V Workshop de Álgebra
UFG-CAC

Só Funções

Francismar Ferreira Lima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

09 de novembro de 2016

Planejamento da Apresentação

1. Produto Cartesiano
2. Relação Binária
3. Funções
4. Gráfico de uma Função
5. Função Composta
6. Injeção, Sobrejeção e Bijeção
7. Função Inversa

Produto Cartesiano

Definição

O **produto cartesiano** entre dois conjuntos A e B não-vazios é o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

O elemento $(a, b) \in A \times B$ é chamado **par ordenado**. Dizemos que $(a, b), (c, d) \in A \times B$ são iguais, i.e.,

$$(a, b) = (c, d) \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Caso $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então definimos $A \times B := \emptyset$.

Observação

Veja que $A \times B \neq B \times A$!

Produto Cartesiano

Definição

O **produto cartesiano** entre dois conjuntos A e B não-vazios é o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

O elemento $(a, b) \in A \times B$ é chamado **par ordenado**. Dizemos que $(a, b), (c, d) \in A \times B$ são iguais, i.e.,

$$(a, b) = (c, d) \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Caso $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então definimos $A \times B := \emptyset$.

Observação

Veja que $A \times B \neq B \times A$!

Produto Cartesiano

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 5\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 5), (2, -1), (2, 5), (3, -1), (3, 5)\}.$$

e

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Exemplo

Sejam $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $B = \{\star, \diamond\}$. Então,

$$A \times B = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \star \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \diamond \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \star \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \diamond \right) \right\}.$$

Produto Cartesiano

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 5\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 5), (2, -1), (2, 5), (3, -1), (3, 5)\}.$$

e

$$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Exemplo

Sejam $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $B = \{\star, \diamond\}$. Então,

$$A \times B = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \star \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \diamond \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \star \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \diamond \right) \right\}.$$

Relação Binária

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **relação binária** r **de** A **em** B é formada por três partes:

- pelo conjunto A;
- pelo conjunto B;
- por um subconjunto R qualquer de $A \times B$, i.e., $R \subseteq A \times B$.

Definição

Dados os conjuntos A e B e uma relação binária r de A em B. O **domínio** de r é o conjunto $D(r) = \{x \in A : (x, y) \in R\}$, o **contra-domínio** de r é o conjunto $Cd(r) = B$ e a **imagem** de r é o conjunto $Im(r) = \{y \in B : (x, y) \in R\}$.

Observação

Por vezes, quando já conhecidos o domínio e o contra-domínio de uma relação binária r, denominamos R também de relação binária!

Relação Binária

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **relação binária** r **de** A **em** B é formada por três partes:

- pelo conjunto A;
- pelo conjunto B;
- por um subconjunto R qualquer de $A \times B$, i.e., $R \subseteq A \times B$.

Definição

Dados os conjuntos A e B e uma relação binária r de A em B. O **domínio** de r é o conjunto $D(r) = \{x \in A : (x, y) \in R\}$, o **contra-domínio** de r é o conjunto $Cd(r) = B$ e a **imagem** de r é o conjunto $Im(r) = \{y \in B : (x, y) \in R\}$.

Observação

Por vezes, quando já conhecidos o domínio e o contra-domínio de uma relação binária r, denominamos R também de relação binária!

Relação Binária

Exemplo

$A = \{-1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : x < y\}$

$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

Exemplo

$A = \{-1, 0, 1\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times A : x^2 \leq y^2\}$

$A \times A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

Relação Binária

Exemplo

$A = \{-1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : x < y\}$

$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

Exemplo

$A = \{-1, 0, 1\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times A : x^2 \leq y^2\}$

$A \times A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

Relação Binária

Exemplo

$A = \left\{\{1\}, \{\star, \circ\}, \mathbb{N}\right\}$, $B = \{1, 2\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : \#x = y\}$

$$A \times B = \left\{(\{1\}, 1), (\{1\}, 2), (\{\star, \circ\}, 1), (\{\star, \circ\}, 2), (\mathbb{N}, 1), (\mathbb{N}, 2)\right\}$$

Exemplo

$A = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : det(x) = y\}$

Relação Binária

Exemplo

$A = \left\{\{1\}, \{\star, \circ\}, \mathbb{N}\right\}$, $B = \{1, 2\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : \#x = y\}$

$$A \times B = \left\{(\{1\}, 1), (\{1\}, 2), (\{\star, \circ\}, 1), (\{\star, \circ\}, 2), (\mathbb{N}, 1), (\mathbb{N}, 2)\right\}$$

Exemplo

$A = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : det(x) = y\}$

Funções

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **função** f de A em B é uma relação binária f de A em B (i.e., é formada pelo conjunto A, pelo conjunto B e por um subconjunto F de $A \times B$) tal que

para todo $x \in A$, **existe um único** $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$.

Definição

Sejam A e B conjuntos e f uma **função** de A em B. Dado $(x, y) \in F$, denominamos y de **função de** x e o denotamos por $y = f(x)$. Denominamos ainda a equação "$y = f(x)$" de **lei de associação** de f.

Notação

Denotamos uma função f de A em B por

$$\begin{array}{rccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Funções

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **função** f de A em B é uma relação binária f de A em B (i.e., é formada pelo conjunto A, pelo conjunto B e por um subconjunto F de $A \times B$) tal que

$$\textbf{para todo } x \in A, \textbf{existe um único } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in F.$$

Definição

Sejam A e B conjuntos e f uma **função** de A em B. Dado $(x, y) \in F$, denominamos y de **função de** x e o denotamos por $y = f(x)$. Denominamos ainda a equação "$y = f(x)$" de **lei de associação** de f.

Notação

Denotamos uma função f de A em B por

$$\begin{array}{rccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Funções

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **função** f de A em B é uma relação binária f de A em B (i.e., é formada pelo conjunto A, pelo conjunto B e por um subconjunto F de $A \times B$) tal que

$$\textbf{para todo } x \in A, \textbf{existe um único } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in F.$$

Definição

Sejam A e B conjuntos e f uma **função** de A em B. Dado $(x, y) \in F$, denominamos y de **função de** x e o denotamos por $y = f(x)$. Denominamos ainda a equação "$y = f(x)$" de **lei de associação** de f.

Notação

Denotamos uma função f de A em B por

$$\begin{array}{rccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Funções

Exemplo

Seja $T = \{x : x \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos f como sendo a relação binária de T em $\mathbb{R}$, onde

$$F = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} : y \text{ é igual à área de } x\}.$$

Pela definição de função, temos que f é uma função.

Exemplo

Seja $T = \{y : y \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos f como sendo a relação binária de $\mathbb{R}$ em T, onde

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times T : y \text{ é igual ao triângulo com área } x\}.$$

Pela definição de função, temos que f NÃO é uma função.

Funções

Exemplo

Seja $T = \{x : x \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos f como sendo a relação binária de T em $\mathbb{R}$, onde

$$F = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} : y \text{ é igual à área de } x\}.$$

Pela definição de função, temos que f é uma função.

Exemplo

Seja $T = \{y : y \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos f como sendo a relação binária de $\mathbb{R}$ em T, onde

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times T : y \text{ é igual ao triângulo com área } x\}.$$

Pela definição de função, temos que f NÃO é uma função.

Funções

Definição

Sejam A, B, C e D conjuntos e $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ funções. Então,

$$f = g \Leftrightarrow A = C, B = D \text{ e } \forall x \in A = C, f(x) = g(x).$$

Assim, duas funções são iguais se, e somente se, possuírem:

- o mesmo domínio;
- o mesmo contra-domínio;
- a mesma lei de associação!

Observação

Observe que os conceitos de **Domínio**, **Contra-domínio** e **Imagem** de uma função são os mesmos já definidos anteriormente, pois funções são relações! Além disso, sendo $f : A \longrightarrow B$ uma função, podemos denotar sua imagem por

$$Im(f) \text{ ou } f(A).$$

Veja que $Im(f) = \{y \in B : y = f(x), \text{ para algum } x \in A\} = \{f(x) \in B : x \in A\}$.

Funções

Definição

Sejam A, B, C e D conjuntos e $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ funções. Então,

$$f = g \Leftrightarrow A = C, B = D \text{ e } \forall x \in A = C, f(x) = g(x).$$

Assim, duas funções são iguais se, e somente se, possuírem:

- o mesmo domínio;
- o mesmo contra-domínio;
- a mesma lei de associação!

Observação

Observe que os conceitos de **Domínio**, **Contra-domínio** e **Imagem** de uma função são os mesmos já definidos anteriormente, pois funções são relações! Além disso, sendo $f : A \longrightarrow B$ uma função, podemos denotar sua imagem por

$$Im(f) \text{ ou } f(A).$$

Veja que $Im(f) = \{y \in B : y = f(x), \text{ para algum } x \in A\} = \{f(x) \in B : x \in A\}$.

Gráfico de uma Função

Definição

Seja A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma função. Definimos o **gráfico** de f como sendo o conjunto F, i.e., como sendo

$$Graf(f) = F = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Observação

Pela igualdade de funções vista no último *slide* segue que duas funções f e g são iguais se, e somente se, possuírem mesmos domínios, contra-domínios e gráficos!

Gráfico de uma Função

Definição

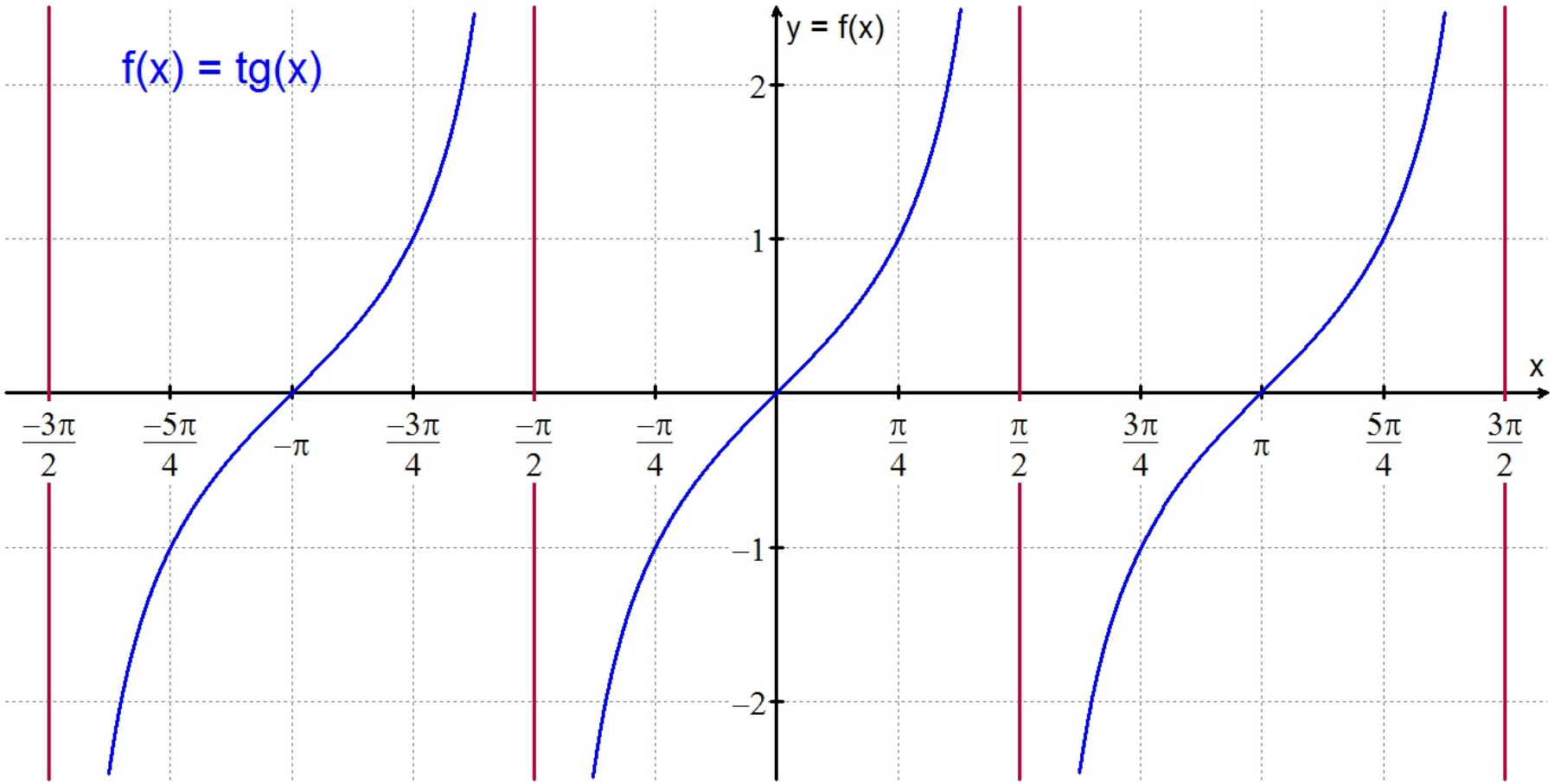
Seja A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma função. Definimos o **gráfico** de f como sendo o conjunto F, i.e., como sendo

$$Graf(f) = F = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

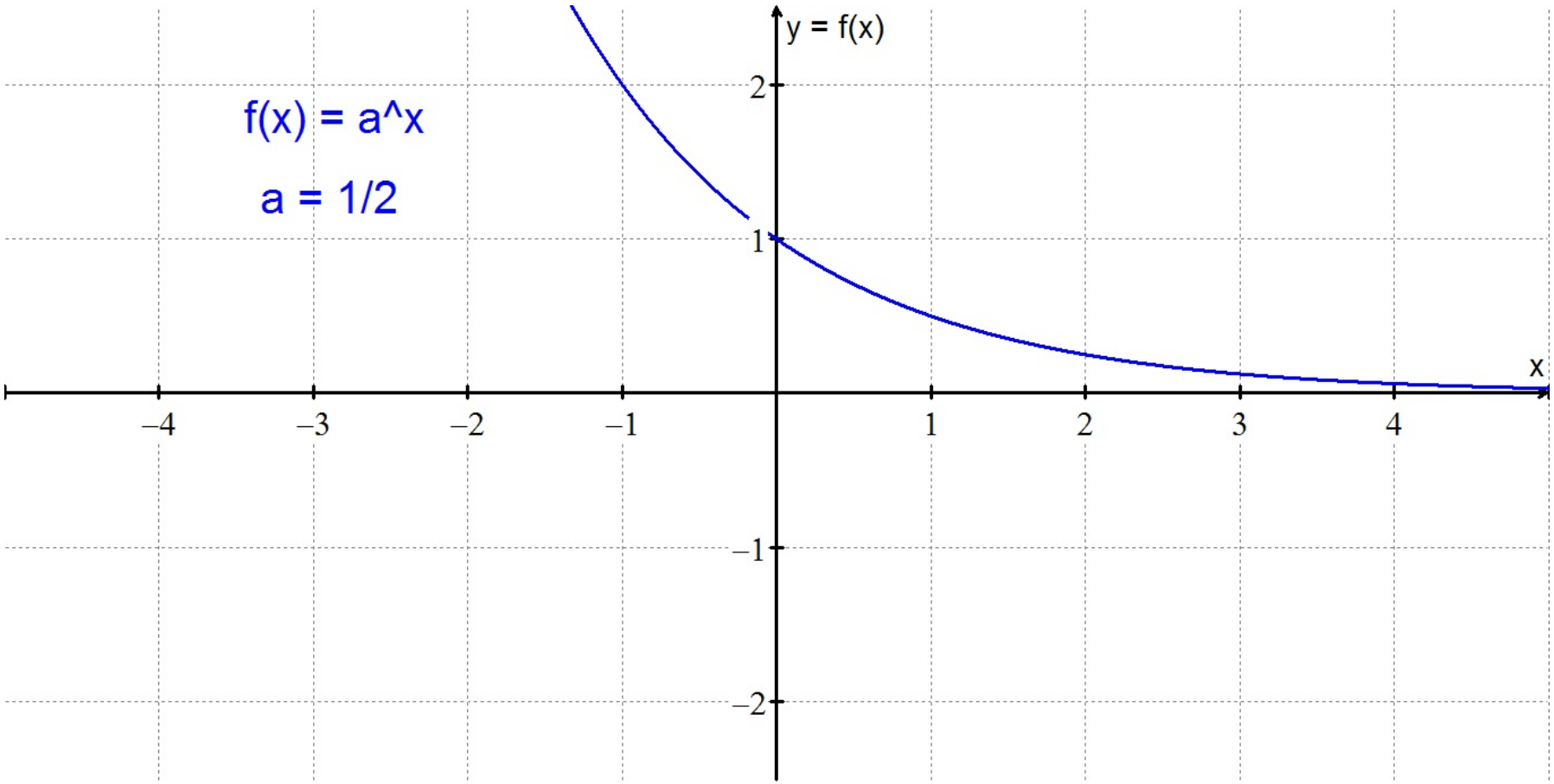
Observação

Pela igualdade de funções vista no último *slide* segue que duas funções f e g são iguais se, e somente se, possuírem mesmos domínios, contra-domínios e gráficos!

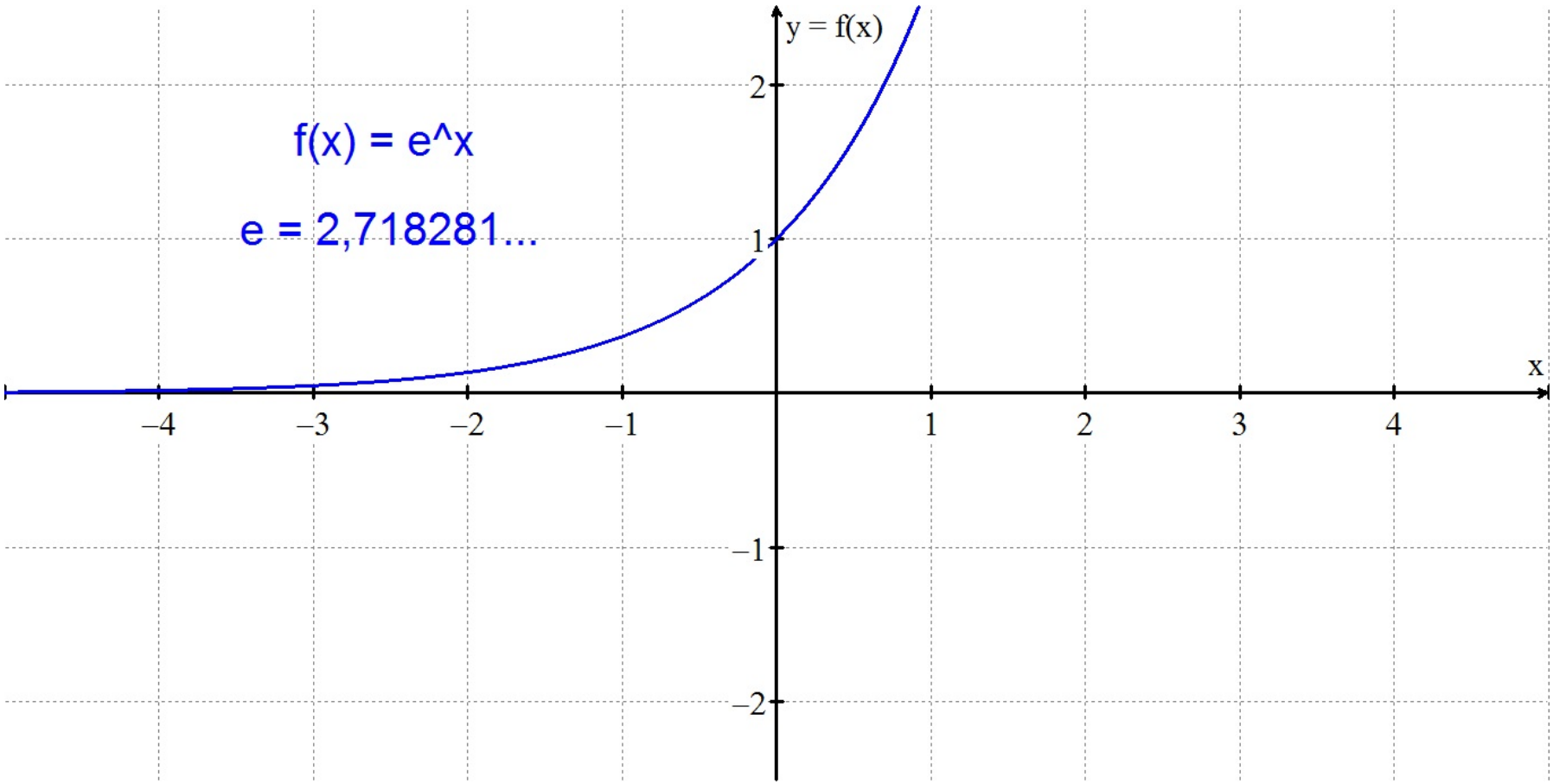
Exemplos de Gráficos de Funções



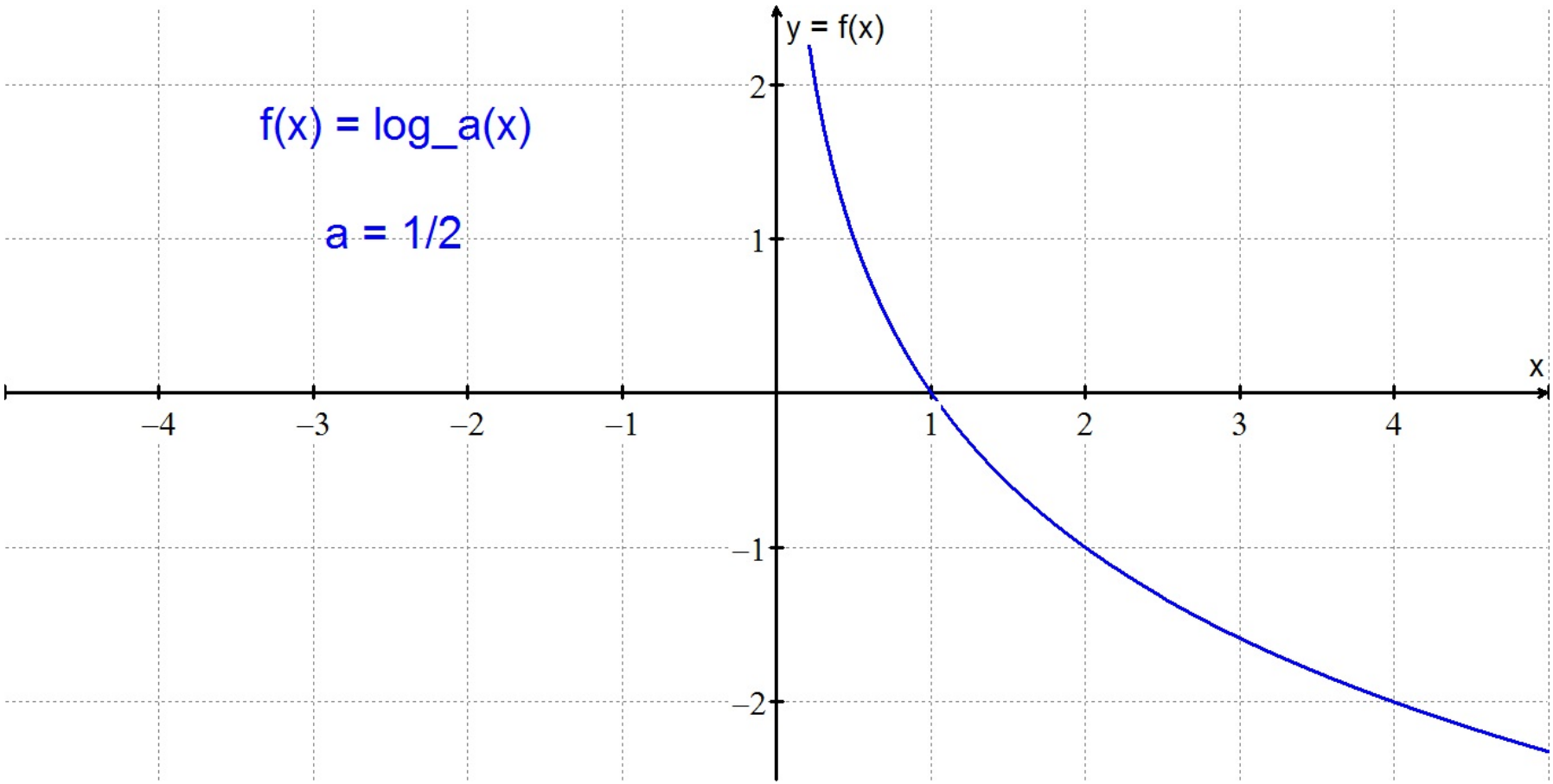
Exemplos de Gráficos de Funções



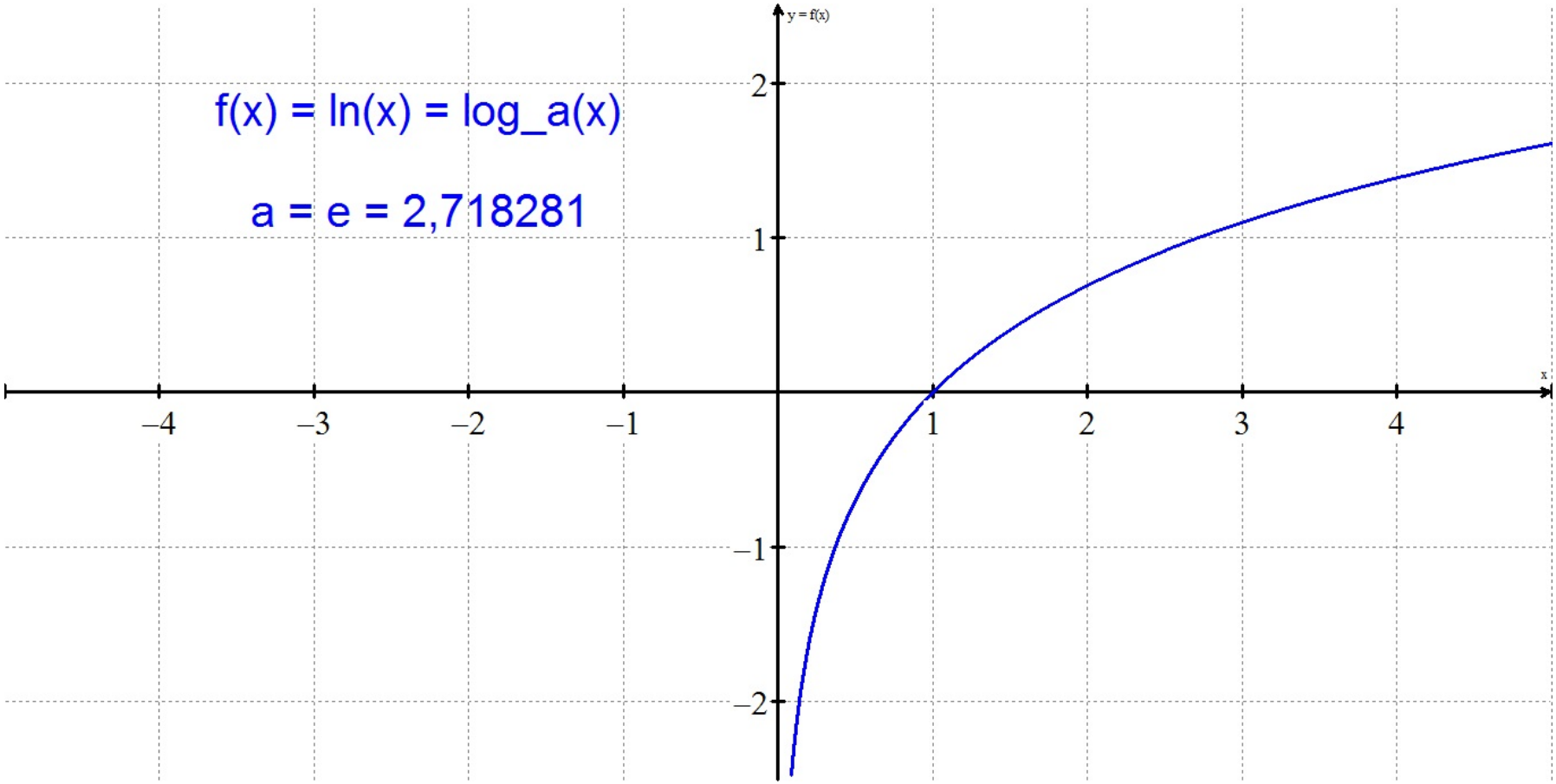
Exemplos de Gráficos de Funções



Exemplos de Gráficos de Funções

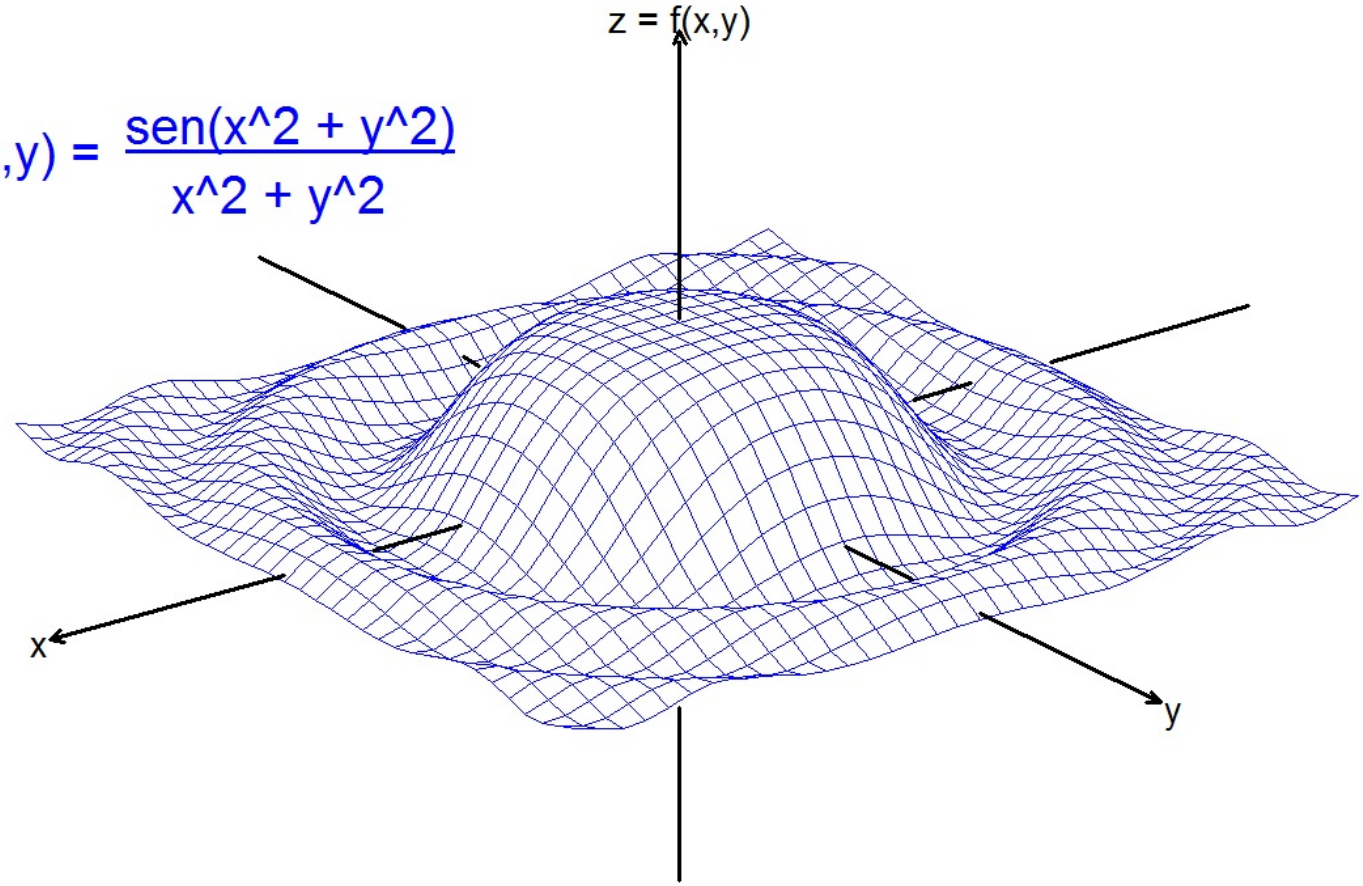


Exemplos de Gráficos de Funções



Exemplos de Gráficos de Funções

$$f(x,y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$



Função Composta

Definição

Sejam $f : A \longrightarrow B, g : C \longrightarrow D$ funções tais que $f(A) \subseteq C$.
A **função composta de** g **e** f é a função

$$h : A \longrightarrow D \text{ dada por } h(x) = g(f(x)).$$

h é denotada por $g \circ f$ (lê-se "g bola f").

Observação

A composição de funções é associativa, mas não é comutativa!

Função Composta

Exemplo

Sejam $A = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 9, 16\}$, $C = \{0, 1\}$ e $D = \{-1, 0, 1, 3, 5, 7, 11\}$, $f : A \longrightarrow B$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : C \longrightarrow D$ dada por $g(x) = 2x + 1$.

Não podemos definir $g \circ f$, pois $f(A) \nsubseteq C$. Mas, podemos definir $f \circ g$, pois $G(C) \subseteq A$.
Veja que $f \circ g(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 4x + 1$.

Exemplo (associatividade e não-comutatividade da função composta)

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$.

Veja que $f \circ h \neq h \circ f$, pois $f \circ h(x) = f(|x|) = |x| + 1$ e $h \circ f(x) = h(x + 1) = |x + 1|$, que são diferentes!

Por outro lado, veja que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Função Composta

Exemplo

Sejam $A = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 9, 16\}$, $C = \{0, 1\}$ e $D = \{-1, 0, 1, 3, 5, 7, 11\}$, $f : A \longrightarrow B$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : C \longrightarrow D$ dada por $g(x) = 2x + 1$.

Não podemos definir $g \circ f$, pois $f(A) \nsubseteq C$. Mas, podemos definir $f \circ g$, pois $G(C) \subseteq A$.
Veja que $f \circ g(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 4x + 1$.

Exemplo (associatividade e não-comutatividade da função composta)

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$.

Veja que $f \circ h \neq h \circ f$, pois $f \circ h(x) = f(|x|) = |x| + 1$ e $h \circ f(x) = h(x + 1) = |x + 1|$, que são diferentes!

Por outro lado, veja que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **injetiva (ou injetora, ou uma injeção)** se, dados $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **sobrejetiva (ou sobrejetora, ou uma sobrejeção)** se,

$$Im(f) = f(A) = B.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **bijetiva (ou bijetora, ou uma bijeção)** se

$$f \text{ é injetiva } \mathbf{E} \text{ sobrejetiva }.$$

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **injetiva (ou injetora, ou uma injeção)** se, dados $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **sobrejetiva (ou sobrejetora, ou uma sobrejeção)** se,

$$Im(f) = f(A) = B.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **bijetiva (ou bijetora, ou uma bijeção)** se

$$f \text{ é injetiva } \mathbf{E} \text{ sobrejetiva .}$$

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **injetiva (ou injetora, ou uma injeção)** se, dados $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **sobrejetiva (ou sobrejetora, ou uma sobrejeção)** se,

$$Im(f) = f(A) = B.$$

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é **bijetiva (ou bijetora, ou uma bijeção)** se

$$f \text{ é injetiva } \mathbf{E} \text{ sobrejetiva }.$$

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = x^2$.

Observe que f não é nem injetiva, nem sobrejetiva, no entanto g é bijetiva!

Exemplo

Seja $T = \{x : x \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos a função $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = \text{ área de x }.$$

Temos que f não é uma função injetiva e nem sobrejetiva!

Exemplo

Seja $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = det(x).$$

Temos que f é uma função sobrejetiva, mas que não é injetiva!

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = x^2$.

Observe que f não é nem injetiva, nem sobrejetiva, no entanto g é bijetiva!

Exemplo

Seja $T = \{x : x \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos a função $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = \text{ área de x .}$$

Temos que f não é uma função injetiva e nem sobrejetiva!

Exemplo

Seja $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = det(x).$$

Temos que f é uma função sobrejetiva, mas que não é injetiva!

Injeção, Sobrejeção e Bijeção

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = x^2$.

Observe que f não é nem injetiva, nem sobrejetiva, no entanto g é bijetiva!

Exemplo

Seja $T = \{x : x \text{ é um triângulo no plano}\}$. Definamos a função $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = \text{ área de x .}$$

Temos que f não é uma função injetiva e nem sobrejetiva!

Exemplo

Seja $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de associação

$$f(x) = det(x).$$

Temos que f é uma função sobrejetiva, mas que não é injetiva!

Função Inversa

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Definimos a **função identidade de** X como sendo

$$id_X : X \longrightarrow X \text{ tal que } id_X(x) = x, \forall x \in X.$$

Observe que id_X é uma função bijetiva!

Definição

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que $g : B \longrightarrow A$ é a **função inversa** de f se

$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

Observação

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Então,

$$\text{existe uma função } g : B \longrightarrow A \text{ inversa de } f \Leftrightarrow f \text{ é bijetiva.}$$

Função Inversa

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Definimos a **função identidade de** X como sendo

$$id_X : X \longrightarrow X \text{ tal que } id_X(x) = x, \forall x \in X.$$

Observe que id_X é uma função bijetiva!

Definição

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Dizemos que $g : B \longrightarrow A$ é a **função inversa** de f se

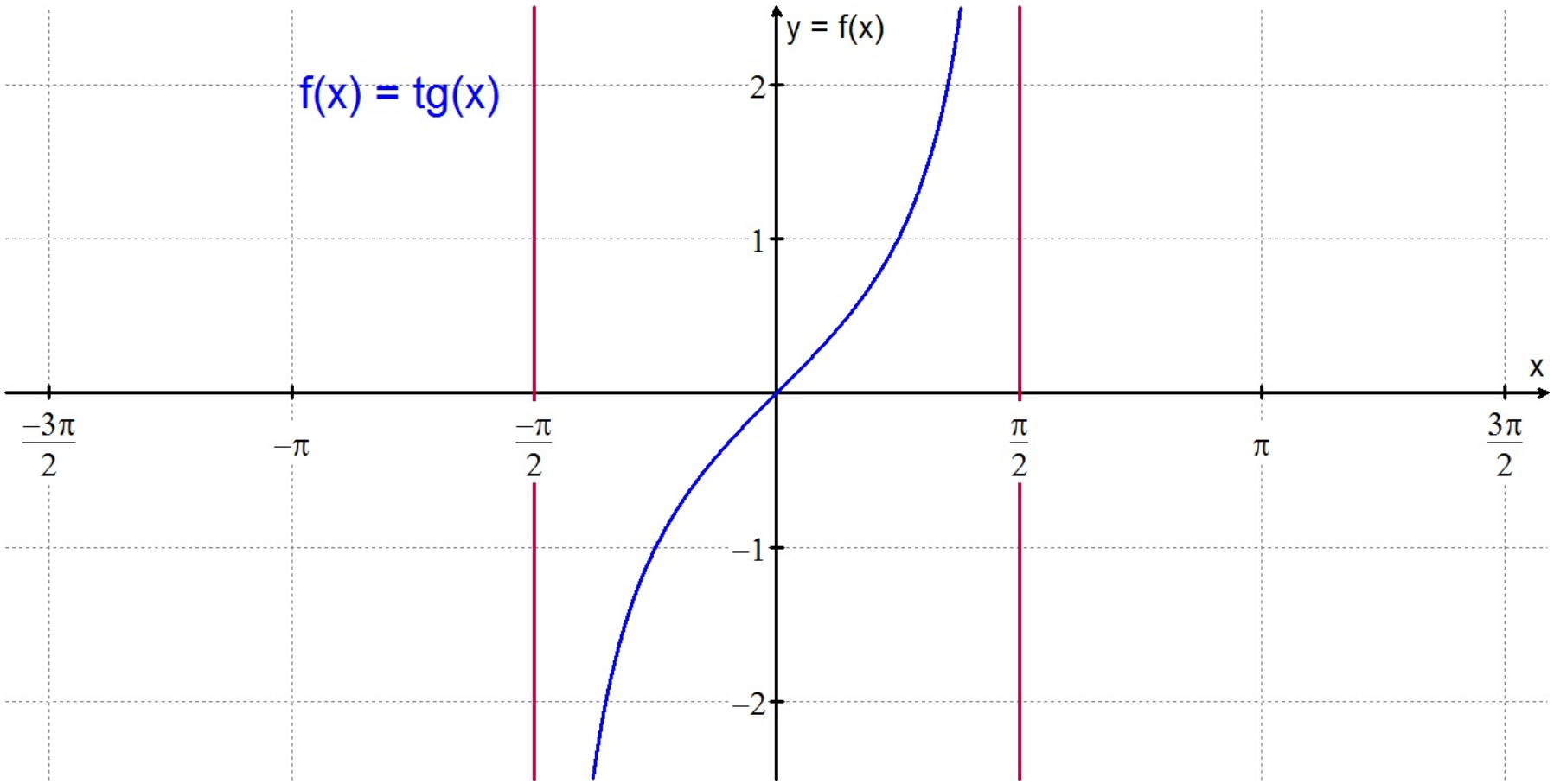
$$g \circ f = id_A \quad \text{e} \quad f \circ g = id_B.$$

Observação

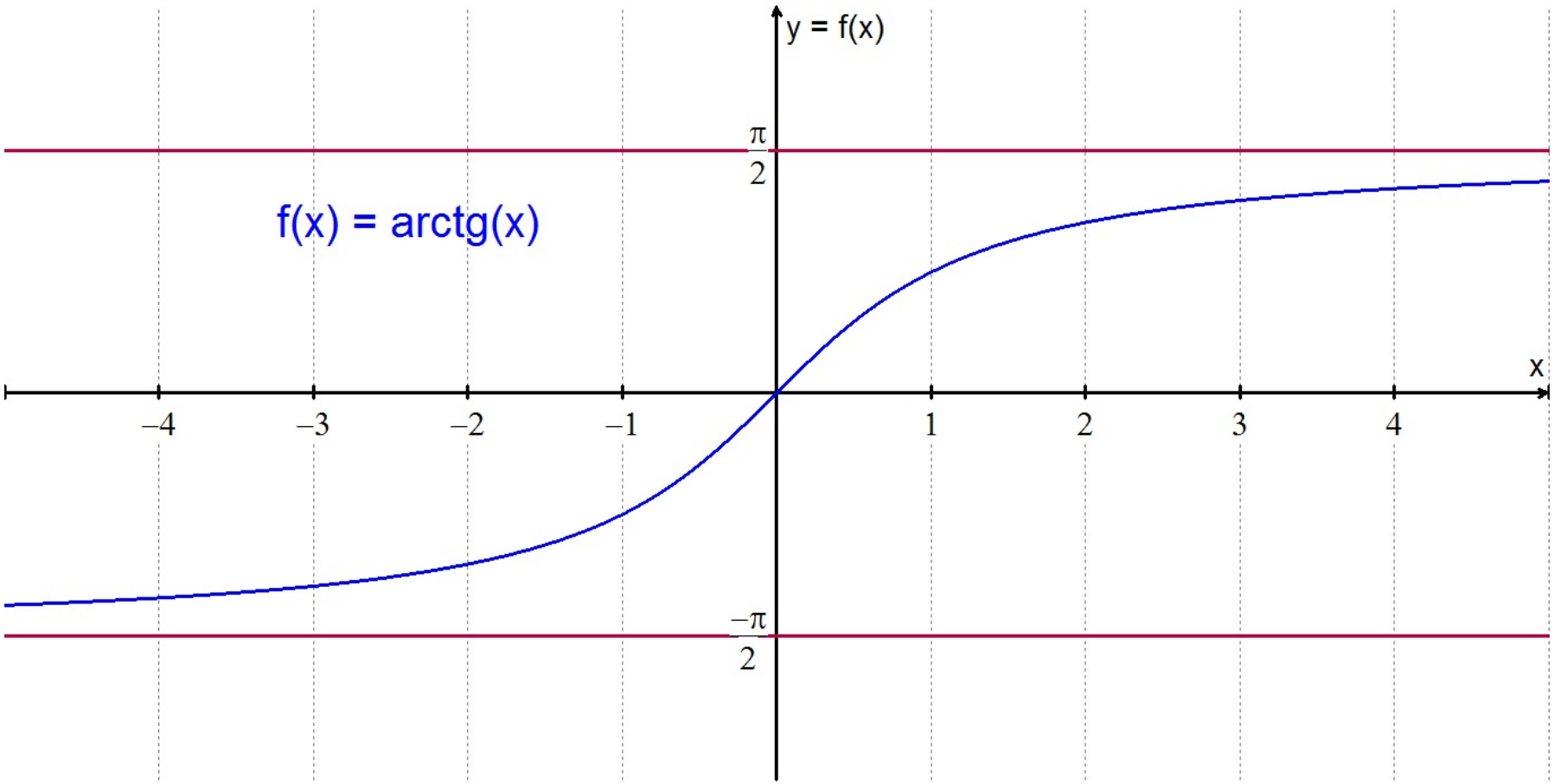
Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Então,

$$\text{existe uma função } g : B \longrightarrow A \text{ inversa de } f \Leftrightarrow f \text{ é bijetiva.}$$

Exemplos de Funções Inversas



Exemplos de Funções Inversas



Exemplos de Funções Inversas

Exemplo

Vamos calcular a função inversa de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = 2x + 1$.

Exemplo

Vamos calcular a função inversa de $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $y = f(x) = x^2$.

Referências Bibliográficas

- G. Iezzi, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 1 - Conjuntos Funções.* 7ª ed., 2ª reimpressão. Atual Editora, 2000.

- G. Iezzi, O. Dolce, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 2 - Logaritmos.* 8ª ed., 2ª reimpressão. Atual Editora, 2000.

- G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 3 - Trigonometria.* 7ª ed., 3ª reimpressão. Atual Editora, 2001.

- E. L. Lima. *Curso de Análise vol.1.* 12ª ed., 3ª impressão. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

Muito Obrigado :)