

ANEL DE GRUPO

Alan Rodrigues dos Santos - alansantos2102@hotmail.com

Jean Duarte e Silva - jeansilvapdr@gmail.com

Danilo S. da Silveira – sancaodanilo@gmail.com

Resumo

Dados um grupo G e um anel R , vamos usar as operações de G e R para construir um novo anel RG chamado anel de grupo de G sobre R . Por fim, veremos sobre quais condições o anel RG é comutativo.

Introdução

Anel de grupo é um assunto antigo na história da Teoria Abstrata de Grupos, aparecendo implicitamente num artigo de A.Cayley em 1854, e posteriormente formalizado por T. Molien em 1897. Na atualidade, este assunto é bastante pesquisado, ocupando lugar importante em reuniões internacionais de teoria: de grupos, anéis, álgebras e representações, e são publicados diversos artigos relacionados a esse assunto.

Preliminares

Definição: Dizemos que um conjunto não vazio G juntamente com uma operação binária

$$*: G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a * b$$

é um grupo se satisfaz as seguintes propriedades:

1. dados $a, b, c \in G$, tem-se $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$;
3. $\forall a \in G$, existe $b \in G$, tal que $b * a = a * b = 1$.

Dizemos que um grupo G é abeliano, quando $a * b = b * a \forall a, b \in G$.

Exemplo: O conjunto

$$S_3 := \{f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid f \text{ é uma função bijetora}\} = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}.$$

é um grupo se considerarmos a composição de funções como a operação binária no conjunto S_3 . De fato, é fechado para operação de composição, pois é bastante conhecido que a composição de duas bijeções é uma bijeção. Também é conhecido que a composição de funções é associativa. Ora, S_3 possui elemento neutro que é a função identidade de conjunto $\{1, 2, 3\}$. Por fim, sabemos que toda bijeção possui inversa.

Definição: Um anel é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munidos de uma operação denotada por $+$ (chamada adição) e de uma operação denotada por $\bullet$ (chamada multiplicação).

$$+: A \times A \rightarrow A \quad (a, b) \mapsto a + b$$

$$\bullet: A \times A \rightarrow A \quad (a, b) \mapsto a \bullet b$$

As quais devem satisfazer as seguintes condições:

- 1) $(A, +)$ é um grupo abeliano.
- 2) $\forall a, b, c \in A$, vale : $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
- 3) $\forall a, b, c \in A$, vale : $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ e $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$
- 4) $\forall x \in A$ existe $1 \in A$ tal que $1 \bullet x = x$ e $x \bullet 1 = x$

Exemplo: O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ com as operações $(+, \bullet)$ cujas tabuadas são dadas nas tabelas abaixo é um anel.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Anel de Grupo

Seja $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$ um grupo finito, e R um anel. Denotaremos por RG o conjunto de todas as somas formais da forma:

$\sum_{i=1}^n a_i g_i$, onde $a_i \in R$ e $g_i \in G$, ou seja,

$$RG = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i g_i \mid a_i \in R \text{ e } g_i \in G \right\}$$

Dados dois elementos de RG , $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i$, $\beta = \sum_{j=1}^n b_j g_j$, definimos a soma $\alpha + \beta$ por

$$\alpha + \beta = \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) + \left(\sum_{j=1}^n b_j g_j \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) g_i \in RG$$

e a multiplicação $\alpha \cdot \beta$ por:

$$\alpha \cdot \beta = \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j g_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j g_i g_j) \in RG$$

Proposição: O conjunto RG , com as operações definidas acima é um anel conhecido como anel de grupo de G sobre R .

Observações:

- 1) Elementos de RG que possuem coeficiente (elementos de R) igual a zero serão desconsiderados, por exemplo, $0g_1 + 0g_2 + a_1g_3 = a_1g_3$
- 2) Por simplicidade, identificaremos $1_R g_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.

Definição 1: Sejam

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i g_i \text{ elementos de do anel de grupo RG.}$$

Dizemos que $\alpha = \beta \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n$.

Perguntas

Pergunta 1: Quem é o elemento neutro multiplicativo ($1_{RG} = 1$) de RG?

$$1_{RG} = 1_R \cdot 1_G, \text{ pois}$$

$$(1_R \cdot 1_G) \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n 1_R a_i 1_G g_i = \sum_{i=1}^n a_i g_i$$

Pergunta 2: Quem é o inverso aditivo de α em RG?

$$\text{se } \alpha = \sum_{i=1}^n a_i g_i \Rightarrow -\alpha = \sum_{i=1}^n (-a_i) g_i.$$

De fato,

$$\alpha + (-\alpha) = \sum_{i=1}^n (a_i + (-a_i)) g_i = \sum_{i=1}^n 0 g_i = 0 = 0 g_1 + 0 g_2 + \dots + 0 g_n = 0_{RG}$$

Pergunta 3: Quando RG é comutativo, ou seja, quando que $\alpha\beta = \beta\alpha, \forall \alpha, \beta \in RG$?

Se RG for comutativo então para $\alpha = a g_i, \beta = b g_j$ tem-se:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

$$\alpha\beta = (a g_i)(b g_j) = a b g_i g_j$$

$$\beta\alpha = (b g_j)(a g_i) = b a g_j g_i$$

$$\Rightarrow ab = ba, \forall a, b \in R \Rightarrow R \text{ comutativo}$$

$$\Rightarrow g_i g_j = g_j g_i, \forall g_i, g_j \in G \Rightarrow G \text{ comutativo}$$

Ou seja, RG é comutativo se, e somente se, R é comutativo e G é abeliano.

Exemplo de Anel de Grupo

$$\mathbb{Z}_2 S_3 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i \mid a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}, f_i \in S_3 \right\}$$

$$A) (\bar{0}f_1) + (\bar{0}f_1 + (\bar{1}f_6)) = (\bar{0} + \bar{0})f_1 + \bar{1}f_6 = \bar{1}f_6$$

$$B) (\bar{0}f_1 + \bar{1}f_2 + \bar{0}f_5) + (\bar{0}f_1 + \bar{0}f_2) = (\bar{0} + \bar{0})f_1 (\bar{1} + \bar{1})f_2 \bar{0}f_5 = 0$$

$$C) (\bar{1}f_1)(\bar{0}f_1 + \bar{1}f_2) = \bar{1} \cdot \bar{0}f_{1 \circ 1} f_1 + \bar{1} \cdot \bar{1}f_{1 \circ 2} f_2 = \bar{1}f_{1 \circ 2} f_2$$

$$D) (\bar{1}f_1 + \bar{0}f_3)(\bar{1}f_1 + \bar{1}f_2 + \bar{1}f_8) = \bar{1} \cdot \bar{1}f_{1 \circ 1} f_1 + \bar{1} \cdot \bar{1}f_{1 \circ 2} f_2 + \bar{1} \cdot \bar{1}f_{1 \circ 8} f_8 + \bar{0} \cdot \bar{1}f_{3 \circ 1} f_1 + \bar{0} \cdot \bar{1}f_{3 \circ 2} f_2 + \bar{1} \cdot \bar{1}f_{3 \circ 8} f_8 = \bar{1}f_{1 \circ 2} f_1 + \bar{1}f_{1 \circ 2} f_2 +$$

$$E) (\bar{2}f_2) + (\bar{0}f_2 + \bar{1}f_3) = (\bar{0} + \bar{0})f_2 + \bar{1}f_3 = 1f_3$$

$$F) (\bar{0}f_2)(\bar{0}f_2 + \bar{1}f_3) = (\bar{0}.\bar{0})f_{2_0}f_2 + (\bar{0}.\bar{1})f_{2_0}f_3 = 0$$

$$G) (\bar{1}f_6)(\bar{0}f_3 + \bar{1}f_4 + \bar{1}f_2) = (\bar{1}.\bar{0})f_{6_0}f_3 + (\bar{1}.\bar{1})f_{6_0}f_2 + (\bar{1}.\bar{1})f_{6_0}f_2 = (\bar{1})f_{6_0}f_4 + (\bar{1})f_{6_0}f_2$$

$$\mathbb{Z}_4S_3 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i \mid a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} f_i \in S_3 \right\}$$

$$A) (\bar{2}f_2)(\bar{0}f_3 + \bar{1}f_4 + \bar{2}f_5) = \bar{0}f_{2_0}f_3 + \bar{2}f_{2_0}f_4 + \bar{0}f_{2_0}f_5 = \bar{2}f_{2_0}f_4$$

$$B) (\bar{3}f_2 + \bar{2}f_3)(\bar{1}f_6 + \bar{2}f_5) = \bar{3}f_{2_0}f_6 + \bar{2}f_{2_0}f_5 + \bar{2}f_{3_0}f_6 + \bar{0}f_{3_0}f_5 = \bar{3}f_{2_0}f_6 + \bar{2}f_{2_0}f_5 + \bar{2}f_{3_0}f_6$$

$$C) (\bar{2}f_2) + (\bar{0}f_2 + \bar{3}f_5) = (\bar{2} + \bar{0})f_2 + \bar{3}f_5 = \bar{2}f_2 + \bar{3}f_5$$

$$\mathbb{Z}_4Q_3 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i \mid a_i \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} f_i \in S_3 \right\} \text{ e } Q_3 \in \{ \bar{1}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \}$$

$$A) (\bar{2}i) + (\bar{2}i + \bar{3}j) = \bar{0}i + \bar{3}j$$

$$B) (\bar{1}k) + (\bar{2}k) = \bar{3}k$$

Referência Bibliográfica:

An Introduction to Group of Rings: Algebras e Applications-vol 1: Cesar Polcino Milies e S. K. Segal .