Equações Diofantinas

Patrícia Cristina Souza dos Santos

Fabíola Ribeiro

Orientador: Igor Lima

Matemática-UFG-CAC

Introdução

Será falado sobre a principal aplicação do Máximo divisor comum que é a resolução de equações diofantinas. São equações onde se buscam soluções em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A teoria das equações diofantinas é o ramo da teoria dos números que investiga as soluções inteiras ou racionais de equações polinomiais. O nome equações diofantinas é uma homenagem a um dos maiores algebristas da Grécia antiga, Diofante de Alexandria, que formulou e resolveu muitas equações. A obra de Diofante serviu como fonte de inspiração para muitos matemáticos, entre eles o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665). Diofante é considerado verdadeiro precursor da moderna teoria dos números e para alguns o consideram como pai da álgebra, principalmente devido à sua inovação com as notações, o primeiro a usar símbolos na resolução de problemas algébricos. Interessou-se por uma grande variedade de equações indeterminadas que eventualmente admitem infinitas soluções, porém ele procurava soluções racionais.

Preliminares

Máximo divisor comum

- Definição: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ dois números. Dizemos que um inteiro c é divisor comum de a e b se $c|a$ e $c|b$.
- Teorema: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então existem x_1, y_1

$\in \mathbb{Z}$ tais que $ax_1 + by_1 = d$.

Demonstração: Consideremos o conjunto $S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}$.

Seja primeiro $a \neq 0$. Fazendo-se $y = 0$ e $x = 1$ se $a > 0$ $x = -1$ se $a < 0$ vemos que $ax + by = a(\pm 1) + b \cdot 0 = |a| > 0$ o que mostra que $S \neq \emptyset$. Se $a = 0$, então $|b| > 0$ e uma escolha análoga de x e y mostra $S \neq \emptyset$ também neste caso.

Pelo princípio da indução, existe um $d \in S$ minimal. Como $d \in S$ temos $d > 0$ e existem $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax_1 + by_1$.

Afirmamos que este d é o $\text{mdc}(a, b)$:

Dividamos a por d com resto: $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = qd + r$ e $0 \leq r < d$.

Então $r = a - qd = a - q(ax_1 + by_1) = a(1 - qx_1) + b(-qy_1)$. Se fosse $r > 0$

poderíamos concluir que $r \in S$, o que claramente é um absurdo já que $r < d$ e d é o elemento mínimo de S . Logo $r = 0$ e $a = qd$ o que significa $d|a$.

Da mesma forma mostra-se que $d|b$. Logo, d é divisor comum de a e b .

Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $c|a$ e $c|b$ concluimos que $c|ax_1 + by_1 = d$. Logo $d = \text{mdc}(a, b)$.

- Conseqüência: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Então

$$\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Em palavras: As combinações lineares inteiras de a e b são exatamente os múltiplos do $\text{mdc}(a, b)$.

Demonstração: Abreviemos $T = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ e $R = \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Pelo teorema anterior existem $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ com $d = ax_1 + by_1$. Para todo $z \in \mathbb{Z}$ segue $dz = a(x_1z) + b(y_1z) \in T$. Logo $R \subseteq T$. Como $d \mid (ax + by)$ para qualquer $ax + by \in T$, segue também $T \subseteq R$. Logo, $T = R$.

Aplicações do Máximo Divisor Comum

1) Sejam a e b inteiros positivos tais que ab é um quadrado perfeito e o $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Demonstrar que a e b são quadrados perfeitos.

Solução: Os fatores primos de ab são os fatores primos de a e b .

Portanto, $ab = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, nenhum dos fatores de b

é fator de a.

Se ab é um quadrado, a quantidade de cada fator primo deve ser par. Assim, cada fator de a aparece uma quantidade par de vezes, bem como cada fator de b . Portanto, a e b são quadrados perfeitos.

2) Demonstrar que se $\text{mdc}(a, b) = d$ então $\text{mdc}(a^2, b^2) = d^2$.

Solução: Seja $d = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n$, onde cada d_i é um fator primo de d . Como $d = \text{mdc}(a, b)$, os fatores primos de d são fatores de a e b e estes são os únicos fatores comuns.

Façamos então: $a = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$, e $b = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n$ onde a_i e b_i são os fatores primos de a e b além dos d_i .

Em consequência temos: $a^2 = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$ e $b^2 = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n$.

Como pode ser observado o produto dos fatores comuns de a^2 e b^2 é $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \dots d_n = d \cdot d = d^2 \Rightarrow \text{Mdc}(a^2, b^2) = d^2$.

3) Sendo n um inteiro qualquer, calcular o $\text{mdc}(n, n + 1)$.

Solução: $(n + 1) : n = 1$, resto 1 $\text{P } n : 1 = n$, resto 1 $\Rightarrow 1 : 1 = 1$, resto zero. Portanto, $\text{mdc}(n, n + 1) = 1$.

4) Calcular

(a) $\text{mdc}(n, n + 2)$, sendo n um inteiro par.

Solução: Se n é par, temos $n = 2k$ e $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$. Como foi visto no exercício 06, deste capítulo, k e $k + 1$ são primos entre si. Portanto, $\text{mdc}[2k, 2(k + 1)] = 2$, pois 2 é o único fator comum de $2k$ e $2(k + 1)$.

(b) $\text{mdc}(n, n + 2)$, sendo n um inteiro ímpar.

Solução: $(n + 2) : n = 1$, resto $= 2$. $\Rightarrow n : 2 = k$, resto 1 .
 $2 : 1 = 2$, resto zero. Portanto, $\text{mdc}(n, n + 2) = 1$.

5) Sejam a, b e c inteiros. Demonstrar:

(a) Se $\text{mdc}(a, b) = 1$ e se $c \mid (a + b)$, então $\text{mdc}(a, c) = 1$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$.

Solução:

(1) $\text{Mdc}(a, b) = 1 \Rightarrow$ então existem os inteiros x e y , tais que $ax + by = 1$ (i).

Se $c \mid (a + b)$ então $a + b = qc$, q inteiro $\Rightarrow b = qc - a$ (ii)

Substituindo (ii) em (i), resulta $ax + (qc - a)y = 1 \Rightarrow ax - ay + qcy = 1 \Rightarrow a(x - y) + c(qy) = 1$ com $(x - y)$ e qy inteiros.

Assim, existem os inteiros $x' = x - y$ e $y' = qy$, tais que $ax' + cy' = 1 \Rightarrow \text{mdc}(a, c) = 1$.

(2) De $a + b = qc$ tira-se $a = qc - b$, que substituído em (i) resulta:
 $qc - b)x + by = 1 \Rightarrow qc - bx + by = 1 \Rightarrow b(y - x) + c(qx) = 1$. Como $y - x$ e qx são inteiros, conclui-se que $\text{mdc}(b, c) = 1$.

Equações diofantinas

- Definição: Uma equação Diofantina é linear se ela tiver a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c.$$

Em particular, será tratado apenas as equações Diofantinas lineares de grau 2

ou seja, $ax + by = c$, com a, b e c inteiros.

- Definição: Dizemos que a equação diofantina $ax+by=c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0+by_0=c$. O par (x_0, y_0) é chamado de solução da equação dada.

Exemplos:

- A equação $5x+0,5y+1$ não é uma equação diofantina, pois 0,5 não é um número inteiro.
- A equação $2x+3y=1$ é uma equação diofantina, pois o par $(5,-3)$ é uma solução em $\mathbb{Z}$ desta equação.
- A equação $6x+10y=5$ é uma equação diofantina, contudo esta equação não possui solução em $\mathbb{Z}$. Basta notar que $6x$ e $10y$ são números pares quaisquer que sejam os inteiros x e y . Logo a soma $6x+10y$ será sempre par, o que implica que $6x+10y$ não pode ser igual a 5.

- Teorema: A equação diofantina $ax+by=c$ tem solução se, e somente se, $\text{mdc}(a, b)$ divide c .

Demonstração:

$\Rightarrow$ Suponha que $ax+by=c$ tem solução. Então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0+by_0=c$

Seja $d=\text{mdc}(a,b)$

Então d divide a e b

Logo, $a=k_1d$ e $b=k_2d$

Segue que $c=(k_1d)x_0+(k_2d)y_0$

$C=k_1dx_0+k_2dy_0$

$C= dk_1x_0+dk_2y_0$

$c= d(k_1x_0+k_2y_0)$

Chamando $(k_1x_0+k_2y_0)=q$

Então, $c=dq$

$\Rightarrow d|c$

$\Leftarrow$ Suponha que $d=\text{mdc}(a,b)$ divide c

Então, $c=kd$, para algum inteiro k

Agora, como $d = \text{mdc}(a, b)$, existem inteiros m_0 e n_0 tais que

$$am_0 + bn_0 = d$$

Segue que

$$K(am_0 + bn_0) = kd$$

$$\Rightarrow akm_0 + bkn_0 = c$$

$$\Rightarrow a(km_0) + b(kn_0) = c$$

Logo o par (km_0, kn_0) é uma solução da equação $ax + by = c$

Exemplos:

Temos que o $\text{mdc}(2, 3) = 1$ e $1 | 1$, logo a equação $2x + 3y = 1$ tem solução em $\mathbb{Z}$.

Por outro lado, a equação $6x + 10y = 5$ não tem solução em $\mathbb{Z}$, uma vez que $\text{mdc}(6, 10) = 2$ e $2 \nmid 5$

- Corolário: Se a e b são primos entre si, então a equação diofantina $ax + by = c$ tem solução qualquer que seja o inteiro c .
- Corolário: A equação $ax + by = 1$ tem solução se, e somente se, a e b são primos entre si.

Proposição: Se (x_0, y_0) é uma solução em $\mathbb{Z}$ da equação diofantina $ax + by = c$, então todas as demais soluções desta equação são da forma:

$$X_1 = x_0 + bt/d \quad \text{e} \quad y_1 = y_0 - at/d,$$

Para algum t pertencente a $\mathbb{Z}$, onde o $d = \text{mdc}(a, b)$

Demonstração:

Mostremos primeiro que todo par $(x_0 + (b/d)t, y_0 - (a/d)t)$ é solução da equação considerada. De fato,

$$a(x_0 + (b/d)t) + b(y_0 - (a/d)t) =$$

$$ax_0 + a(b/d)t + by_0 - b(a/d)t =$$

$$ax_0 + by_0 + (ab - ba/d)t =$$

$ax_0 + by_0 = c$, pois (x_0, y_0) é solução por hipótese.

De outra parte, seja (x', y') uma solução genérica da equação. Então:

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0$$

Daí:

$$a(x' - x_0) + b(y_0 - y')$$

Mas como d é divisor de a e de b , então $a=dr$ e $b=ds$, para convenientes inteiros r e s , primos entre si. Logo,

$$dr(x' - x_0) = ds(y_0 - y')$$

e, portanto

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y')$$

Essa igualdade mostra que r divide $s(y_0 - y')$. Mas, como r e s são primos entre si, então r divide $y_0 - y'$, (pois se a e b são inteiros primos entre si e $a|bc$, então $a|c$).

Logo,

$y_0 - y' = rt$ para algum t pertencente a $\mathbb{Z}$. Levando em conta que $r=a/d$, então

$$y' = y_0 - (a/d)t$$

Agora, em conseqüência,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y') = srt$$

Obtém-se

$$x' = x_0 + (b/d)t$$

Aplicações

- Determinar todas as soluções inteiras da equação diofantina linear de

(a) $56x + 72y = 40$

Solução: Calculando $\text{mdc}(72, 56)$

$$72 = 56 \cdot 1 + 16$$

$$56 = 16 \cdot 3 + 8$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

$$8 = 56 - 16 \cdot 3 = 56 - (72 - 56 \cdot 1) \cdot 3 = 56 \cdot 4 - 72 \cdot 3 = 56 \cdot (4) + 72 \cdot (-3)$$

Temos: $40 = 8 \cdot 5 = 56 \cdot (4 \cdot 8) + 72 \cdot (-3 \cdot 5) = 56 \cdot (32) + 72 \cdot (-15)$.

Solução particular: $x_0 = 32$ e $y_0 = -15$.

Todas as soluções: $x = 32 + (72/8)t = 32 + 9t$ e $y = -15 - (56/8)t = -15 - 7t$.

Resposta: $x = 32 + 9t$ e $y = -15 - 7t$

(b) $84x - 438y = 156$

Solução: $\text{mdc}(438, 84) \Rightarrow 438 = 84 \cdot 5 + 18$;

$$84 = 18 \cdot 4 + 12$$
;

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$
;

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

$$6 = 18 - 12 \cdot 1 = 18 - (84 - 18 \cdot 4) \cdot 1 = 18 \cdot 5 - 84 \cdot 1 = (438 - 84 \cdot 5) \cdot 5 - 84 \cdot 1 = 84(-26) + 438(5) = 84(-26) - 438(-5)$$

$$156 = 6 \cdot 26 = 84(-26 \cdot 26) - 438(-5 \cdot 26) = 84(-676) - 438(-130)$$

$$\text{Solução particular: } x_0 = -676 \quad e \quad y_0 = -130$$

$$\text{Soluções: } x = -676 + (-438/6)t = -676 + 73t \quad y = -130 - (84/6)t = -130 - 16t.$$

- Demonstrar que se a e b são inteiros positivos primos entre si, então a equação diofantina $ax - by = c$ têm um número infinito de soluções inteiras e positivas.

Solução: A solução geral da equação $ax - by = c$ é $x = x_0 + (-b/d)t$ e $y = y_0 - (a/d)t$ onde x_0 e y_0 é uma solução particular e $d = \text{mdc}(a, b)$. As soluções serão positivas se $x_0 + (-b/d)t > 0 \Rightarrow x_0 - (b/d)t > 0 \Rightarrow (b/d)t < x_0$ (b e d são positivos) $\Rightarrow t < x_0 \cdot d/b$ e $y_0 - (a/d)t > 0 \Rightarrow t < y_0 d/a$. Como t é menor que os dois valores, existem infinitos valores para t e por conseguinte, uma infinidade de soluções inteiras e positivas para a equação.

- Expressar 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.

Solução: De acordo com o enunciado, sejam $7x$ e $11y$ os dois inteiros positivos.

Temos então $7x + 11y = 100$. Resolvendo $7x + 11y = \text{mdc}(7,11) = 1$ temos:

$$11 = 7 \cdot 1 + 4; \quad 7 = 4 \cdot 1 + 3; \quad 4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4 \cdot 1)1 = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = (11 - 7 \cdot 1)2 - 7 \cdot 1 = 7(-3) + 11(2)$$

$$\text{Como } 100 = 100 \cdot 1 \text{ temos } 100 = 7(-3 \cdot 100) + 11(2 \cdot 100) = 7(-300) + 11(200)$$

$$\text{As soluções são: } x = -300 + 11t \quad e \quad y = 200 - 7t.$$

Como x e y são inteiros positivos $-300 + 11t > 0 \Rightarrow t > 300/11 > 27$ e $200 - 7t > 0 \Rightarrow t < 200/7 \Rightarrow t < 29$. Portanto, $t = 28$. Neste caso temos $x = -300 + 11 \cdot 28 = 8$ e $y = 200 - 7 \cdot 28 = 4$. Os números são $7x = 7 \cdot 8 = 56$ e $11 \cdot 4 = 44$. Resposta: 56 e 44.

- Determinar o menor inteiro positivo que dividido por 8 e por 15 deixa os restos 6 e 13, respectivamente.

Solução: Seja n o número inteiro positivo. Pelo algoritmo da divisão temos: $n = 8x + 6$ e $n = 15y + 13$. Como n é positivo, os quocientes x e y devem ser positivos.

Assim, $8x + 6 = 15y + 13 \Rightarrow 8x - 15y = 13 - 6 \Rightarrow 8x - 15y = 7$.

Uma solução particular imediata dessa equação é $x = -1$ e $y = -1$. O menor valor de n será obtido ao tomar o menor valor de x e y que satisfaça a equação $8x - 15y = 7$. A solução geral da equação $8x - 15y = 7$ é: $x = -1 + (-15/1)t = -1 - 15t$ e $y = -1 - (8/1)t = -1 - 8t$. ($\text{mdc}(8,15) = 1$)

Como x e y devem ser ambos positivos: $-1 - 15t > 0 \Rightarrow t < -1/15$ e $-1 - 8t < 0 \Rightarrow t < -1/8$. Para satisfazer as duas condições, $t < -1/8$. O menor valor positivo de x e de y ocorre então para $t = -1$. Portanto: $x = -1 - 15(-1) = 14$ e $y = -1 - 8(-1) = 7$. Portanto $n = 8 \cdot 14 + 6 = 118$ ou $n = 15 \cdot 7 + 13 = 188$. Resposta: 188.

- Uma garota recebeu R\$ 50,00 para comprar dois tipos de lanches para um piquenique com suas amigas. Depois de pesquisar, conseguiu o preço de R\$ 4,00 por hambúrguer e de R\$ 6,00 por mini-pizza. De quantas maneiras ela pode comprar a sua parte do lanche para o piquenique?

Para resolvermos este problema devemos ter em mente que a solução precisa envolver números inteiros, pois a garota não pode comprar fração do hambúrguer, nem fração da mini-pizza. É, portanto típico de uma equação diofantina.

Façamos x como sendo a quantidade de hambúrgueres e y como sendo a quantidade de mini-pizzas. Então, temos que:

$$4x + 6y = 50, \text{ ou melhor, ainda } 2x + 3y = 25 \quad (I)$$

Como o $\text{mdc}(2,3) = 1$ e 1 divide 25, logo é possível termos soluções inteiras.

Uma solução possível seria: $x = 2$ e $y = 7$, pois de (I), temos

$$2(2) + 3(7) = 25$$

Seja um inteiro t . Observando os coeficientes de x e y (2 e 3, respectivamente) e que o $\text{mdc}(2,3) = 1$, podemos escrever que:

$$x = (2) + 3t \quad \text{e} \quad y = (7) - 2t$$

Como $x, y > 0$ temos que $2 + 3t > 0$ e $7 - 2t > 0$

Resolvendo cada uma delas temos que $t > -2/3$ e $t < 3,5$

Os valores inteiros de t que se encontram no intervalo são: 0, 1, 2 e 3

Logo, as soluções possíveis são:

Quando $t=0$, temos $x=2$ e $y=7$

Quando $t=1$, temos $x=5$ e $y=5$

Quando $t=2$, temos $x=8$ e $y=3$

Quando $t=3$, temos $x=11$ e $y=1$

Ou seja, a garota poderia comprar com os R\$ 50,00:

2 hamburguês e 7 mini-pizzas ou

5 hamburguês e 5 mini-pizzas ou

8 hamburguês e 3 mini-pizzas ou

11 hamburguês e 1 mini-pizza

- Uma peça de teatro vende ingressos e cobra R\$7,50 por criança e R\$18,00 por adulto. Numa noite arrecadou-se R\$900,00. Quantos espectadores assistiram ao espetáculo, sabendo que havia mais adulto do que crianças?

Solução: Seja x o número de crianças, y o número de adultos que assistiram.

Temos que resolver então a equação Diofantina

$$7,5x + 18y = 900 \text{ sob a condição adicional } y > x \geq 0 .$$

$$\text{Ou seja, } 15x + 36y = 1800 .$$

Observando-se ainda $\text{mdc}(15, 36) = 3|1800$, esta equivale a

$$5x + 12y = 600 (*).$$

Como $(120, 0)$ é obviamente uma solução de $(*)$, vemos que a solução geral de $(*)$

$$\text{é dada por } \begin{cases} y = -5t \\ x = 120 + 12t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

De $y > x \geq 0$ decorre $-5t > 120 + 12t \geq 0$ e daí

$$-7,05\dots = -120/17 > t \geq -120/12 = -10,$$

ou seja,

$$-10 \leq t < -7,05\dots, \text{ o que dá}$$

$$t \in \{-10, -9, -8\}$$

As 3 possíveis soluções são então:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12y \\ y = 45 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases}$$

- Uma pessoa foi ao banco para descontar um cheque no valor de x reais e y centavos.

O caixa do banco errou na leitura do valor do cheque e pagou y reais e x centavos. A pessoa guardou o dinheiro no bolso sem verificar a quantia. No caminho de casa, ela gastou cinco centavos e quando chegou em casa verificou que tinha exatamente o dobro do valor do cheque. Sabendo-se que essa pessoa não levou dinheiro nenhum consigo quando foi ao banco, pergunta-se qual era o valor do cheque.

Dicas para a solução:

a) 1 real = 100 centavos, logo, x reais = $100x$ centavos.
Analogamente, y reais = $100y$ centavos.

b) o cheque de x reais e y centavos vale, pois, $100x + y$ centavos.

c) o valor pago pelo caixa, de y reais e x centavos vale, então, $100y + x$ centavos.

d) como a pessoa gastou 5 centavos e ao chegar em casa constatou possuir o dobro do valor do cheque, é lícito escrever: $(100y + x) - 5 = 2(100x + y)$

e) Simplificando essa igualdade, você obterá $98x - 199x = 5$, que é exatamente a equação diofantina resolvida no item 3.2 acima. Como a solução com dois dígitos decimais é $x = 31$ e $y = 63$, é trivial concluir que o valor do cheque é R\$31,63.

Verificação:

Valor do cheque = 31,63
 O caixa pagou 63,31
 Tirando os cinco centavos: $63,31 - 0,05 = 63,26 = 2 \cdot 31,63$
 Lembre-se que 5 centavos = R\$0,05

Bibliografia

Disponível

em: <http://ellalves.net.br/textos/conteudo/20/teoria_dos_numeros_exercicios_de_equacoes_diofantinas> acessado em 06/11 às 14:13

Disponível em: <<http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/diofantina.html>> acessado em 06/11 às 14:20

Disponível em: <<http://www.mat.unb.br/~maierr/tnotas.pdf>> acessado em 03/11 às 17:24