+F(b)
- Um homomorfismo injetor e sobrejetor é dito Isomorfismo.

III. Equação de Classes

Dizemos que G sendo um grupo, "a,b ϵ G", dizemos que a é conjugado de b e indicamos "a~b", se existe "g ϵ G" tal que "b= $g^{-1}ag$". Daqui, vamos chamar de Classe de Conjugação de "a", todos os elementos que se relacionam com a da forma anterior.

A equação de classes, vem de uma bijeção da grupo quociente de G na classe de conjugação. Sendo esta bijeção $\varphi(Hg)=g^{-1}ag$. Desta bijeção, concluímos que a ordem deste grupo quociente é igual a ordem desta classe de conjugação. Ou seja, a ordem da Classe de Conjugação divide a ordem do Grupo.

$$\text{Assim } |G| = |Z(G)| + \sum_{a\in G} |C_a|.$$

III. Aplicação da Equação de Classes em p-Grupos

1. Se G é um p-grupo e $|G| > 1$, então $Z(G)$ também é um p-grupo e $|Z(G)| > 1$.

Demonstração: Seja $|G| = p^n > 1$. Como $Z(G) \leq G$, do teorema de Lagrange, $|Z(G)|\ |p^n$, logo, $\exists\ m \in Z_+,\ 0 \leq m \leq n$, tal que $|Z(G)| = p^n$. Para cada a $\notin Z(G)$, $|C_a|$ e da equação de classes, $|C_a| | p^m$, $\sum_{a\notin Z(G)} |C_a|$ é um múltiplo de p. Como $p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{a\in G} |C_a|$, temos que $p \,\big|\, |Z(G)| \Rightarrow p \,\big|\, p^m \Rightarrow m \geq 1$.

$$\text{Assim } |Z(G)| = p^m > 1.$$

2. Se $|G| = p^2$, onde p é um primo positivo, então G é abeliano.

Demonstração: Seja G um grupo de ordem p^2. Então pelo que demonstramos anteriormente, $|Z(G)|$ é igual a p ou p^2 e portanto (G:Z(G)) é igual a p ou 1. Logo o grupo quociente é cíclico. Se xZ(G) é um gerador deste grupo, segue que G=<x,Z(G)> e como x comuta com cada elemento de Z(G), temos que G é abeliano.

IV. Referências Bibliográficas

- J.J.Rotman, Advanced Modern Algebra, Prentice Hall, revised 2nd ed., 2003.
- A. Garcia e Y. Lequain, Elementos de Algebra, IMPA, 2nd ed., 2003.
- N. O. Dantas, Estruturas Algébricas I, CESAD-UFS, 2009.
- C. Polcino Milies, Grupos Nilpotentes: Uma Introdução, IME-USP, 2003.

* A impressão deste foi financiada pela FAPEG .