Alfabetização Matemática

Profs.: Joaby de Souza Jucá & Thaynara Arielly de Lima

UFG

Universidade Federal de Goiás

IV Workshop de Álgebra

27 de maio de 2015

- Os primeiros registros de matemática datam de 2000 anos a.C., com textos da Mesopotâmia e Egito Antigo sobre Aritmética e Geometria;
- Contudo, a matemática sistematizada em teoremas e demonstrações, com todo seu rigor notacional que é conhecida e ensinada atualmente, é bem mais recente; data do século XIX;
- Com o objetivo de tratar grandezas infinitamente pequenas, Leibniz e Newton propuseram o Cálculo Diferencial e Integral, e a fim de formalizar suas ideias, desenvolveram ferramentas notacionais, analíticas e algébricas, no sentido de legitimar seus procedimentos;

- Apesar de todo este ferramental notacional e lógico utilizado pela matemática, em favor do rigor, ser de muita valia para a formalização dos trabalhos desenvolvidos em Ciências Exatas, o aprendizado desta linguagem universal é uma das principais dificuldades enfrentadas no ensino dos conceitos básicos de matemática;

Este minicurso tem como principal objetivo discutir conceitos seminais em matemática, a fim de clarificar definições e resultados básicos, que tantas vezes são usados de maneira equivocada em disciplinas básicas de Ciências Exatas no ensino superior.

"Quem esqueceu não chora, quem chora ainda lembra"

"Quem esqueceu não chora, quem chora ainda lembra"

Definição

Chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento completo.

Axiomas

I) Pincípio da Não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
II) Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa.

"Quem esqueceu não chora, quem chora ainda lembra"

Definição

Chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento completo.

Axiomas

I) Pincípio da Não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
II) Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa.

São proposições?

1. A lua é uma fruta.
2. O que é lógica?
3. $\pi < 5$ e este exemplo não é de lógica.
4. Eu estou mentindo.

Definição

- Chama-se proposição simples aquela que não contém nenhuma parte integrante de si mesma.
- Chama-se proposição composta aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições simples.

Conectivos

- $\neg$: negação
- $\wedge$: conjunção
- $\vee$: disjunção
- $\rightarrow$: implicação
- $\leftrightarrow$: equivalência

Exemplo

p: José é careca.
q: Pedro é estudante.
r: 25 é um quadrado perfeito.
s: π é um número racional.

$\neg r$: 25 **não** é um quadrado perfeito.
$p \wedge q$: José é careca **e** Pedro é estudante.
$q \vee r$: Pedro é estudante **ou** 25 é um quadrado perfeito.
$r \rightarrow s$: **Se** 25 é um quadrado perfeito, **então** π é um número racional.
$r \leftrightarrow s$: 25 é um quadrado perfeito **se, e somente se,** π é um número racional.

Proposição condicional

$p \to q$

- p é condição suficiente para q.
- q é condição necessária para p.

p: isto é uma laranja.
q: isto é uma fruta.

- **Forma direta** ($p \to q$): Se isto é uma laranja, então isto é uma fruta.
- **Forma contrapositiva** ($\neg q \to \neg p$): Se isto não é uma fruta, então isto não é uma laranja.
- **Forma recíproca** ($q \to p$): Se isto é uma fruta, então isto é uma laranja.
- **Forma negativa** ($\neg p \to \neg q$): Se isto não é uma laranja, então isto não é uma fruta.

Tabela Verdade

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Definição

- Dizemos que uma proposição composta é uma tautologia quando seus possíveis valores verdade são todos V.
- Dizemos que uma proposição composta é uma contra-tautologia quando seus possíveis valores verdade são todos F.

Definição

- Dizemos que uma proposição composta é uma tautologia quando seus possíveis valores verdade são todos V.
- Dizemos que uma proposição composta é uma contra-tautologia quando seus possíveis valores verdade são todos F.

Exemplo

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

São tautologias

- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Quantificadores

- Universal: $\forall$ (para todo).
- Existencial: $\exists$ (existe).

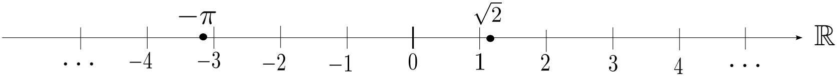
Todo número natural é um número inteiro. 2 é um número natural. Portanto, 2 é um número inteiro.

- $N(x):$ x é um número natural.
- $I(x):$ x é um número inteiro.
- $\forall x\ (N(x) \rightarrow I(x))$. $N(2)$. $\therefore I(2)$.

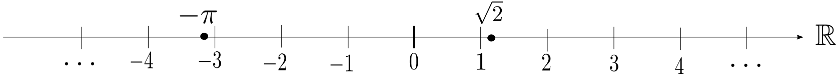
Todo número inteiro é um número racional. Existe um número inteiro. Portanto, existe um número racional.

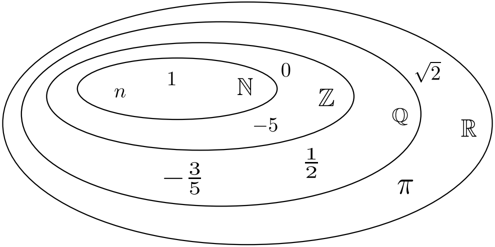
- $I(x):$ x é um número inteiro.
- $R(x):$ x é um número racional.
- $\forall x\ (I(x) \rightarrow R(x))$. $\exists x|\ I(x)$. $\therefore \exists x|\ R(x)$.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$



- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$





Lei da Tricotomia

Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, temos que uma, e somente uma das seguintes expressões é verdadeira:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

Tabela : Intervalos ilimitados em $\mathbb{R}$

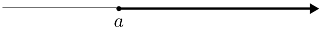
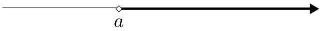
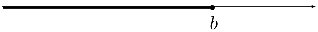
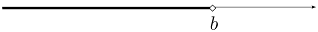
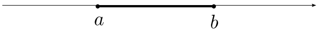
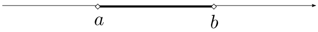
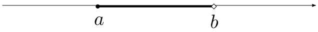
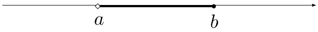
Intervalo	**Tipo**	**Desigualdade**	**Representação Gráfica**
$[a, +\infty)$	Fechado	$x \geq a$	
$(a, +\infty)$	Aberto	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Fechado	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Aberto	$x < b$	

Tabela : Intervalos limitados em $\mathbb{R}$ $(a < b)$

Intervalo	Tipo	Desigualdades	Representação Gráfica
$[a, b]$	Fechado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Aberto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Semi-aberto à direita	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Semi-aberto à esquerda	$a < x \leq b$	

Valor absoluto de um número real

O valor absoluto de um número real a, denotado por $|a|$ é definido por:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

- $|3| = 3$;
- $|-\pi| = \pi$;
- $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Algumas propriedades básicas da Álgebra

Distributividade, potenciação e radiciação

- $(x-1)\cdot(x+2) = (x-1)x + (x-1)\cdot 2 = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8; \quad x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_n} = x^{a_1 + a_2 + \dots a_n}$
- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $\pi^0 = 1$
- $(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6; \quad (x^a)^b = x^{ab}$
- $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}; \quad \sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^5 = \dfrac{a^5}{b^5}; \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $(xy)^3 = x^3 y^3; \quad (xy)^n = x^n y^n$

Mínimo múltiplo comum de números naturais

- $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
- $mmc(2520, 660) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$

$$\begin{array}{cc|l}
840, & 1980 & 2 \\
420, & 990 & 2 \\
210, & 495 & 2 \\
105, & 495 & 3 \\
35, & 165 & 3 \\
35, & 55 & 5 \\
7, & 11 & 7 \\
1, & 11 & 11 \\
1, & 1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11
\end{array}$$

Operações com frações

Operação	**Exemplo**
$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 6+5\cdot 6}{3\cdot 6}=\frac{12+30}{18}=\frac{42}{18}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}$
$\frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$	$\frac{3/2}{4/5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{15}{8}$

Operações com expressões racionais

Exemplo

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{3x-1} - \frac{x}{2x+1} &= \frac{(x-2)(2x+1) - x(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)} \\
&= \frac{2x^2 + x - 4x - 2 - 3x^2 + x}{6x^2 + 3x - 2x - 1} \\
&= \frac{-x^2 - 2x - 2}{6x^2 + x - 1}
\end{aligned}$$

Equações

Definição

Uma equação é uma afirmativa de igualdade entre duas expressões.

Exemplos

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $y = 2x + 1$
- $x^3 - 2x^2 = 3x - 10$

Contra-exemplos

- $x \neq 1$
- $x^2 - 2x + 1 > 0$
- $3x^3 - 2 < 2x^2 + 1$

- $x = 1, y = 0, z = 0$ é uma solução de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois
$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$
- $x = 1, y = 3$ é uma solução de $y = 2x + 1$, pois
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
- $x = -2$ é uma solução de $x^3 - 2x^2 = 3x - 10$, pois
$$(-2)^3 - 2(-2)^2 = -16 = 3(-2) - 10$$

- $x = 1, y = 0, z = 0$ é uma solução de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois
$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$
- $x = 1, y = 3$ é uma solução de $y = 2x + 1$, pois
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
- $x = -2$ é uma solução de $x^3 - 2x^2 = 3x - 10$, pois
$$(-2)^3 - 2(-2)^2 = -16 = 3(-2) - 10$$

Definição

Dizemos que duas equações são equivalentes se elas possuem o mesmo conjunto solução.

Resolução de equações

Como obter equações equivalentes a uma equação dada?

Resolução de equações

Como obter equações equivalentes a uma equação dada?

1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e agrupar símbolos

Exemplo

$3x - x = \frac{3}{9}$ e $2x = \frac{1}{3}$ são equivalentes.

Resolução de equações

Como obter equações equivalentes a uma equação dada?

1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e agrupar símbolos

Exemplo

$3x - x = \frac{3}{9}$ e $2x = \frac{1}{3}$ são equivalentes.

2. Realizar a mesma operação de ambos os lados

Exemplos

- $x - 2 = 4$ e $x = 6$ são equivalentes.
- $3x = 4 + 2x$ e $x = 4$ são equivalentes.
- $\frac{1}{2}x = 4$ e $x = 8$ são equivalentes.
- $2x = 8$ e $x = 4$ são equivalentes.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
2(\clubsuit - 1) - 3(\clubsuit - 2) &= -4\clubsuit + 1 \\
2\clubsuit - 2 - 3\clubsuit + 6 &= -4\clubsuit + 1 \\
-\clubsuit + 4 &= -4\clubsuit + 1 \\
-\clubsuit + 4\clubsuit &= 1 - 4 \\
3\clubsuit &= -3 \\
\clubsuit &= -1
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
2(\clubsuit - 1) - 3(\clubsuit - 2) &= -4\clubsuit + 1 \\
2\clubsuit - 2 - 3\clubsuit + 6 &= -4\clubsuit + 1 \\
-\clubsuit + 4 &= -4\clubsuit + 1 \\
-\clubsuit + 4\clubsuit &= 1 - 4 \\
3\clubsuit &= -3 \\
\clubsuit &= -1
\end{aligned}$$

Equação quadrática

Uma equação quadrática é aquela na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Fórmula de Bhaskara

As soluções de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Uma equação quadrática pode possuir zero, uma ou duas soluções (também chamadas raízes) reais.

Exemplo

A equação $2x^2 + x - 1 = 0$ possui soluções

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Equação modular

Considere a equação

$$|3x + 2| = 5$$

$$\begin{array}{ccc} 3x + 2 = 5 & \text{ou} & -(3x+2) = 5 \\ 3x = 3 & & -3x - 2 = 5 \\ x = 1 & & -3x = 7 \\ & & x = -\dfrac{7}{3} \end{array} \qquad \mathbf{S = \{-\frac{7}{3}, 1\}}$$

Agora, observe a equação

$$|x - 1| = -2$$

Ela possui solução?

Fatoração de polinômios

- **Fator em comum:**
  $3x + 4a - 2xy - 2\pi ba = x(3 - 2y) + 2a(2 - \pi b)$
- **Agrupamento**:
  $tk + t - kz - z = t(k + 1) - z(k + 1) = (t - z)(k + 1)$
- **Trinômio quadrado perfeito**
  $(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2$;
  $(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^2$

Fatoração de polinômios

Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. Se a é raiz de $p(x)$ então

$$\mathbf{p(x) = (x - a)q(x)}$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau $n-1$.

Considere o polinômio $2x^2 + x - 1$
Como vimos, $x_1 = -1$ e $x_2 = \dfrac{1}{4}$ são raízes da equação $2x^2 + x - 1 = 0$; portanto,

$$\mathbf{2x^2 + x - 1 = (x - (-1))\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{4}\right)}$$

Você já foi ao cinema?

Em um cinema:

- Todas as pessoas assistem ao filme sentadas;
- Cada pessoa tem direito a uma única poltrona.

Chamemos de:

- A o conjunto de pessoas que foram a uma determinada sessão de cinema;
- B o conjunto de poltronas na sala do cinema.

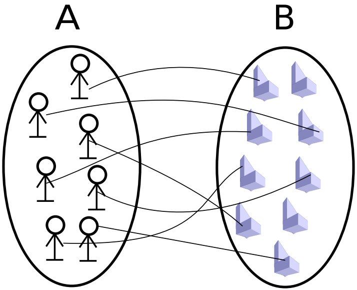


Figura : Cada pessoa de A está sentada em uma única poltrona de B

Função

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que, a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Notação:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- A é chamado de domínio de f;
- B é chamado de contra-domínio de f;
- o conjunto $f(A)$ (elementos de B que possuem pré-imagem em A) é chamado de Imagem de f.

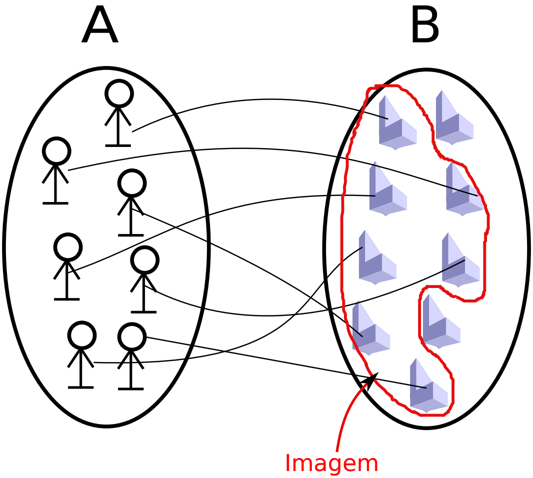


Figura : Cada pessoa de A está sentada em uma única poltrona de B

Observe que existem poltronas do conjunto B que estão vazias...

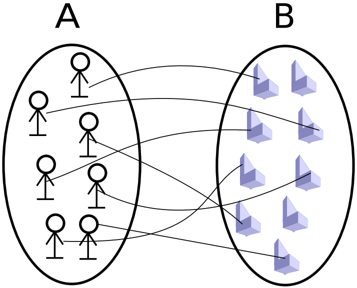


Figura : Esta função não é sobrejetora

Função sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é dita sobrejetora, se para cada elemento $b \in B$, existe um elemento $a \in A$, tal que $f(a) = b$.

Existem casais "apaixonados" que dividem a mesma poltrona...

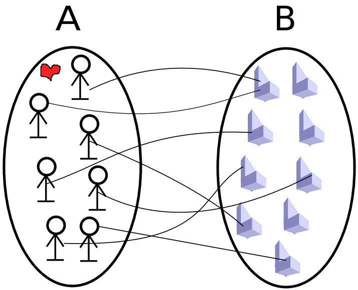


Figura : Esta função não é injetora

Função injetora

Uma função $f : A \to B$ é dita injetora, sempre que: para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 \neq a_2$ tem-se $f(a_1) \neq f(a_2)$.

As poltronas de um cinema são numeradas... logo, podemos associar a cada pessoa da sala, o número da sua poltrona.

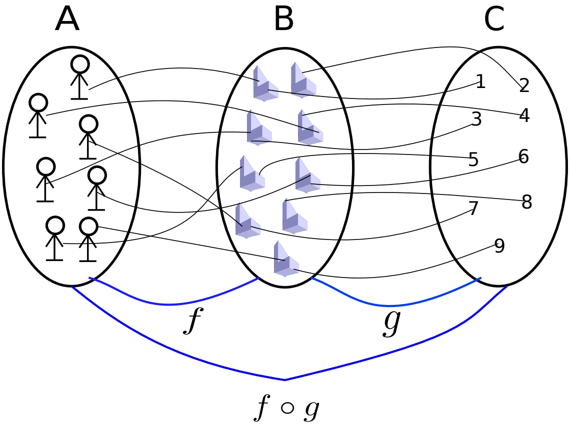


Figura : A composta $f \circ g : A \to C$

- Se A e B são subconjuntos dos números reais, $f : A \to B$ é dita uma função real.
- Uma função real pode ser vista como um processador de números.

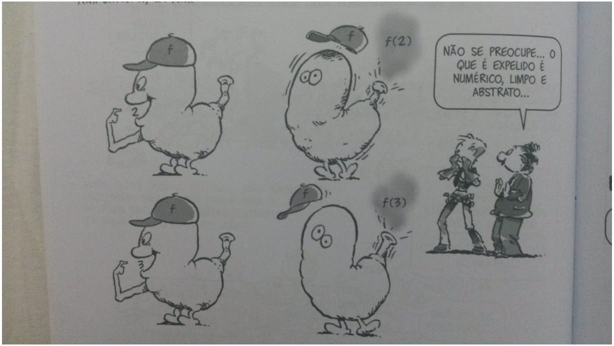


Figura : Figura retirada de [2], pág. 20

Exemplo

Figura : Figura retirada de [2], pág. 21

Exemplo de compostas de funções reais

Figura : Figura retirada de [2], pág. 47

$f(x) = x^2 + 1$; $g(u) = \sqrt{u}$; $s(y) = cos(y)$ e $v(t) = e^t$:

$$v(s(g(f(x)))) = e^{cos(\sqrt{x^2+1})}$$

Existem funções que não fazem nada...

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

Figura : Figura retirada de [2], pág. 48

Funções inversas

Se $f : A \to B$ é uma função bijetora, faz sentido considerar $f^{-1} : B \to A$.

f^{-1}**, a inversa de** f**, tem como trabalho desfazer o que a** f **faz!**

$$\mathbf{f^{-1}(f(x)) = x}$$

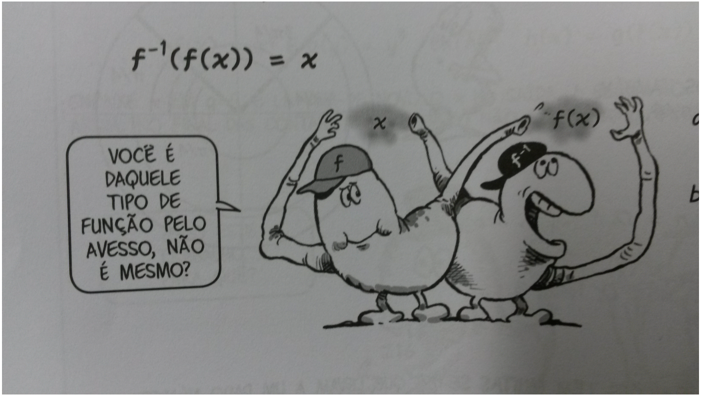


Figura : Figura retirada de [2], pág. 50

Funções inversas

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x - 1$.
Observe que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$, onde $g(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

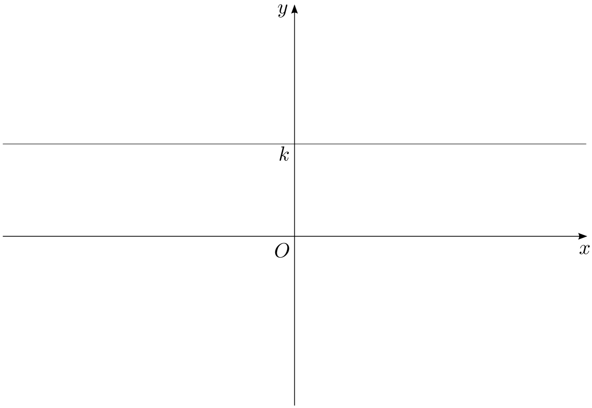
$$g(f(x)) = \frac{3x - 1 + 1}{3} = x$$

Portanto, $g = f^{-1}$.

Algumas funções especiais

Função constante

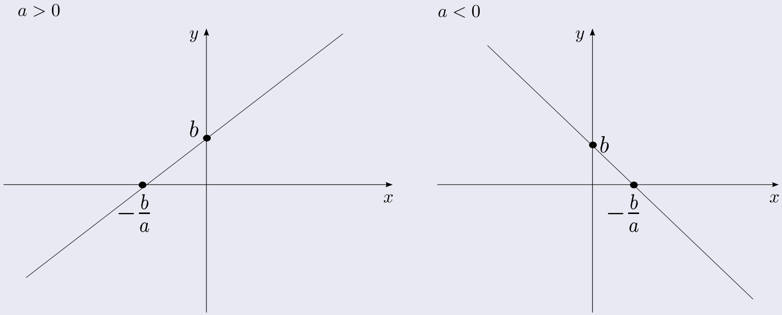
Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, dizemos que f é uma função constante.



Função afim

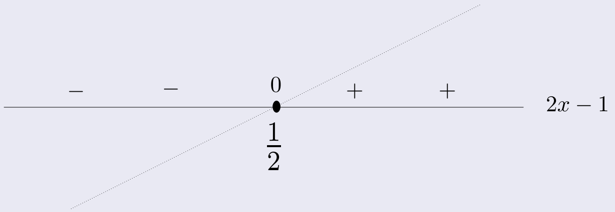
Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, dizemos que f é uma função afim.

Gráfico de uma função afim



Exemplo (Inequações do primeiro grau)

- $f(x) = 2x - 1$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$



- $2x - 1 < 0$ em $(-\infty, 1/2)$ e
- $2x - 1 \geq 0$ em $[1/2, +\infty)$.

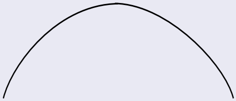
função quadrática

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, dizemos que f é uma função quadrática.

Gráfico de uma função quadrática

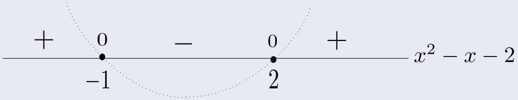
$a > 0$

$a < 0$



Exemplo (Inequações do segundo grau)

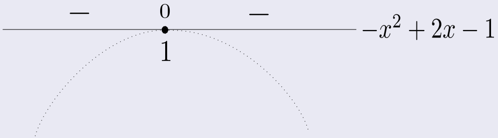
- $f(x) = x^2 - x - 2$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$



- $x^2 - x - 2 \leq 0$ em $[-1, 2]$ e
- $x^2 - x - 2 > 0$ em $(-\infty, -1)$ e em $(2, +\infty)$

Exemplo

- $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



- $-x^2 + 2x - 1 < 0$ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e
- o conjunto solução de $-x^2 + 2x - 1 > 0$ é vazio.

Outras Inequações

Exemplo

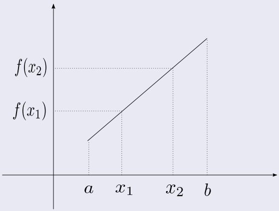
- $f(x) = (2x-1)(x^2-x-2)$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-x-2) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0$ ou $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x=-1$ ou $x=2$

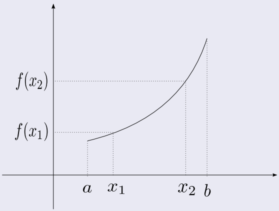
		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-1)(x^2-x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

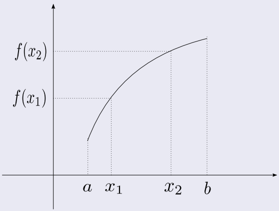
Inequações e construção de gráficos

Funções crescentes

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

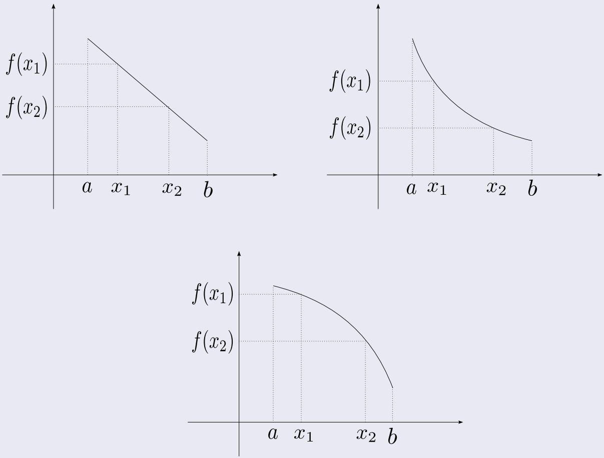




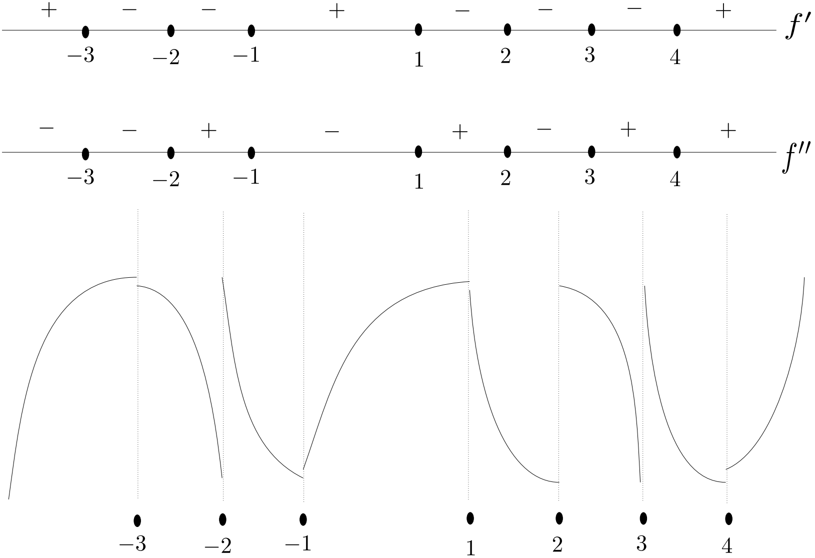


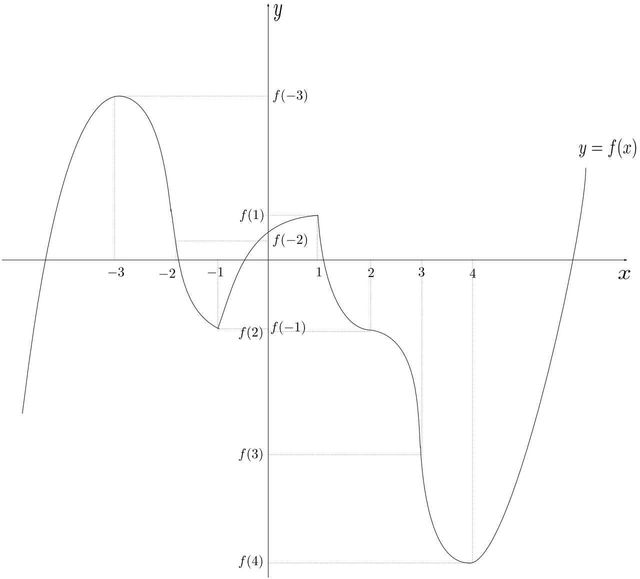
Funções decrescentes

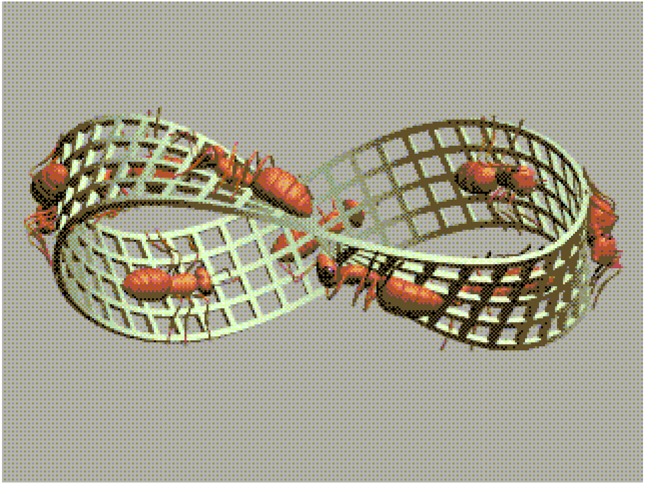
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Inequações e Construção de gráficos




y
$f(-3)$
$y = f(x)$
$f(1)$
$f(-2)$
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
$f(2)$
$f(-1)$
$f(3)$
$f(4)$



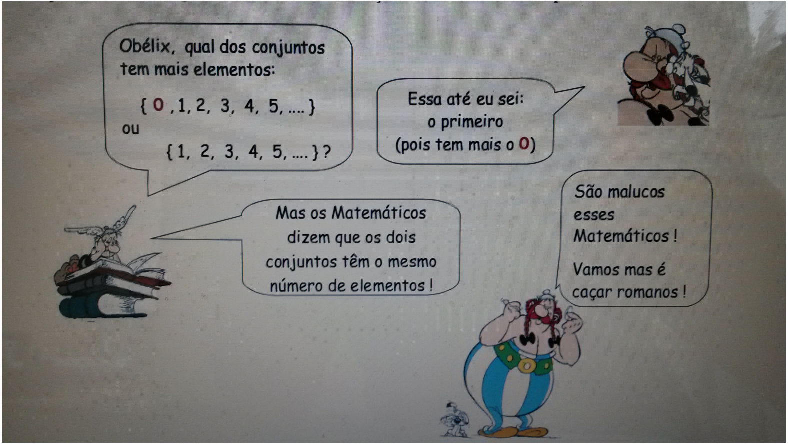


Figura : Figura retirada da internet

Infinito é o conceito de falta de limite no tamanho, quantidade ou extensão.

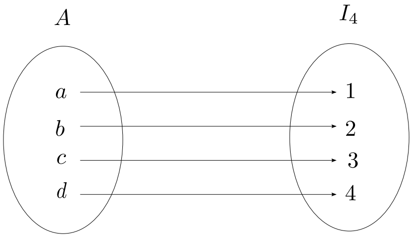
- Zenão (no século V a.C.): Corrida entre Aquiles e uma tartaruga.
- George Cantor (no final do século XIX): Conjuntos infinitos podem ter tamanhos diferentes.

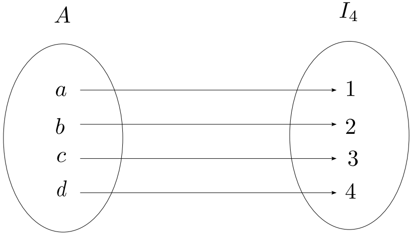
Infinito é o conceito de falta de limite no tamanho, quantidade ou extensão.

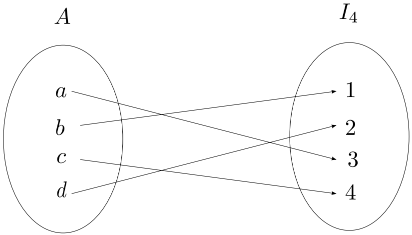
- Zenão (no século V a.C.): Corrida entre Aquiles e uma tartaruga.
- George Cantor (no final do século XIX): Conjuntos infinitos podem ter tamanhos diferentes.

Cardinalidade de um conjunto

Como contar o número de elementos de um conjunto?


A
I4
a
b
c
d
1
2
3
4


A
I_4
a
b
c
d
1
2
3
4


A
I_4
a
b
c
d
1
2
3
4

- Dado um número natural n, dizemos que um conjunto A tem cardinalidade (número de elementos) n, e escrevemos

$$|A| = n,$$

se existe uma bijeção entre $I_n = \{1, \cdots, n\}$ e A.
- Um conjunto A é finito se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$.
- Dizemos que um conjunto é infinito se ele não é finito.

Dizemos que dois conjuntos A e B têm mesma cardinalidade, e escrevemos $|A| = |B|$, se existe uma bijeção entre A e B.

Exemplo

- $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{2k | k \in \mathbb{N}\},\ \varphi(k) = 2k$, é uma bijeção entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos números pares.
- $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ \psi(n) = \begin{cases} k & \text{se } n = 2k \\ -(k+1) & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$, é uma bijeção entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros.
- $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1),\ \xi(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} + 1\right)$, é uma bijeção.

Exemplo

- $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{2k | k \in \mathbb{N}\},\ \varphi(k) = 2k$, é uma bijeção entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos números pares.
- $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ \psi(n) = \begin{cases} k & \text{se } n = 2k \\ -(k+1) & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$, é uma bijeção entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros.
- $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1),\ \xi(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} + 1\right)$, é uma bijeção.

Teorema

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma função injetora dele em um subconjunto próprio.

Conjuntos comparáveis

Dizemos que o conjunto A é menor do que ou igual ao conjunto B (em termos de cardinalidade) se existe uma função injetiva de A em B. Neste caso, escrevemos $A \leq B$.

Dois conjuntos infinitos quaisquer são comparáveis.

Pode-se mostrar que se A é infinito e $A \leq B$, então B é infinito.

Em particular, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é infinito.

Conjuntos comparáveis

Dizemos que o conjunto A é menor do que ou igual ao conjunto B (em termos de cardinalidade) se existe uma função injetiva de A em B. Neste caso, escrevemos $A \leq B$.

Dois conjuntos infinitos quaisquer são comparáveis.

Pode-se mostrar que se A é infinito e $A \leq B$, então B é infinito.

Em particular, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é infinito.

Existe um conjunto infinito que é menor do que ou igual a todos os outros conjuntos infinitos.

Proposição

Tem-se $\mathbb{N} \leq A$, qualquer que seja o conjunto infinito A.

Prova

Seja A um conjunto infinito. Queremos mostrar que existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

- Escolha um elemento $a_1 \in A$ e ponha $f(1) = a_1$.
- Escolha um elemento $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ e ponha $f(2) = a_2$.
- Após definidos $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \cdots, f(n) = a_n$, escolha $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e ponha $f(n+1) = a_{n+1}$.

Definição

Um conjunto é dito enumerável se ele tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Proposição

O intervalo $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ não é enumerável.

Prova

- $(0,1)$ não é finito.
- Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1),\ f(n) = a_n$, uma função qualquer.
- $$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 0, a_{11} a_{12} a_{13} \cdots \\ a_2 & = & 0, a_{21} a_{22} a_{23} \cdots \\ a_3 & = & 0, a_{31} a_{32} a_{33} \cdots \\ \vdots & & \end{array}$$

- Ponha $b = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots$, onde

$$b_i = \begin{cases} 4 & \text{se } a_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{se } a_{ii} = 4 \end{cases}$$

- $b \in (0,1)$ e $b \notin Im(f)$.

Corolário

$\mathbb{R}$ não é enumerável.

- Dizemos que a cardinalidade de A é menor do que ou igual a cardinalidade de B, e escrevemos $|A| \leq |B|$, se $A \leq B$.
- Se $|A| \leq |B|$, mas $|A| \neq |B|$, então escrevemos $|A| < |B|$.

Teorema (Cantor)

- Para todo conjunto A, temos que $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.
- $|\mathbb{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Aleph 0, Aleph 1, $\cdots$

$\aleph^0 = |\mathbb{N}| < \aleph^1 = |\mathbb{P}(\mathbb{N})| < \aleph^2 = |\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$$

Qual o resultado?

$$2 \times 9 + 6 \div 2 \times 2 =$$

16, 22 ou 19?

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2+2x} \neq \frac{2+x-3}{1+2x}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2x} \neq \frac{2 + x - 3}{1 + 2x}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $a, b \geq 0$ reais,

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2+2x} \neq \frac{2+x-3}{1+2x}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $a, b \geq 0$ reais,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Verdadeiro ou falso?

Para $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} = sen(2)$$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} = sen(2)$$

Verdadeiro ou falso?

A inversa da função real $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$

Verdadeiro ou falso?

$$\frac{sen(2x)}{sen(x)} = sen(2)$$

Verdadeiro ou falso?

A inversa da função real $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2x}$

Verdadeiro ou falso?

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Será?

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{x = y}$. Então:

$$
\begin{array}{ccc}
x^2 & = & yx \\
x^2 - y^2 & = & yx - y^2 \\
(x-y)(x+y) & = & y(x-y) \\
x + y & = & y \\
2y & = & y \\
2 & = & 1
\end{array}
$$

Referências I

Apostolos Doxiadis and Christos H. Papadimitriou.
Logicomix: uma jornada épica em busca da verdade.
Martins Fontes, 2010.

Larry Gonick.
Cálculo em Quadrinhos.
Blucher, 2014.

Gelson Iezzi and Carlos Murakami.
Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1.
Atual Editora, 9 edition, 2013.

Tatiana Roque.
História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.
Zahar, 2012.