

INTRODUÇÃO

TRELIÇA é uma estrutura formada por elementos relativamente delgados ligados entre si pelas extremidades. Para que seja caracterizada como treliça, as CARGAS devem estar aplicadas unicamente nos NÓS, sendo o peso próprio de cada barra aplicado metade em cada nó da sua extremidade (Hibbeler, 2010).

Os nós trabalham como rótulas, não há transmissão de momento. Atuam apenas forças axiais de compressão e tração nas barras. A estabilidade da treliça é garantida por sua forma suficientemente rígida ou estável, sendo que a mais simples é a FORMA TRIANGULAR.

Ao considerar um diagrama de corpo livre da treliça, tem-se que as forças nos elementos são FORÇAS INTERNAS a estes. Dessa forma, a determinação das forças em cada barra depende da análise do equilíbrio de cada nó da treliça, através das equações 1 e 2, onde F_x são as forças internas horizontais e F_y forças internas verticais.

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

Assim com conceitos de engenharia e álgebra linear será analisada matricialmente a Treliza de Howe, com separação em três matrizes: de forças internas, forças externas e de ângulos.



MATERIAIS E MÉTODOS

Na treliça do tipo Howe as diagonais são dispostas em direção à extremidade da treliça e suportam, primordialmente, forças de compressão, enquanto os montantes estão sujeitos a esforços de tração. Como mostrado na Figura 1, a treliça a ser analisada é composta por 21 barras formando 12 nós. São consideradas forças distintas aplicadas nos nós superiores da treliça.

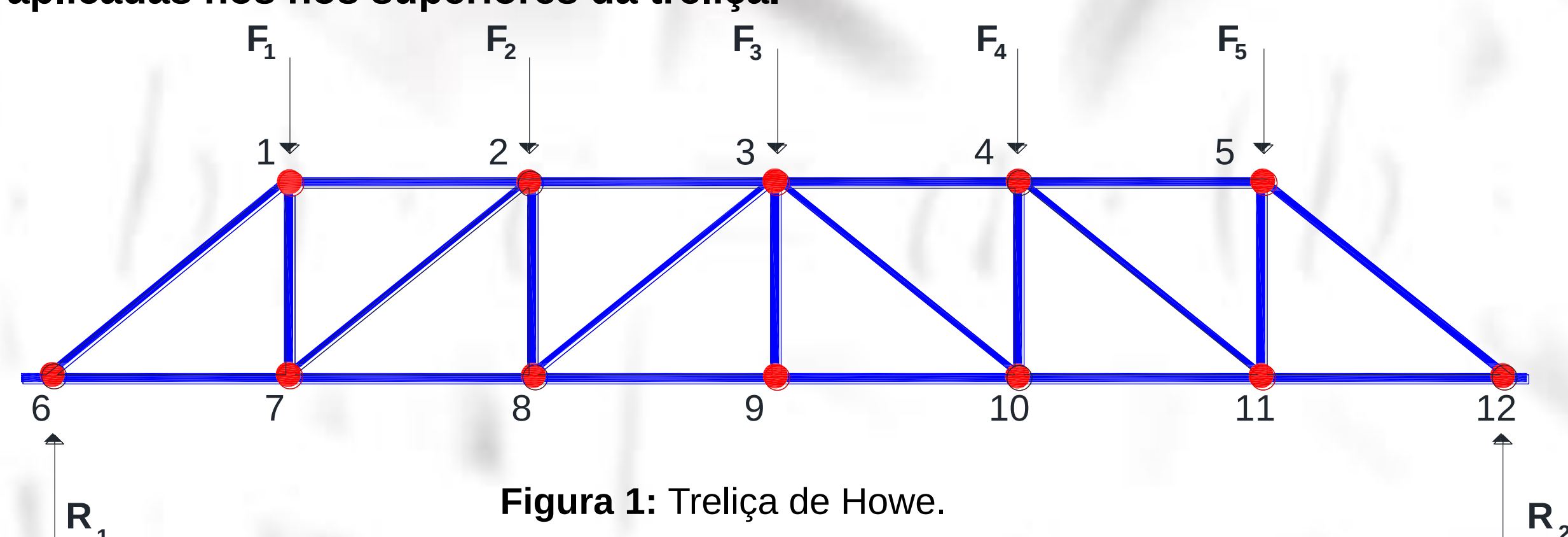


Figura 1: Treliza de Howe.

Através do Método dos Nós considera-se que todas as forças, aplicadas nos nós, são de tração, ou seja, puxam o nó. Para cada nó aplica-se somatório de forças atuantes nas duas direções para avaliar o equilíbrio. Na Figura 2 tem-se o esquema das forças atuantes no nó 1.

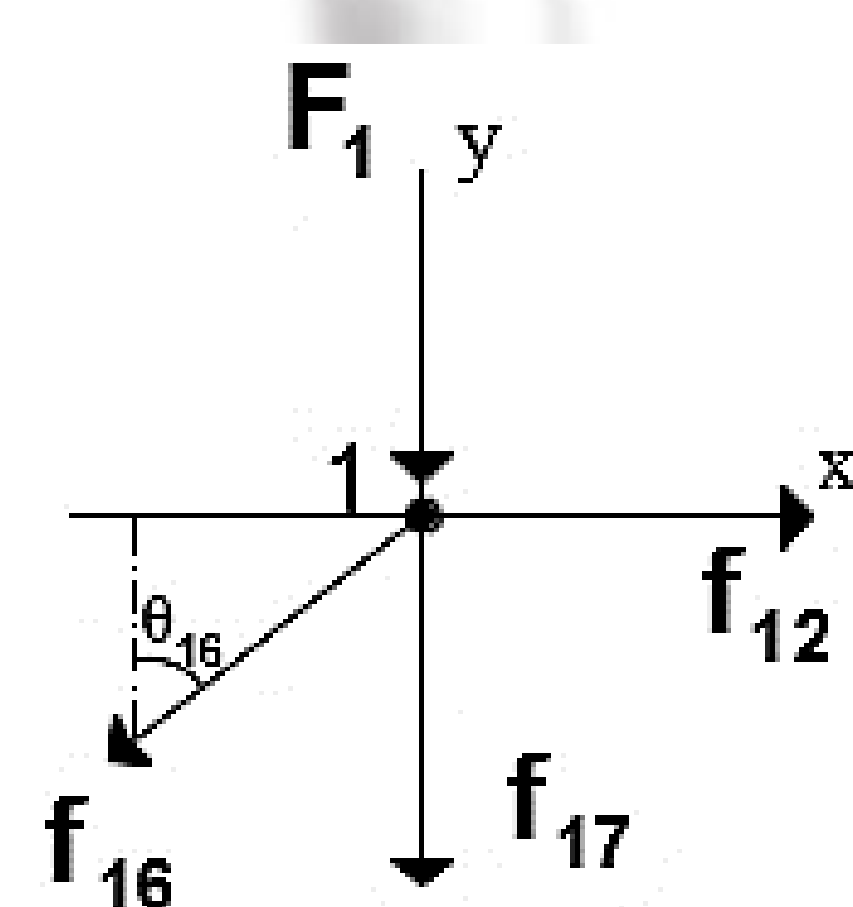


Figura 2: Forças atuantes no nó 1.

O ângulo interno formado entre uma barra ij e a vertical é do tipo θ_{ij} .

i - nó de início da força
 j - nó onde termina a força.

F_i - Força externa ao nó i

f_{ij} - Força interna à barra ij

Pela imposição das equações de equilíbrio, tem-se as seguintes equações em x e em y :

$$f_{12}\sin\theta_{12} + f_{16}\sin\theta_{16} + f_{17}\sin\theta_{17} = 0$$

$$f_{12}\cos\theta_{12} + f_{16}\cos\theta_{16} + f_{17}\cos\theta_{17} = F_1$$

Portanto, pode-se descrever de forma geral o somatório das forças atuantes em x e em y , respectivamente, nas equações 3 e 4.

$$\sum_{ij} f_{ij}\sin\theta_{ij} = F_i \quad (3)$$

$$\sum_{ij} f_{ij}\cos\theta_{ij} = F_i \quad (4)$$

Aplicando a equação de equilíbrio para os demais nós, tem-se:

$$f_{21}\sin\theta_{21} + f_{23}\sin\theta_{23} + f_{27}\sin\theta_{27} + f_{28}\sin\theta_{28} = 0$$

$$f_{21}\cos\theta_{21} + f_{23}\cos\theta_{23} + f_{27}\cos\theta_{27} + f_{28}\cos\theta_{28} = F_2$$

$$\vdots$$

$$f_{125}\sin\theta_{125} + f_{1211}\sin\theta_{1211} = 0$$

$$f_{125}\cos\theta_{125} + f_{1211}\cos\theta_{1211} = 0$$

As matrizes F (matriz das forças externas), f (matriz das forças internas nas barras) e A (matriz dos cossenos e senos dos ângulos de decomposição das forças) representam as expressões de acordo com a equação 5.

$$F = A \cdot f \quad (5)$$

Dada a configuração ij , há repetição de forças nas equações devido aos nós de referência para nomeação das forças. Assim, tem-se a seguinte relação:

$$f_{ij} = -f_{ji}$$

Visto isto, tem-se as matrizes F , A e f a seguir.

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{16} \\ f_{17} \\ f_{23} \\ f_{27} \\ f_{28} \\ f_{34} \\ f_{38} \\ f_{39} \\ f_{310} \\ f_{45} \\ f_{410} \\ f_{411} \\ f_{511} \\ f_{512} \\ f_{67} \\ f_{78} \\ f_{89} \\ f_{910} \\ f_{1011} \\ f_{1112} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \\ F_4 \\ 0 \\ F_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\cos\theta_{12}$	$\cos\theta_{16}$	$\cos\theta_{17}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sin\theta_{12}$	$\sin\theta_{16}$	$\sin\theta_{17}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\cos\theta_{12}$	0	0	$\cos\theta_{23}$	$\cos\theta_{27}$	$\cos\theta_{28}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sin\theta_{12}$	0	0	$\sin\theta_{23}$	$\sin\theta_{27}$	$\sin\theta_{28}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\cos\theta_{23}$	0	0	$\cos\theta_{34}$	$\cos\theta_{38}$	$\cos\theta_{39}$	$\cos\theta_{310}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\sin\theta_{23}$	0	0	$\sin\theta_{34}$	$\sin\theta_{38}$	$\sin\theta_{39}$	$\sin\theta_{310}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{34}$	0	0	0	$\cos\theta_{45}$	$\cos\theta_{410}$	$\cos\theta_{411}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{34}$	0	0	0	$\sin\theta_{45}$	$\sin\theta_{410}$	$\sin\theta_{411}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{45}$	0	0	$\cos\theta_{511}$	$\cos\theta_{512}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{45}$	0	0	$\sin\theta_{511}$	$\sin\theta_{512}$	0	0	0	0	0	0
0	$-\cos\theta_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\theta_{67}$	0	0	0	0	0
0	$-\sin\theta_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sin\theta_{67}$	0	0	0	0	0
0	0	$-\cos\theta_{17}$	0	$-\cos\theta_{27}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{67}$	$\cos\theta_{78}$	0	0	0	0
0	0	$-\sin\theta_{17}$	0	$-\sin\theta_{27}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{67}$	$\sin\theta_{78}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{28}$	0	$-\cos\theta_{38}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{78}$	$\cos\theta_{89}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{28}$	0	$-\sin\theta_{38}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{78}$	$\sin\theta_{89}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{39}$	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{89}$	$\cos\theta_{910}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{39}$	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{89}$	$\sin\theta_{910}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{310}$	0	$-\cos\theta_{410}$	0	0	0	0	$-\cos\theta_{910}$	$\cos\theta_{1011}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{310}$	0	$-\sin\theta_{410}$	0	0	0	0	$-\sin\theta_{910}$	$\sin\theta_{1011}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{411}$	$-\cos\theta_{511}$	0	0	0	0	$-\cos\theta_{1011}$	$\cos\theta_{1112}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{411}$	$-\sin\theta_{511}$	0	0	0	0	$-\sin\theta_{1011}$	$\sin\theta_{1112}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\cos\theta_{512}$	0	0	0	0	$-\cos\theta_{1112}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\theta_{512}$	0	0	0	0	$-\sin\theta_{1112}$

Dessa forma, tem-se a equação 6, dado o rearranjo da equação 5 quando A é invertível, para determinação das forças internas das barras.

Assim a matriz F , forças externas, é multiplicada à esquerda por A^{-1} .

$$f = A^{-1} \cdot F \quad (6)$$

Considerações Finais

Esse modelo matricial, bastante empregado por softwares de análise de estruturas, no qual são segregadas as variáveis das equações possibilita a resolução de diferentes sistemas que são descritos na forma de vetores. Ao ressaltar a matriz A nas equações 5 e 6, pode-se relacionar a teoria das estruturas e os conceitos de álgebra linear para analisar as seguintes questões:

1. Qual influência da matriz A ser invertível ou não, ou seja, $\det(A) \neq 0$?
2. O aumento no comprimento das barras, necessariamente, influencia na solução da equação (6)?
3. Considerando que a estrutura é simétrica e submetida a forças idênticas, é possível gerar uma matriz A simétrica com operações elementares de escalonamentos?

Referências

HIBBELER, R.C. *Estática – Mecânica para engenharia*. 12° ed. Brasília: Pearson Education, 2011.
POSSAMAI, J. P. et al. Aplicação de álgebra linear na engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 39., 2011, Blumenau. *Anais ...* Blumenau: FURB, 2011. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/moreira/disciplinas/art2127.pdf>