Notas de aula

Números de Mersenne, Perfeitos, Deficientes e Abundantes.

Aline Barbosa Nascimento

Gesiel Gomes Moreira

Mônica Gonçalves da Silva

Orientador: Igor Lima

Resumo

Neste seminário iremos falar sobre Números de Mersenne, perfeitos, deficientes e abundantes. Demonstraremos algumas preposições e teoremas, vamos também fazer algumas aplicações, pois são temas fundamentais no campo da Teoria dos Números.

Preliminares

Números deficientes, abundantes e perfeitos

Além da função $\tau(n)$, da quantidade dos divisores de n, introduzimos agora:

1.1 Definição.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ indicamos por $\sigma(n) = \sum_{(t|n)} t$ a *soma* de todos os divisores naturais de n.

1.2 Proposição

Seja $n = p^a$ *para algum primo p e* $a \in \mathbb{N}_0$. Então $\sigma(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$

Demonstração: Temos que $\{ 1, p, p^2, \ldots, p^a \}$ são os divisores deste n. Logo,

$$\sigma(p^a) = \sum_{t|n} t = \sum_{k=0}^{a} p^k = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

É claro que $\sigma(n) = 1 + n = \ldots \geq n=1 > n$ para todo $n \geq 2$.

Também: $\sigma(n) = n+1 \Longleftrightarrow n = p$ é primo.

Exemplo:

σ(1) = 1,

σ(p) = p + 1, se p é primo,

σ(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12, σ (12) = 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 12 = 28.

Procuramos classificar os números naturais agora sob o aspecto de comparar σ(n) com n, pela seguinte

1.3 Definição

Um número n ∈ IN chama-se

a) *Deficiente,* se σ(n) < 2n
b) *Abundante, se σ(n) > 2n*
c) *Perfeito, se σ(n) = 2n.*

Exemplos:

n = 15: σ(15) = 24 2n = 30 σ(15) < 2 x 15. Portanto, 15 é deficiente.

n = 12: σ(12) = 28 2n = 24 σ(12) > 2 x 12. Portanto, 12 é abundante.

n = 6: σ(6) = 12 2n = 12 σ(6) = 2 x 6. Portanto, 6 é perfeito.

1.4 Observações

A função real $y = \frac{x}{x-1}$ *é decrescente e vale 1<* $\frac{x}{x-1}$ *≤ 2.*

1.5 Proposição

a) *Se p é primo e a∈IN, então* p^a *é deficiente.*

b) $3x2^k$ *é abundante para todo k ≥ 2.*

Demonstração: a) Usando-se 1.2 e 1.4, obtemos

$$\sigma(p^a) = \sum_{t|p^k} t = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} < p^a.\frac{p}{p-1} \leq 2\ .p\hat{}a$$

b)

$$\sigma(3.2^k) = 1+2+4+\cdots+2^{k-1}+2^k+3+3\,.2+3\,.4+\cdots+3\,.2^k = 2\,.2^k\,(4-\frac{1}{2^{k-1}} > 2.(2^k.3)$$

, pois k ≥ 2.

1.6 Proposição

Sejam 2< p < q primos. Então, para todos os a, b ∈IN, o número

$$n = p^a.q^b \text{ é deficiente.}$$

Demonstração

$$\sigma(n) = 1 + p + \cdots + p^a + q(1 + p + \cdots + p^a) + \cdots + q^{b(1+p+\cdots+p^a)} =$$

$$(1 + p + \cdots + p^a)(1 + q + \cdots + q^b) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} . \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} < \frac{p^{(a+1)} q^{b+1}}{(p - 1)(q - 1)} =$$

$$= p^a q^b . \frac{pq}{(p - 1)(q - 1)} = n . \frac{p}{p - 1} . \frac{q}{q - 1} \leq n . \frac{3}{3 - 1} . \frac{5}{5 - 1} = \frac{15}{8} n < 2n$$

Usando-se a função $\frac{x}{x-1}$ é decrescente (1.4) e p ≥ 3, q ≥ 5.

1.7 Observação

Sejam n, m ∈IN com mdc(m,n) =1. Então

a) $d|mn \iff d = st \text{ com } s|n \text{ e } t|m.$

b) Se $s_1, s_2 | n$ e $t_1, t_2 | m$ e se $s_1t_1 = s_2t_2$, então $s_1 = s_2$ e $t_1 = t_2$.

(i.e. os divisores mn são obtidos de forma única, por combinação dos divisores de n com os de m.)

Demonstração:

a) " ⇐ " é claro.
"⇒ " : Sejam $n = \prod_{k=1}^{r} p^a k_k$ e $m = \prod_{k=1}^{r'} q_k^{a_k}$ as decomposições primárias de n e m. Como $mdc(m, n) = 1$, temos que $mn = p_1^{a_1} . \ \ldots \ . p_r^{a_r} . q_1^{b_1} . \ldots \ . q_{r'}^{b_{r'}}$ é a decomposição primária de mn. Portando se $d|mn$, então $d = p_1^{l_1} . \ldots . p_r^{l_r} q_1^{u_1} . \ldots \ . q_{r'}^{u_{r'}}$ com $0 \leq l_1 \leq a_1, \ldots, 0 \leq l_r \leq a_r, 0 \leq u_1 \leq b_1, \ldots, 0 \leq u_r \leq b_r$,. Com $s = p_1^{l_1} . \ldots p_r^{l_r}$ e $t = q_1^{u_1} . \ldots . q_{r'}^{u_{r'}}$ temos assim $d = st, s|n \text{ e } t|m$.

b) Também este item é facilmente verificado pela comparação das decomposições primárias de s_1t_1 e s_2t_2.

Números Perfeitos

Número perfeito é um número inteiro para o qual a soma de todos os seus divisores positivos próprios (excluindo ele mesmo) é igual ao próprio número.

6 = 1 + 2 + 3,

28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,

496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,

8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Exemplo:

O número 28, cujos divisores próprios são 1, 2, 4, 7 e 14, e a soma dos seus divisores próprios é 28.

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Exemplo:

Um número é abundante se a soma de seus divisores próprios (não inclui o próprio número) é maior do que ele mesmo. É o caso, por exemplo, do número 12.

D (12) = { 1; 2; 3; 4; 6; 12} somando, 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12

Exemplo:

Um número é deficiente se a soma de seus divisores próprios é menor que o próprio número. É o caso, por exemplo, do número 15.

D (15) = { 1; 3; 5 } somando, 1 + 3 + 5 = 9 < 15

Exemplo:

Quais são os números abundantes menores que 100? Eles são pares ou impares?

Resposta:

Existem apenas 21 números abundantes menores que 100 e são todos pares; o primeiro número abundante ímpar é 945.

Teorema de Euclides/Euler

Provaremos agora uma classificação dos *números perfeitos pares,* que devemos a Euclides e Euler.

Lembrando: $n \in IN$ é *perfeito,* se σ(n) = 2n.

1.8 Teorema

a) (EUCLIDES) Se k≥ 2 *é tal que p* = 2^k-1 é primo.

Como $mdc\ (2^{k-1}, 2^k - 1) = 1,$ calculamos

$\sigma(n) = \sigma\left(2^{k-1}.(2^k-1)\right) = \sigma(2^{k-1}).\sigma(2^k-1) = (1+2+\cdots+2^{k-1})(1+p) = (2^k-1)(1+p) = (2^k-1).2^k = 2\,.2^{k-1}(2^k-1) = 2n,$
mostrando que $n - 2^{k-1}(2^k-1)$ é perfeito.

b) Seja n um número perfeito qualquer par. Podemos escrever $n = 2^{k-1}m$ com k ≥ 2 e m ímpar. Como n é perfeito, concluímos

$$2^k m = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^{k-1}m) = \sigma(2^{k-1}).\sigma(m) = (2^k-1).\sigma(m)$$

Segue então $2^k - 1|2^k m$. Como $mdc\,(2^k-1, 2^k) = 1$, concluímos que $2^k - 1|m$. Logo, existe um $M \in IN$ com $(2^k-1)M = m$. Além disso, temos $M \neq n$, pois $k \geq 2$. Assim, $2^k(2^k-1)M = 2^k m = (2^k-1)\sigma(m)$, ou seja
$2^k M = \sigma(m) \geq m + M = 2^k M$.

Portando $\sigma(m) = M + m$. Concluímos que M e m s]ao únicos divisores de m. Particularmente , $M = 1$ e $m = 2^k - 1$ é primo. Logo, n tem a forma afirmada $n = 2^{k-1}(2^k-1)$ com $2^k - 1$ primo.

Na terceira coluna da seguinte tablea temos os primeiros números perfeitos:

k	2^k-1	$2^{k-1}\left(2^k-1\right)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128
13	8191	33550336
17	131071	$65536 \cdot 131071$
19	524287	$262144 \cdot 524287$
31	$2^{31}-1$	$2^{30}\left(2^{31}-1\right)$
⋮	⋮	⋮
44497	$2^{44497}-1$	$2^{44496}\left(2^{44497}-1\right)$
⋮	⋮	⋮

Devemos mencionar que: *é desconhecido se existe algum número perfeito ímpar.*

Números de MERSENNE

1.9 Definição

Os números de sequencia $(2^k-1)_{k\geq 2}$ chamam-s3 os *números de MERSENNE.*

Colocamos $M_k = 2^k - 1 \quad k = 2,3,4,\ldots$

Assim, a sequencia dos números de *MERSENNE* começa como

$(M_{k)_{k\geq 2}} = (\ 3,7,15,31,63,127,255,511,1023,\ldots,2^k-1,\ldots).$

Particularmente interessa, quando um M_k é primo. Uma condição *necessária* para que M_k possa ser primo é dada na

1.10 Proposição

Se M_k *for primo, então* $k = p$ *é primo.*

Esta condição necessária certamente *não é suficiente, pois*

$M_{11} = 2047 = 23\ .89$ não é primo, apesar de $k = 11$ ser primo.

Essa demonstração (1.10) é consequência da seguinte

1.11 Observação

Sejam $2 \leq a, k \in IN.$

Seja $a^k - 1$ *for primo, então* $a = 2$ *e* k *é primo.*

Demonstração: Temos, (fazendo-se $k-1=n$)

$a^k - 1 = (a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{k-1})$

Com$(1+a+\cdots+a^{k-1}) > 1$, pois $k \geq 2$. Ora se $a^k - 1$ for primo, concluímos $a-1=1,$ ou seja $a = 2.$

Seja $k = rs$ composto com $1 < s \leq r < k.$ Temos (com $a = 2^r$ *e* $n+1=s$) a decomposição $(2^k - 1 = (2^r-1)(1+2^r+2^{2r}+\cdots+2^{(s-1)r})$ na qual $2^r - 1 > 1$ *e* $1+2^r+\cdots+2^{(s-1)r} > 1,$ pois $s > 1.$ Logo 2^k-1 não é primo quando k é composto.

Assim,

$\{M_k \,|2 \leq k \in IN\} \cap IP = \{M_k \in IP\} \cap IP$

Ao procurar primos M_k na sequencia dos números de MERSENNE, somente os *índices* $k = p\ primos$ interessam.

1.12 Definição

Um número M_p com $p \in IP$ chama-se um $primo\ de\ Mersenne$ se M_p fôr primo.

- Os primeiros primos de MERSENNE para $p = 2,3,5, \ldots$ são:
  $M_2 = 3, M_3 = 7, M_5 = 31, M_7 = 127, M_{13} = 8191, M_{17} = 131071, M_{19} = 525287, \ldots$

Entretanto, $23|M_{11},\ 47|M_{23},\ \ 233|M_{29}, \ldots$

Ainda mencionamos o resultado de COLE(1902):

$M_{67} = 193797721 \,.761838257287$

onde 193707721 é o *menor* divisor primo de M_{67} !!

Nota:

Em Maio de 2004, para p = 24036583, o 41° e por enquanto o maior primo de MERSENNE

$M_p = 2^{24036583} - 1$

Foi encontrado por Josh Findley. Ele possui entre 7 e 8 milhoes de dígitos (pois $log_{10} 2^{24036583} = 24036584 \,. log_{10} 2 = 24036583 \,.0{,}3010 \approx 7{,}235 \,.10^6$). O *número perfeito correspondente* - com mais de 14 milhões de dígitos – é

$P = 2^{24036583} \,.(2^{24036583} - 1).$

O penúltimo (40°) primo de MERSENNE foi encontrado em Novembro de 2003 por Michael Shafer para $p = 20996011:$

$M_{20996011} = 2^{20996011} - 1.$

Exemplos:

Números de Mersenne

Seguindo a forma Mn = 2n-1, temos:

$M_1 = 2^1 - 1 = 1$
$M_2 = 2^2 - 1 = 3 \rightarrow$ n = 2 (primo), $M_2 = 3$ (primo)
$M_3 = 2^3 - 1 = 7 \rightarrow$ n = 3 (primo), $M_3 = 7$ (primo)
$M_4 = 2^4 - 1 = 15$
$M_5 = 2^5 - 1 = 31 \rightarrow$ n = 5 (primo), $M_5 = 31$ (primo)
$M_6 = 2^6 - 1 = 63$
$M_7 = 2^7 - 1 = 127 \rightarrow$ n = 7 (primo), $M_7 = 127$ (primo)
$M_8 = 2^8 - 1 = 255$

$M_9 = 2^9 - 1 = 511$
$M_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$
$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 \rightarrow n = 11$ (primo), $M_{11} = 2047$ (não é primo)
$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191 \rightarrow n = 13$ (primo), $M_{13} = 8191$ (primo)

Referências

Apostila de Teoria dos Números –Prof. Lineu Neto – UnB

Apostila de Teoria dos Números – Prof. Rudolf Mayer - UnB