Universidade Federal de Goiás

Álgebra Linear - Lista 2

16 de outubro de 2013

1. Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

   (a) Mostre que se $A^2 = Id_n$, então $det(A) = \pm 1$.

   (b) Mostre que se $A^2 = A^{-1}$, então $det(A) = 1$.

2. (Muito importante) Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. A matriz adjunta de A, que indicaremos por $ad(A)$ é a transposta da matriz $B = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ e A_{ij} é a matriz menor de A com relação a linha i e coluna j. Esta matriz é importante, pois pode-se mostrar que

$$A.ad(A) = det(A)Id_n. \tag{1}$$

   (a) Mostre que a equação (1) é verdadeira para $n = 2$ e 3.

   (b) Mostre que a matriz A é invertível se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

   (c) Supondo que A é invertível, use a matriz adjunta para determinar a matriz inversa de A.

   (d) Supondo que A é invertível, mostre que $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

3. Seja X um conjunto não vazio. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ é uma função}\}$$

   é um espaçõ vetorial sobre $\mathbb{K}$.

4. (a) Mostre que $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial.

   (b) Decida se $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

   (c) Decida se $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

(d) Decida se $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-espaço vetorial.

5. Sejam X e Y $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Mostre o conjunto $X \oplus Y = \{x + y : x \in X \text{e } y \in Y\}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

6. Seja $X = \{A \in M_2(\mathbb{K}) : tr(A) = 0\}$. Mostre que X é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

   Lembramos que dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, o traço de A (que será indicado por $tr(A)$) é o escalar dado pela soma dos elementos da diagonal principal de A.

7. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Mostre que:

   (a) $0.x = \overrightarrow{0}$, para todo vetor $x \in X$.

   (Dica: Use que $x = 1x = (1 + 0)x = 1x + 0x$, daí calcule $-x + x$.)

   (b) $(-1)x = -x$, para todo $x \in X$.

   (Dica: Use o item (a).)

8. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W \subset V$. Se W for um espaço vetorial com as operações de V, então dizemos que W é um **subespaço vetorial (ou simplesmente subespaço) de** V.

   (a) Mostre que o conjunto $X = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Mostre que o conjunto $P_n(\mathbb{K}) := \{p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : gr(p(x)) \leq n\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ (conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ na variável x).

   Lembramos que $gr(p(x))$ indica o grau do polinômio $p(x)$.

9. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W \subset V$. Mostre que W é um subespaço de V se, e somente se, as condições abaixo são satisfeitas:

   (a) $u + v \in W$, para todo par $u, v \in W$;

   (b) $\alpha u \in W$, para toto $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $u \in W$.

10. Resolva os exercícios abaixo, usando o exercício anterior.

(a) Mostre que a interseção de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

(b) Seja $T_3(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes triangulares superiores. Mostre que $T_3(\mathbb{K})$ é um subespaço vetorial.

(c) Sejam $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (2, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$. Decida se o conjunto $[e_1, e_2]$, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores e_1 e e_2 é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é l.i. ou l.d.?

(d) Moste que os únicos subespaços de $\mathbb{R}^2$ são $\emptyset, \mathbb{R}^2$ e as retas que passam pela origem, ou seja, retas que possuem o ponto $(0, 0)$.

(e) Decida se o conjunto $W = \{(x, x^2)|x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$?

11. (a) O conjutno $\{(1, 1), (2, 3)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$?

(b) O conjunto $\{(1, 0, 0)(0, 1, 0)(0, 2, 0)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$?