Universidade Federal de Goiás

Análise 1 - Lista 4

25 de abril de 2014

1. Considere os seguintes conjuntos:

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \text{ e } Y = \{y \in \mathbb{Q} : y \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

(a) Mostre que X é limitado.

(b) Mostre que Y é limitado superiormente.

(c) Mostre que X não possui elemento máximo.

Dica:

i. Mostre que existe um número racional $r < 1$ tal que $0 < r < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$.

ii. Agora, mostre que para tal r obtido acima, vale que $x + r \in X$.

(d) Mostre que Y não possui elemento mínimo.

Dica:

i. Mostre que existe um número racional r tal que $0 < r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$. Para isso, verifique que $\dfrac{y^2 - 2}{2y} = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{y} < \dfrac{y}{2}$.

ii. Mostre que para tais racionais r, y obtidos no item anterior temos que $y - r > 0$.

iii. Agora mostre que $y + r \in Y$.

(e) Prove que se $x \in X$ e $y \in Y$ então $x < y$.

(f) Use os itens anteriores para concluir que em $\mathbb{Q}$ o conjunto X não possui supremo e o conjunto Y não possui ínfimo.

2. Sejam $A \subseteq B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $infB \leq infA \leq supA \leq supB$.

3. Sejam A, B conjuntos não-vazios de números reais, tais que se $x \in A$ e $y \in B$ então $x \leq y$. Prove que $supA \leq infB$. Prove ainda que, $supA = infB$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \epsilon$.

4. Dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado inferiormente, seja $-A = \{-x : x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $sup(-A) = -infA$.

5. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio limitado. Dado $c > 0$, seja $c.A = \{c.x : x \in A\}$. Prove que $c.A$ é limitado e que $sup(c.A) = c.supA$, $inf(c.A) = c.infA$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

6. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Prove que:

   (a) $A + B$ é limitado;

   (b) $sup(A + B) = supA + supB$;

   (c) $inf(A + B) = infA + infB$.

7. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $supf$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

   (a) Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada $f + g : X \to \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + f(Y)$.

   (c) Conclua que $sup(f + g) \leq supf + supg$ e que $inf(f + g) \geq inff + infg$.

   (d) Considerando as funções $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $sup(f + g) < supf + supg$ e $inf(f + g) > inff + infg$.

8. Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $A.B = \{x.y : x \in Aey \in B\}$. Prove que se A e B forem limitados então $A.B$ é limitado, sendo $sup(A.B) = supA.supB$ e $inf(A.B) = infA.infB$.