Fractais e Números Complexos

Ewerton Rocha Vieira

ewerton@ufg.br

IME - UFG

V Workshop de Álgebra

Catalão - GO

10 de Novembro de 2016

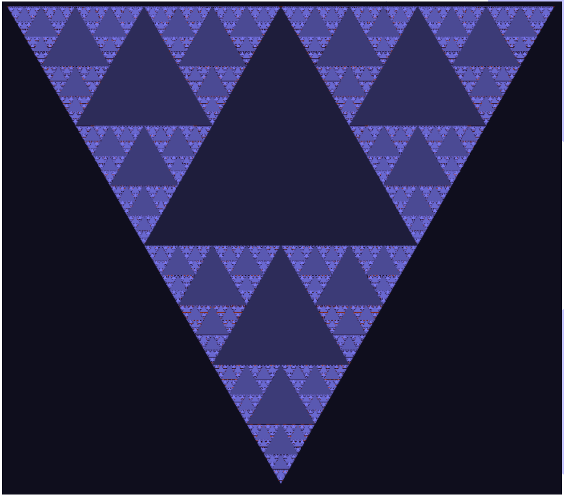
Roteiro

1. Introdução
2. Conjunto de Mandelbrot
3. Conjunto de Julia
4. π ?
5. Referências

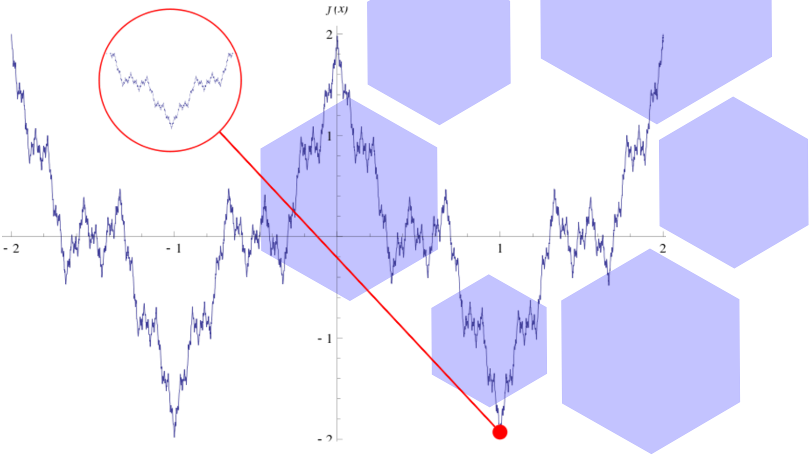
Roteiro

Fractal

Fractal é uma figura geométrica que pode ser dividida em partes, onde cada uma das partes é semelhante a original.

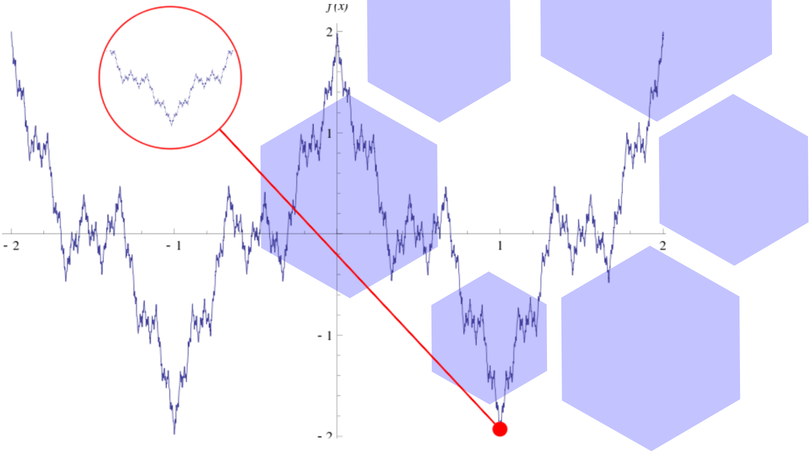


- A idéia de fractais teve sua origem entre 1857 e 1913.
- Descoberta do fractal de Karl Weierstrass em 1872.

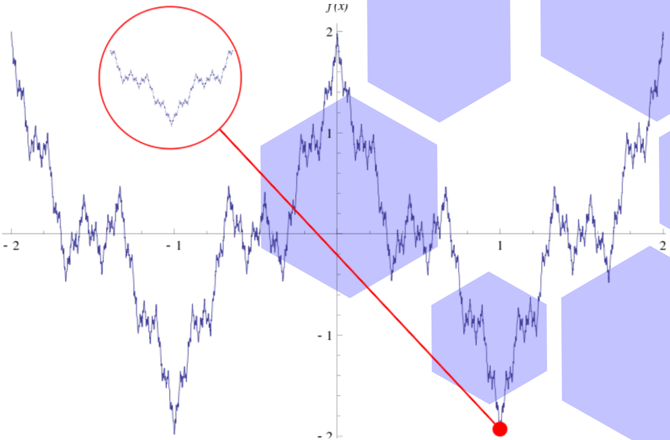


Fractal
História

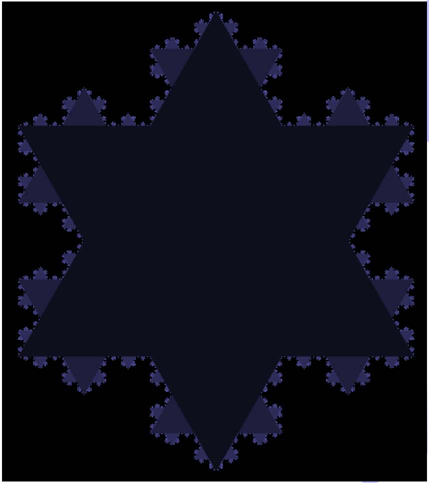
- A idéia de fractais teve sua origem entre 1857 e 1913.
- Descoberta do fractal de Karl Weierstrass em 1872.



- A idéia de fractais teve sua origem entre 1857 e 1913.
- Descoberta do fractal de Karl Weierstrass em 1872.

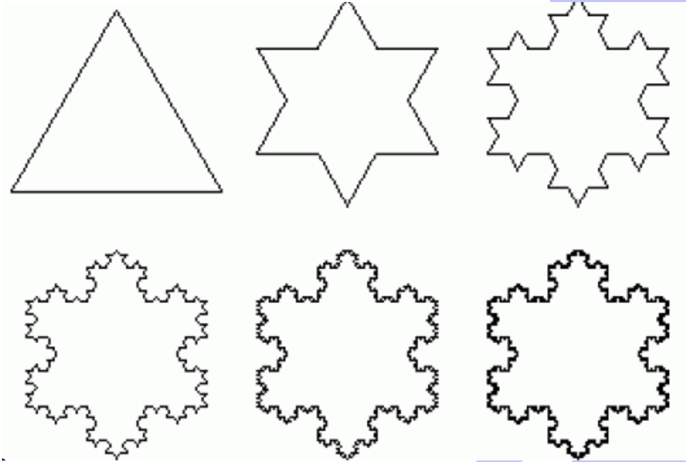


Em 1904, Helge von Koch cria um fractal conhecido como Koch snowflake.



Fractal

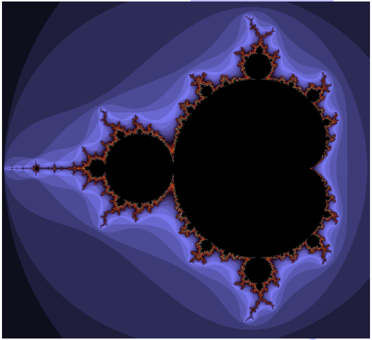
Fractal Koch snowflake ou floco de neve de Koch



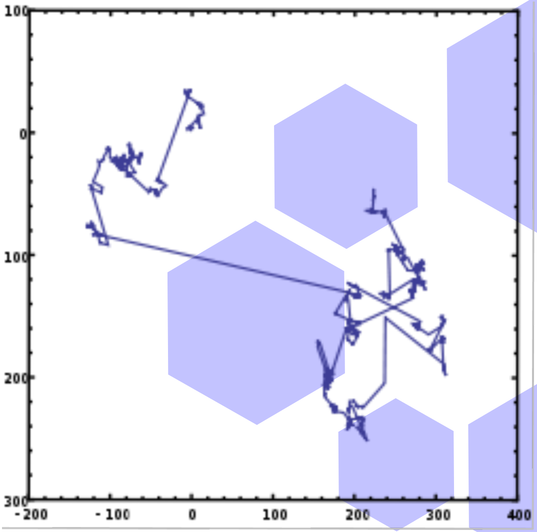
Fractal

Categorias

- Sistema de funções iteradas. (Fractal floco de neve de Koch)
- Fractais definidos por relação de recorrência em cada ponto do espaço. (Fractal de Mandelbrot)



- Fractais aleatórios. (Fractal vôo de Lévy)



Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots ,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots ,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Órbita

Órbita

O conjunto dos números obtidos pela sequência,

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P(P(z_0)), z_3 = P(P(P(z_0))), ..., z_n = P^n(z_0), \cdots,$$

é chamado de órbita, onde P é um polinômio complexo.

Exemplos

- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 1$ se $P(z) = z + 1$?
- Qual é a órbita de $z_0 = 0$ se $P(z) = z^2 + i$?

Futura de uma órbita

- Qual o destino da órbita de um ponto?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita tende ao infinito?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita não tende ao infinito?

Futura de uma órbita

- Qual o destino da órbita de um ponto?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita tende ao infinito?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita não tende ao infinito?

Futura de uma órbita

- Qual o destino da órbita de um ponto?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita tende ao infinito?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita não tende ao infinito?

Futura de uma órbita

- Qual o destino da órbita de um ponto?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita tende ao infinito?
- Quais são os pontos do plano complexo que a órbita não tende ao infinito?

Roteiro

Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot nasceu em 20 de novembro de 1924 em Varsóvia e aos 11 anos de idade mudou-se com sua família para Paris onde estudou até o início da segunda guerra mudial, quando mudou-se para Tulle. No fim da segunda guerra mundial Mandelbrot voltou para Paris. Entre 1947 e 1949 Mandelbrot estudou no Instituto de Tecnologia da Califórnia nos Estados Unidos, onde obteve o título de mestre em aeronáutica. Voltando para a França ele obteve o doutorado em ciências matemáticas na Universidade de Paris em 1952.
Ele passou a maior parte de sua carreira tanto na França como nos Estados Unidos, tendo a dupla cidadania. Em 1958 começou uma carreira de 35 anos na IBM (International Business Machines), tendo acesso aos computadores da instituição, ele foi um dos primeiros a usar computação gráfica para criar e exibir imagens geométricas fractais, consequentemente levando à sua descoberta do fractal de Mandelbrot em 1979.

Durante sua carreira, ele recebeu mais de 15 doutorados honorários e publicando em inúmeras revistas científicas

ganhando inúmeros prêmios. Sua autobiografia (The Fractalist) foi publicado em 2012.

Conjunto de Mandelbrot

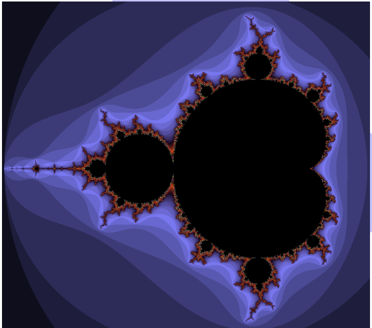
Considere a seguinte função não linear complexa

$$Q_c(z) = z^2 + c,$$

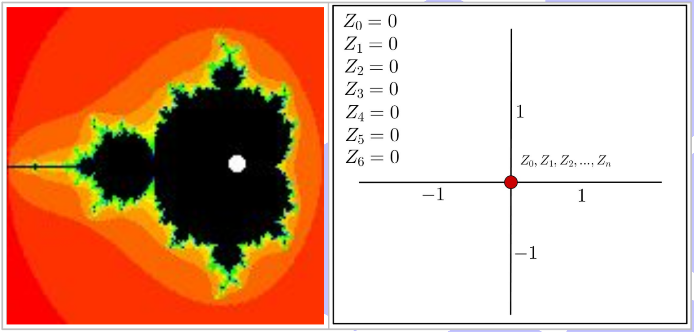
onde c é uma constante.

Conjunto de Mandelbrot

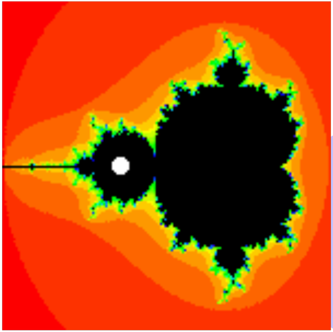
$$M = \{c \in C : |Q_c^n(0)| \leq 2 \quad para \quad todos \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

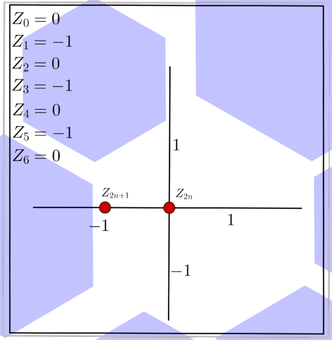


Conjunto de Mandelbrot

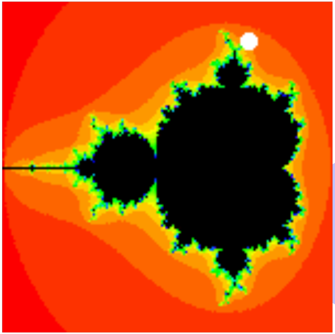


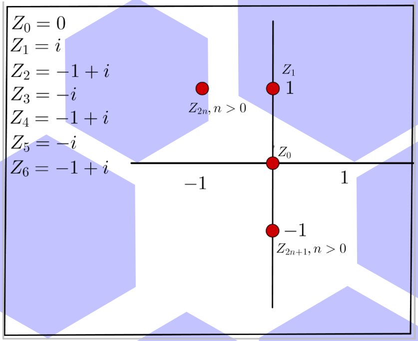
Conjunto de Mandelbrot





Conjunto de Mandelbrot





Conjunto de Mandelbrot

Exemplo

Se o valor da constante for $c = 2i$*, temos:*

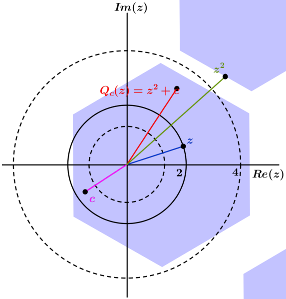
$z_0 = 0$
$z_1 = 0^2 + 2i = 2i$
$z_2 = (2i)^2 + 2i = -4 + 2i$
$z_3 = (-4 + 2i)^2 + 2i = 12 - 14i$
$z_4 = (12 - 14i)^2 + 2i = -52 - 334i$
$\vdots$

Logo $c = 2i$ *não está no conjunto de Mandelbrot, pois a sequência vai para o infinito, ou seja, a sequência não é limitada.* ◁

Dinâmica Complexa

Teorema

Se $|z| \geq |c| > 2$ *então* $Q_c^n(z) \longrightarrow \infty$ *com* $n \longrightarrow \infty$.



Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, ($|z_0| > |c|$),
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0|z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1|z_1| \geq \lambda_1\lambda_0|z_0| > \lambda_0^2|z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n|z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, ($|z_0| > |c|$),
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0|z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1|z_1| \geq \lambda_1\lambda_0|z_0| > \lambda_0^2|z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n|z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Demonstração

Seja $|z_0| > |c| > 2$.
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$, (desigualdade triangular) ,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|$, $(|z_0| > |c|)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1)$,
$|z_1| = |Q_c(z_0)| = \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$.
Isto implica que $|z_1| > |z_0| > 2$,

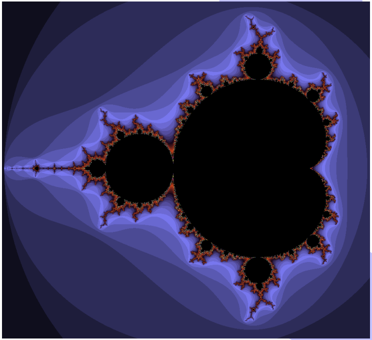
$$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$$

Por indução em n temos que $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. Tomando $n \to \infty$ temos o resultado.

Conjunto de Mandelbrot

Conjunto de Mandelbrot

$$M = \{c \in C : |Q_c^n(0)| \leq 2 \quad para \quad todos \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

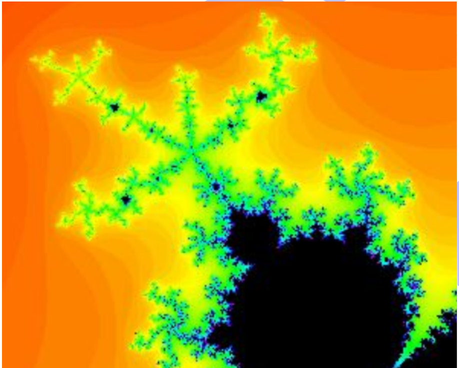


Períodos

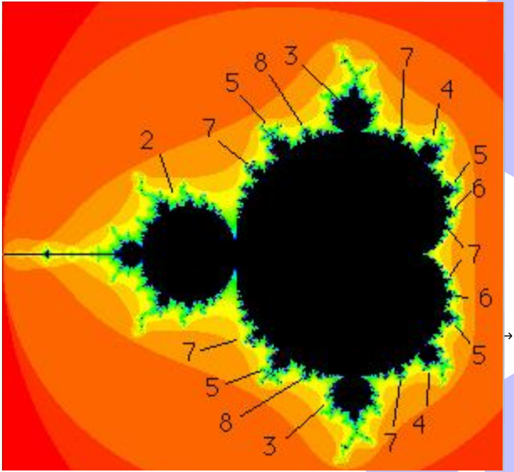
Definição

- *Se $P^n(z_0) = z_0$ para algum $n > 1$ então z_0 é chamado ponto periódico.*
- *O menor natural satisfazendo esta propriedade é chamado de período de z_0.*

O número de antenas é igual ao período.



Períodos

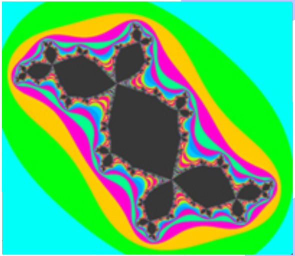


Roteiro

Conjunto de Julia

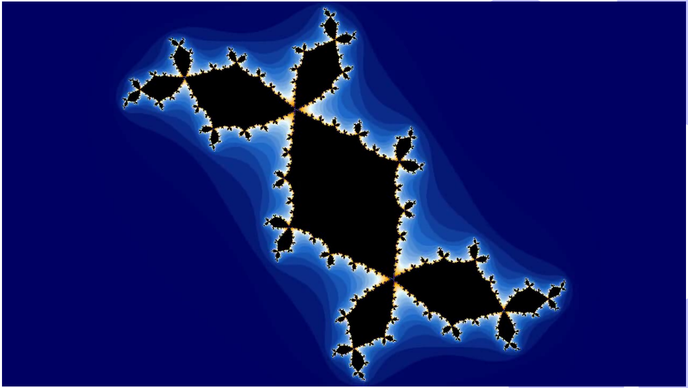
Definição

O conjunto $K(f) = \{z \in \mathbb{C}$ *a órbita* $\{f^n(z)\}$ *é limitada* $\}$ *é denominado de conjunto de Julia cheio.*



Definição

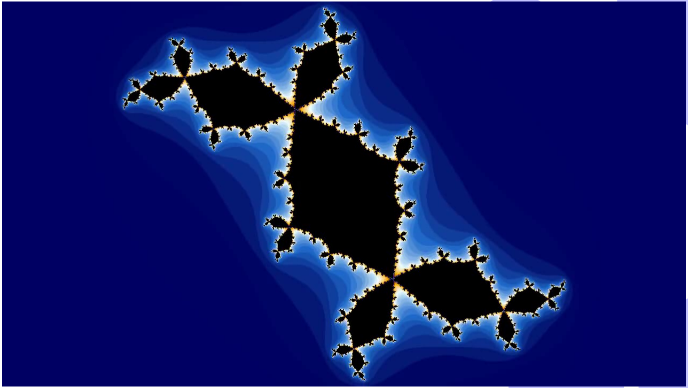
O conjunto estável de P, denotado por $S(P)$, é o complementar do conjunto de Julia.



- Relação entre o conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia.

Definição

O conjunto estável de P, denotado por $S(P)$, é o complementar do conjunto de Julia.



- Relação entre o conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia.

Destino de órbitas para outros polinômios

O destino das órbitas para outros polinômios não difere muito do Conjunto de Mandelbrot.

- Exemplos podem ser encontrados no software XaoS.

Destino de órbitas para outros polinômios

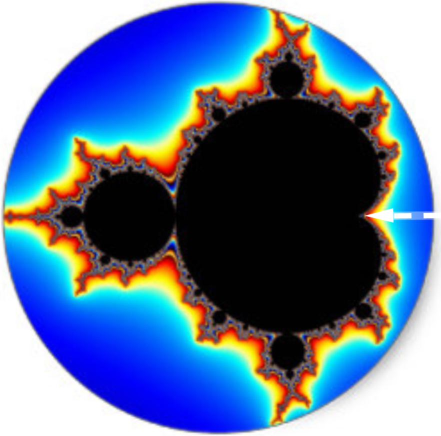
O destino das órbitas para outros polinômios não difere muito do Conjunto de Mandelbrot.

- Exemplos podem ser encontrados no software XaoS.

Roteiro

Conjunto de Mandelbrot e o π

- Em 1991, David Bolle teve a ideia de usar o ponto $c = (0,25 + x, 0)$ para a iteração quadrática e fazer x tender a $c = (0,25 + x, 0)$.



Conjunto de Mandelbrot e o π

- Alguns valores obtidos em forma de tabela:

x	nº de interações N
$1,0$	2
$0,1$	8
$0,01$	30
$0,001$	97
$0,0001$	312
$0,00001$	991
$0,000001$	3140
$0,0000001$	9933
$0,00000001$	31414
$0,000000001$	99344
$0,0000000001$	314159

$$\lim_{x \to 0} x^{1/2}.N = \pi$$

Conjunto de Mandelbrot e o π

- Alguns valores obtidos em forma de tabela:

x	nº de interações N
$1,0$	2
$0,1$	8
$0,01$	30
$0,001$	97
$0,0001$	312
$0,00001$	991
$0,000001$	3140
$0,0000001$	9933
$0,00000001$	31414
$0,000000001$	99344
$0,0000000001$	314159

$$\lim_{x \to 0} x^{1/2}.N = \pi$$

Conjunto de Mandelbrot e o π

Teorema

Dado um $\varepsilon > 0$, define $N(\varepsilon)$ o número de iterações necessárias para a órbita de zero sob o mapa $Q_{1/4+\varepsilon} = x^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon$ para ultrapassar 2, ou seja,

$$N(\varepsilon) = \min_n Q^n_{1/4+\varepsilon}(0) > 2. \tag{1}$$

Então

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\varepsilon} N(\varepsilon) = \pi \tag{2}$$

Roteiro

Referências

- XAOS *free software*
- DYNAMICS EXPLORER *free software*
- DEVANEY, ROBERT L. , *An introduction to chaotic dynamical systems, Reading: Addison-Wesley* 1989.
- HIRSCH, MORRIS W.; SMALE, STEPHEN; DEVANEY, ROBERT L., *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press,* 2012.
- WEISSTEIN, ERIC W., *Notebook-LogisticMap-Wolfram, http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html*, 2008.

OBRIGADO