Universidade Federal de Goiás

Análise 1 - Lista 1

6 de março de 2014

1. Mostre que a relação $A \subset B$ é:

   (a) Reflexiva, isto é, $A \subset A$;

   (b) Anti-simétrica, isto é, se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;

   (c) Transitiva, isto é, se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

2. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x > 5\}$. Calcule $A \cup B$ e $A \cap B$.

3. Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Mostre as seguintes propriedades:

   (a) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$

   (b) $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

   (c) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

   (d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   (e) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ e $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

   (f) Se $A \subset A'$ e $B \subset B'$ então $A \cup B \subset A' \cup B'$

   (g) Se $A \subset A'$ e $B \subset B'$ então $A \cap B \subset A' \cap B'$

   (h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (j) $A - B = A \cap B^c$

   (k) $(A^c)^c = A$

(l) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$

(m) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(n) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

4. De um exemplo de uma função que é:

   (a) injetora, mas não sobrejetora;

   (b) sobrejetora, mas não injetora;

   (c) nem injetora e nem sobrejetora;

   (d) bijetora

5. Seja $f : A \to B$ uma função. Mostre que para $X, Y \subset A$ valem as afirmações abaixo.

   (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

   (b) se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$;

   (c) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;

   (d) Encontre um exemplo em que não vale a igualdade $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;

   (e) Mostre que se f for injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer subcojuntos X, Y de A.

6. Seja $f : A \to B$ uma função. Mostre que para $Y, Z \subset A$ valem as afirmações abaixo.

   (a) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$;

   (b) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$;

   (c) $f^{-1}(Y^c) = [f^{-1}(Y)]^c$;

   (d) se $Y \subset Z$ então $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$.

7. Dados os conjuntos A, B, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c$.

8. Mostre que a composição de funções é uma operação associativa.