Universidade Federal de Goiás – Câmpus de Catalão

Departamento de Matemática

Seminário Semanal de Álgebra

APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NAS POTÊNCIAS DE MATRIZES

Aluno: Ana Nívia Pantoja

Daniela Rodrigues

Vinícius Elias de Godoy

Orientador: Igor dos Santos Lima

Catalão, 15 de Outubro de 2013

1. **Resumo**

Neste seminário, foi demonstrado de uma maneira mais fácil e didática, como efetuar cálculos de potência de matrizes semelhantes a uma diagonal. Para isto, foram lembrados alguns conceitos básicos da álgebra linear, como: espaço vetorial, subespaço vetorial, base vetorial, transformação linear, diagonalização de operadores e autovalores e autovetores. Tendo em mente estes conceitos, foram calculadas as potências de matrizes.

2. **Embasamento Teórico**

2.1 – Espaço Vetorial

Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e subtração por um escalar, isto é,

$\forall$ u, v $\in$ V, u+v $\in$ V

$\forall$ $\alpha \in$ **R**, $\forall$ u $\in$ V, αu $\in$ V

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre REAIS) se forem verificadas as seguintes propriedades:

A) Em relação à adição:

A_1) (u + v) + w = u + (v + w), $\forall$ u, v e w $\in$ V;

A_2) u + v = v + u, $\forall$ u, v $\in$ V;

A_3) $\exists$ 0 $\in$ V, $\forall$ u $\in$ V, u + 0 = u;

A_4) $\forall$ u $\in$ V, $\exists$ (-u) $\in$ V, u + (-u) = 0.

M) Em relação à multiplicação para escalar:

M_1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

M_2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

M_3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

M_4) $1u = u$.

Para $\forall$ u, v $\in$ V e $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Exemplo 1.

O conjunto V = $\mathbf{R}^2 = \{(x,y)/\ x, y \in \mathbf{R}\}$ é espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um numero real definidas por:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x,\alpha y).$$

Solução:

Devemos verificar as oito propriedades. Sejam $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$ e $w = (x_3,y_3)$ pertencentes a **V**.

$\mathbf{A_1.}$ $(u + v) + w = [(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] + (x_3,y_3)$

$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) + (x_3,y_3)$

$= (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3)$

$= (x_1,y_1) + (\ x_2 + x_3,\ y_2 + y_3)$

$= (x_1,y_1) + [(x_2,y_2) + (\ x_3,y_3)] = u + (v + w)$

$\mathbf{A_2.}$ $u + v = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$

$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1,\ y_2 + y_1)$

$= (x_2,y_2) + (x_1,y_1)$

$= v + u$

$\mathbf{A_3.}$ $\exists$ $(0,0) \in \mathbf{V}$, tal que:

$u + 0 = (x_1,y_1) + (0,0)$

$= (x_1,y_1) = u$

A_4. $\exists$ (-u) $\in$ **V**, tal que:

$$u + (-u) = (x_1,y_1) + (-x_1,-y_1)$$

$$= (x_1-x_1,y_1-y_1)$$

$$= (0,0)$$

M_1. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

$$(\alpha\beta)(x_1,y_1) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1)$$

$$= \alpha(\beta x_1, \beta y_1)$$

$$= \alpha(\beta(x_1,y_1))$$

$$= \alpha(\beta u)$$

M_2. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$= (\alpha + \beta)(x_1,y_1)$$

$$= [(\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1]$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$$

$$= \alpha u + \beta u$$

M_3. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$$\alpha(u + v) = \alpha ((x_1,y_1) + (x_2, y_2))$$

$$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$= \alpha u + \alpha v$$

M_4. $1u = u$

$\exists$ 1 tal que:

$$1u = 1(x_1,y_1) = (x_1,y_1) = u$$

Portanto, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ é espaço vetorial.

2.2 – Subespaço Vetorial

Um subconjunto S, não vazio, de um espaço vetorial V, é um subespaço se forem satisfeitas as seguintes condições:

A_1) Para qualquer u, v $\in$ S, tem-se que:

$u + v \in S$;

A_2) Para qualquer $\alpha \in \mathbf{R}$, $u \in S$ tem-se que:

$\alpha u \in S$.

Obs.: Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto {0}, chamado subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V.

Exemplo 2.

Sejam $V = \mathbf{R}^2$ e $S=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y=2x\}$ ou $S=\{(x,2x);\ x \in \mathbf{R}\}$.

Solução:

Sendo $S \neq 0$, pois $(0,0) \in S$.

Devemos verificar as propriedades a e b. Para isso, sejam $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2,y_2) \in S$ e $\alpha \in \mathbf{R}$;

a) $u \in S \Rightarrow u = (x_1, 2x_1)$

$v \in S \Rightarrow v = (x_2, 2x_2)$

$u + v = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2)$

$= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$

$= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in S$

Logo $u + v \in S$.

b) $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1)$

$= (\alpha x_1, 2\alpha x_1) \in S$

Logo $\alpha u \in S$.

Portanto S é um subespaço vetorial de **V**.

Exemplo 3.

Solução:

Sejam V= $\mathbf{R}^3$ e S={(x,y) ∈ $\mathbf{R}^3$ / ax + by + cz=0}.

Sendo S ≠ 0, pois (0,0) ∈ S.

Devemos verificar as propriedades a e b. Para isso, sejam u = (x_1,y_1,z_1) e v = (x_2,y_2,z_2) ∈ S e α ∈ **R**;

a) u ∈ S => $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$
   v ∈ S => $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$
   Somando as duas igualdades:
   $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0 \in S$
   Logo, u + v = $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$

b) αu ∈ S
   u ∈ S => $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$
   αu => $a\alpha x_1 + b\alpha y_1 + c\alpha z_1 = 0 \in S$
   Logo αu ∈ S.

Portanto S é subespaço vetorial de **V**.

Exemplo 4.

Solução:

Sejam V= $\mathbf{R}^4$ e S={(x,y,z,0); x,y,z ∈ **R**}.

Sendo S ≠ 0, pois (0,0) ∈ S.

Devemos verificar as propriedades a e b. Para isso, sejam u = $(x_1,y_1,z_1,0)$ e v = $(x_2,y_2,z_2,0)$ ∈ S e α ∈ **R**;

a) $u \in S \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, 0)$

$v \in S \Rightarrow (x_2, y_2, z_2, 0)$

$u + v = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2, z_1 + z_2, 0) \in S$

Logo $u + v \in S$.

b) $\alpha u \in S$

$\alpha u = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1,\ \alpha 0) \in S$

Portanto S é subespaço vetorial de **V**.

2.3 – Base Vetorial

Um conjunto $B=\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

A) B é L.I. (linearmente independente – se há uma combinação linear do tipo: $a_1 v + ... + a_n v_n = 0$ que implica que $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$);

B) B gera V.

Exemplo 5.

Verifique se $B = \{(1,1), (-1,0)\}$ é base de $\mathbf{R}^2$.

Solução:

a) B é L.I.

$a_1(1,1) + a_2(-1,0) = (0,0)$

$a_1 - a_2 = 0$

$a_1 = 0 \quad a_2 = 0$

Portanto, B é L.I.

b) B gera $\mathbf{R}^2$

Para todo $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, tem-se que:

$(x,y) = a(1,1) + b(-1,0)$

$a - b = x \Rightarrow b = y - x$

$a = y$

Portanto, $(x,y) = y(1,1) + (y - x)(-1,0)$.

Como a) e b) são válidos segue que B é uma base de $\mathbf{R}^2$.

Exemplo 6.

O conjunto $B=\{1,x,x^2,...,x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n.

Solução:

a) B é L.I.
$a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$
Tem-se que $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.
Portanto, B é L.I.

b) B gera P_n
Para qualquer $p \in P_n$, tem-se que:
$p = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
Logo, B gera P_n.
Portanto B é uma base para P_n.

2.4 – Transformações Lineares

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se: $T: V \rightarrow W$.

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é chamada transformação linear se:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, com u e $v \in V$.

ii) $T(k.u) = k. T(u)$, com $k \in R$ e $u \in V$.

Exemplo 7.

Seja $V = R^2$ e $W = R^3$. Uma transformação $T: R^2 \rightarrow R^3$ associa vetores $v = (x, y)$ com vetores $w = (x, y, z)$. $T: R^2 \rightarrow R^3$ definida por: $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear?

Solução: u e v $\in$ V, tal que u = (x_1, y_1) e v = (x_2, y_2)

*****T (u + v) = T(u) + T(v)

$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$

$(3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) = (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2)$

$(3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) = (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

*T(k.u) = k. T(u), com k $\in$ R e u $\in$ V.

$T(kx_1, ky_1) = (3kx_1, -2ky_1, kx_1 - ky_1) = k\,(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$

Como as duas condições foram satisfeitas, comprova-se que T(x, y) é uma transformação linear.

Exemplo 8.

T: R $\rightarrow$ R definida por x $\rightarrow$ T(x) = 3x + 1 é uma transformação linear?

Solução: u e v $\in$ V, tal que u = (x_1) e v = (x_2)

*****T (u + v) = T (u) + T (v)

$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$(3(x_1 + x_2) + 1) = (3x_1 + 1) + (3x_2 + 1)$

$3x_1 + 3x_2 + 1 \neq 3x_1 + 3x_2 + 2$

Como não satisfaz a primeira condição, a transformação não é linear.

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais e T: V $\rightarrow$ W uma transformação linear, então T(0) = 0.

Exemplo 9.

Verifique se T: $R^4 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y, z, w) = (x + y + 1, z – w -2), é linear.

Solução:

Pelo Teorema descrito acima, T(0) = 0 para que a transformação seja linear.

T(0) = (1, -2).

Como a transformação do vetor nulo não resulta em um vetor nulo comprova-se que a transformação não é linear.

2.5 – Autovalores e Autovetores

Definição: Sejam V um espaço vetorial e T: V→*V* um operador linear. Dizemos que um escalar λ é um autovalor de T, se existe um vetor não nulo v ∈ V tal que T(v) = λv. Neste caso, dizemos que v é um autovetor de T, associado ao autovalor λ.

De um modo geral toda transformação T: $R^2 \to R^2$, v→ αv, α ≠ 0 tem α como autovalor e qualquer (x, y) ≠ (0,0) como autovetor correspondente. Observe que T(v) é sempre um vetor de mesma direção que v.

1)α<0, T inverte o sentido do vetor.

2)l αl>1, T dilata o vetor.

3)l αl<1,T contrai o vetor.

4) α=1, T é a identidade.

Exemplo 10.

Seja T: $R^2 \to R^2$, onde

(x, y) →T(x, y) = (4x+5y, 2x+y).

Verifique se v= (5,2) é um autovetor de T.

Solução:

Por definição,

Tv=λv

Tv=T(5,2) = (4(5)+5(2), 2(5)+2)

=T(5,2) = (30,12) =6(5,2) =6v

Logo, v= (5,2) é um autovalor de T e λ=6 é o autovalor associado a v.

Exemplo 11.

Considere agora v= (1,1). Verifique se v é autovalor do operador T.

Solução:

Tv=λv

$Tv=T(1,1) = (4(1)+5(1), 2(1)+1)$

$=T(1,1) = (9,3) =3(3,1)$

Logo, $Tv \neq \lambda v$.

Portanto v(1,1) não é um autovetor de T.

2.6 – Autovalores e autovetores de uma matriz

Consideremos de agora em diante, apenas os espaços vetoriais onde $V = R^n$ e as operações lineares definidas por:

$T: R^n \rightarrow R^n$

$v \rightarrow T(v) = Av$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n.

Por definição, $v \neq 0$ é um autovetor de T se:

$T(v) = \lambda v$.

Assim, $T(v) = Av = \lambda v$

Equivalentemente,

$Av - \lambda v = 0 \leftrightarrow (Av - \lambda Iv) = 0$, onde I é a matriz identidade ($Iv = v$).

Assim, podemos escrever:

$(A - \lambda I)v = 0$ (sistema linear homogêneo)

Queremos determinar as soluções não nulas do sistema homogêneo, ou seja,

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Exemplo 12.

Seja $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine os autovalores e autovetores de A.

Solução:

Det(A-λI)=0

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ = (1-λ) (3-λ)-8=0

$=3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-8=0$

$=\lambda^2-4\lambda-5=0$

As raízes são $\lambda_1=5$ e λ2=-1, ou seja, $\lambda_1=5$ e λ2=-1 são os autovalores da matriz A.

Calculando os autovetores v associados a $\lambda_1=5$ tal que

Av= λv

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x=y$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 5$ são os vetores v= (x, x), x ≠0 (ou v= (y, y)).

Para λ2=-1, temos:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x=-2y$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são os vetores v= (x, -1/2x), x ≠0 (ou v= (-2y, y)).

Exemplo 13:

Seja A = $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, determine os seus autovalores e autovetores:

Solução:

Det (A-λI) =0

$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 6 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -5\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

As raízes são $\lambda_1=2$ e λ2=3, ou seja, $\lambda_1=2$ e λ2=3 são os autovalores da matriz A.

Calculando os autovetores v associados a $\lambda_1=2$ tal que

$Av = \lambda v$

$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x + 6y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3y$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ são os vetores v= (x, 1/3x), x $\neq$0 (ou v= (3y, y)).

Para $\lambda_2 = 3$, temos:

$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2=3$ são vetores da forma v = (x, 1/2x), x $\neq$ 0 (ou v= (2y, y).

2.7 Quando uma matriz é diagonalizável

Uma matriz é diagonalizável se ela obtiver tantos autovetores distintos quanto for a dimensão do espaço e seguir esta forma:

$$\mathbf{A=PDP^{-1}}$$

onde A é a matriz, D a matriz de seus autovalores na diagonal principal, P a matriz dos autovetores, e P^{-1} a matriz inversa dos autovetores.

Dada uma matriz A, podemos sempre também formar uma transformação linear do tipo T(v)=Av. Por isso, também dizemos que A é diagonalizável se, e somente se, a transformação linear T definida por T(v)=Av for diagonalizável.

Exemplo 14:

Verifique se A é diagonalizável, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Det (A-λI) =0

$.=\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

Resolvendo o determinante através da regra de Sarrus, obtemos a equação:

$= (-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda) = (2-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda)+2] = (2-\lambda)[\lambda^2-3\lambda+2] = (2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)] = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$

Obtemos, assim, a Equação característica: $(2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$, que tem como autovalores $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$ e $\lambda_3=1$.

Autovetores

$\lambda_1=\lambda_2=2 \rightarrow v_1=(-1, 0,1)$, $v_2=(0, 1,0)$

$\lambda_3= v_3=(-2, 1,1)$

Existem três autovetores linearmente independentes, portanto A é diagonalizável.

3. Potências de matrizes

Calcular a potência de uma matriz nem sempre é uma tarefa fácil. Perceba que calcular A^n equivale a multiplicar A por A por A n vezes. A seguir explicaremos como calcular a n-ésima de uma matriz diagonalizável de um modo relativamente simples.

Em primeiro lugar observamos que se D for uma matriz diagonal então, calcular D^n é bem simples. Se D é diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

então

$$D^n = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k^n \end{pmatrix}.$$

Observamos que se A é diagonalizável e D sua forma diagonal,

$$A = P\ D\ P^{-1}$$

temos,

$$A^2 = A\ A = (P\ D\ P^{-1})\ (P\ D\ P^{-1}) = P\ D^2\ P^{-1}.$$

onde calcular D^2,como vimos, é muito simples.

Em geral, se A é diagonalizável, como acima, indutivamente podemos escrever que:

$$A^n = P\ D^n\ P^{-1}$$

Exemplo 15:

Calcule A^{2013} onde $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Det (A-λI) =0

$$.=\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Resolvendo o determinante através da regra de Sarrus, obtemos a equação:

$= (-\lambda)\ (2-\lambda)\ (3-\lambda) + 2(2-\lambda) = (2-\lambda)\ [(3-\lambda)\ (-\lambda) + 2] = (2-\lambda)\ [\lambda^2 - 3\lambda + 2] = (2-\lambda)\ [(2-\lambda)\ (1-\lambda)] = (2-\lambda)^2 (1-\lambda) = 0$

Obtemos, assim, a Equação característica: $(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$, que tem como autovalores $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$ e $\lambda_3=1$.

Autovetores

$\lambda_1=\lambda_2=2 \rightarrow v_1=(-1, 0,1)$, $v_2=(0, 1,0)$

$\lambda_3= v_3=(-2, 1,1)$

-Existem três autovetores linearmente independentes, portanto A é diagonalizável.

$P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Matriz dos autovetores que diagonaliza A.

$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, Matriz inversa dos autovetores de p.

$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Matriz dos autovalores de A.

Para calcular a potência de uma matriz diagonalizável, utilizamos a seguinte fórmula:

$A^n=PD^nP^{-1}$

Queremos calcular a potência de uma matriz elevada a 2013.

$A^{2013}=PD^{2013}P^{-1}$

$A^{2013}=2013\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2013}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{2013}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2013} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Que é mais fácil da calcular.

Exemplo 16:

Calcular A^{23}onde $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solução:

A matriz A tem como autovalores $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=6$ com respectivos autovetores $v_1= (2, -1)$ e $v_2= (2,1)$.

Portanto, a

$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

$A^{23}=PD^{23}P^{-1}$

$A^{23}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{23}\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

$A^{23}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{23} & 0 \\ 0 & 6^{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Que é mais fácil de calcular.

4. Referências

- BOLDRINI, José Luiz e outros. Álgebra Linear, 3a ed., Harbra, São Paulo, 1986.

- STEINBRUCH, A,; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2a ed., São Paulo, Editora Makron Books, 1987.