$\sqrt{2}$

I Workshop de Álgebra da UFG – CAC
Anel de Grupo

Alan Rodrigues dos Santos - alansantos2102@hotmail.com

Jean Duarte e Silva - jeansilvapdr@gmail.com

Danilo S. da Silveira – sancaodanilo@gmail.com

- **Resumo**

- Dados um grupo G e um anel R, vamos usar as operações de G e R para construir um novo anel RG chamado anel de grupo de G sobre R. Por fim, veremos sobre quais condições o anel RG é comutativo.

- **Introdução**
- Anel de grupo é um assunto antigo na história da Teoria Abstrata de Grupos, aparecendo implicitamente num artigo de A.Cayley em 1854, e posteriormente formalizado por T. Molien em 1897. Na atualidade, este assunto é bastante pesquisado, ocupando lugar importante em reuniões internacionais de teoria: de grupos, anéis, álgebras e representações, e são publicados diversos artigos relacionados a esse assunto.

- **Preliminares**

- **Definição**: Dizemos que um conjunto não vazio G juntamente com uma operação binária
- $*: G\text{x}G \to G, \quad (a,b) \mapsto a * b$
- é um grupo se satisfaz as seguintes propriedades:
- dados a,b,c ∈ G, tem-se a*(b*c) = (a*b) *c;
- existe 1∈ G tal que 1*a=a*1=a, para todo a ∈ G;
- ∀ a ∈ G, existe b ∈ G, tal que b*a=a*b=1.
- Dizemos que um grupo G é abeliano, quando a*b =b*a ∀ a,b ∈ G.
- Exemplo: O conjunto
- S_3:={f:{1,2,3}→{1,2,3}| f é uma função bijetora}={f1,f2,...,f6}.
- é um grupo se considerarmos a composição de funções como a operação binária no conjunto S3. De fato,
- é fechado para operação de composição, pois é bastante conhecido que a composição de duas bijeções é uma bijeção. Também é conhecido que a coposição de funções é associativa. Ora, S3 possui elemento neutro que é a função identidade de conjunto {1,2,3}. Por fim, sabemos que toda bijeção possui inversa.
- **Definição**: Um anel é um conjunto A com pelo menos dois elemento, munidos de uma operação denotada por +(chamada adição) e de uma operação denotada por ● (chamada multiplicação).
- $+: A\text{x}A \to A \quad (a,b) \mapsto a+b$
- $\bullet: A \text{ x } A \to A \quad (a,b) \mapsto a \bullet b$

- As quais devem satisfazer as seguintes condições:
- (A,+) é um grupo abeliano.
- ∀ a,b,c ∈ A, vale : a• (b•c) = (a•b) •c
- ∀ a,b,c ∈ A, vale : a• (b+c) = a• b + a• c e (b+c) • a = b• a + c• a
- 4) ∀ x ∈ A existe 1∈ A tal que 1•x=x e x•1=x
- **Exemplo**: O conjunto 2 = {0, 1} com as operações (+, ●) cujas tabuadas são dadas nas tabelas abaixo é um anel.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

•	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

- **Anel de Grupo**
- Seja $G = \{ g_1, g_2, g_3, \dots , g_4\}$ um grupo finito , e R um anel. Denotaremos por RG o conjunto de todas as somas formais da forma:
- $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$, onde $a_i \in R$ e $g_i \in G$, ou seja,
- $RG = \{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid a_i \in R \text{ e } g_i \in G\}$
- Dados dois elementos de RG, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j g_j$, definimos a soma $\propto +\beta$ por
- $\alpha + \beta = (\sum_{i=1}^{n} a_i g_i) + (\sum_{j=1}^{n} b_j g_j) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) g_i \in RG$
- e a multiplicação $\alpha.\beta$ por:
- $\alpha.\beta = (\sum_{i=1}^{n} a_i g_i).(\sum_{j=1}^{n} b_j g_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j g_i g_j) \in RG$

- **Proposição:** O conjunto RG, com as operações definidas acima é um anel conhecido como anel de grupo de G sobre R.
- Observações:
- Elementos de RG que possuem coeficiente(elementos de R) igual a zero serão desconsiderados, por exemplo, $0g_1 + 0g_2 + a_1 g_3 = a_1 g_3$
- Por simplicidade, identificaremos $1_R g_i = g_i$ para todo $g_i \in RG$.
-

- **Definição 1:** Sejam
- $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{n} b_j g_j$ elementos de do anel de grupo RG.
- Dizemos que $\alpha = \beta \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n$.
- **Perguntas**
- **Pergunta 1:** Quem é o elemento neutro multiplicativo ($1_{RG} = 1$) de RG?
- $1_{RG} = 1_R . 1_G$, pois
- $(1_R.1_{G)} (\sum_{i=1}^{n} a_i g_i) = \sum 1_R a_i 1_G g_i = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$
- **Pergunta 2:** Quem é o inverso aditivo de α em RG?
- se $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \Rightarrow -\alpha = \sum_{i=1}^{n}(-a_i) g_i$.
- De fato,
- $\alpha + (-\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + (-a_i)) g_i = \sum_{i=1}^{n} 0 g_i = 0 = 0g_1 + 0g_2 + \dots + 0g_n = 0_{RG}$
- **Pergunta 3:** Quando RG é comutativo, ou seja, quando que $\alpha\beta = \beta\alpha, \forall\, \alpha, \beta \in RG$?
- Se RG for comutativo então para $\alpha = a g_i$, $\beta = b g_j$ tem-se:
- $\alpha\beta = \beta\alpha$
- $\alpha\beta = (a g_i)(b g_i) = a b g_i g_j$
- $\beta\alpha = (b g_i)(a g_i) = b a g_j g_i$
- $\Rightarrow ab = ba, \forall\, a, b \in R \Rightarrow R$ comutativo
- $\Rightarrow g_i\, g_j = g_j g_i, \forall\, g_i, g_j \in G \Rightarrow G$ comutativo
- Ou seja, RG é comutativo se, e somente se, R é comutativo e G é abeliano.
- **Exemplo de Anel de Grupo**
- $\mathbb{Z}_2 S_3 = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \mid a_i \in \{\overline{0}, \overline{1}\}, f_i \in S_3\}$
- $(\bar{0} f_1) + (\bar{0} f_1 + (\bar{1} f_6)) = (\bar{0} + \bar{0}) f_1 + \bar{1} f_6 = \bar{1} f_6$
- $(\bar{0} f_1 + \bar{1} f_2 + \bar{0} f_5) + (\bar{0} f_1 + \bar{0} f_2) = (\bar{0} + \bar{0}) f_1 (\bar{1} + \bar{1}) f_2\, \bar{0} f_5 = 0$
- $(\bar{1} f_1)(\bar{0} f_1 + \bar{1} f_2) = \bar{1} . \bar{0} f_{1\,o} f_1 + \bar{1} . \bar{1} f_{1\,o} f_2 = \bar{1} f_{1\,o} f_2$

- **Referência Bibliográfica:**

- An Introduction to Group of Rings: Algebras e Applications-vol 1: Cesar Polcino Milies e S. K. Segal .

* A impressão deste foi financiada pela FAPEG .