

Derivada De Funções Logarítmicas E Aproximações Lineares

Jairo Menezes e Souza

UFG/CAC

13/06/2013

Derivação De Funções Logarítmicas

Vamos usar derivação implícita para acharmos a derivada das funções logarítmicas.

Derivação De Funções Logarítmicas

Vamos usar derivação implícita para acharmos a derivada das funções logarítmicas.

Temos que $y = \log_a x$ é a função inversa de a^x , para $a > 0$.

Derivação De Funções Logarítmicas

Vamos usar derivação implícita para acharmos a derivada das funções logarítmicas.

Temos que $y = \log_a x$ é a função inversa de a^x , para $a > 0$.

$$a^{\log_a x} = x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(a^{\log_a x} \right) = \frac{d}{dx} (x)$$

Derivação De Funções Logarítmicas

Vamos usar derivação implícita para acharmos a derivada das funções logarítmicas.

Temos que $y = \log_a x$ é a função inversa de a^x , para $a > 0$.

$$a^{\log_a x} = x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(a^{\log_a x} \right) = \frac{d}{dx} (x)$$

$$\Rightarrow a^{\log_a x} \ln a \cdot \frac{d}{dx} (\log_a x) = 1$$

Derivação De Funções Logarítmicas

Vamos usar derivação implícita para acharmos a derivada das funções logarítmicas.

Temos que $y = \log_a x$ é a função inversa de a^x , para $a > 0$.

$$a^{\log_a x} = x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(a^{\log_a x} \right) = \frac{d}{dx} (x)$$

$$\Rightarrow a^{\log_a x} \ln a \cdot \frac{d}{dx} (\log_a x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a}$$

Derivação De Funções Logarítmicas

Se $y = \log_a x$, Então

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{a^y \ln a}$$

Derivação De Funções Logarítmicas

Se $y = \log_a x$, Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{a^y \ln a} \\ &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

Derivação De Funções Logarítmicas

Se $y = \log_a x$, Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{a^y \ln a} \\ &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivada Do Logarítmo Natural

Se $a = e$ então $y = \log_e x = \ln x$, Daí

Derivada Do Logarítmico Natural

Se $a = e$ então $y = \log_e x = \ln x$, Daí

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Vamos usar a regra da cadeia.

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Vamos usar a regra da cadeia.

$$u = x^3 + 1 \text{ e } Y = \ln u$$

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Vamos usar a regra da cadeia.

$$u = x^3 + 1 \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Vamos usar a regra da cadeia.

$$u = x^3 + 1 \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Vamos usar a regra da cadeia.

$$u = x^3 + 1 \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u} \cdot (3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}\end{aligned}$$

Exemplo

Fazendo de novo a derivada de $y = \ln(x^3 + 1)$.

Exemplo

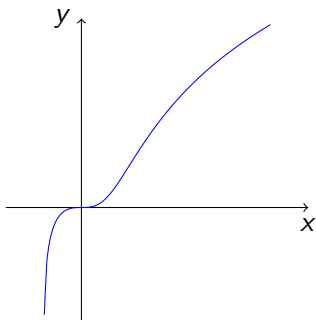
Fazendo de novo a derivada de $y = \ln(x^3 + 1)$.

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^3 + 1)) = \underbrace{\frac{1}{x^3 + 1}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função de fora} \\ \text{aplicada na} \\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{\substack{\text{derivada da função} \\ \text{de dentro}}}$$

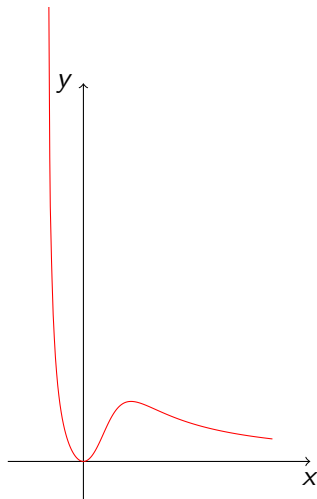
Exemplo

Fazendo de novo a derivada de $y = \ln(x^3 + 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln(x^3 + 1)) &= \underbrace{\frac{1}{x^3 + 1}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função de fora} \\ \text{aplicada na} \\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{\substack{\text{derivada da função} \\ \text{de dentro}}} \\ &= \frac{3x^2}{x^3 + 1} \end{aligned}$$



$$y = \ln(x^3 + 1)$$



$$y = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

Exemplo

Ache a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

Exemplo

Ache a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função de fora} \\ \text{aplicada na} \\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{derivada da função} \\ \text{de dentro}}}$$

Exemplo

Ache a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{da função de fora} \\ \text{aplicada na} \\ \text{função de dentro}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{derivada da função} \\ \text{de dentro}}}$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \cdot (-\sin x)$$

Exemplo

Novamente a derivada de $y = \ln(\cos x)$.

$$u = \cos x \text{ e } Y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Vamos usar a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \left(\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right).$$

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Vamos usar a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \left(\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{d}{dx}(x+1) \cdot \sqrt{x-2} - (x+1) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2} \right) \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Vamos usar a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \left(\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right) \\&= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{d}{dx}(x+1) \cdot \sqrt{x-2} - (x+1) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2} \right) \\&= \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x-2} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} \right)\end{aligned}$$

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Vamos usar a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \left(\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right) \\&= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{d}{dx}(x+1) \cdot \sqrt{x-2} - (x+1) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2} \right) \\&= \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x-2} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} \right)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{2(x-2)-(x+1)}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{2(x-2)-(x+1)}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x-4-x-1}{2(x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{\frac{2(x-2)-(x+1)}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x-4-x-1}{2(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

Exemplo

Outra solução $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$\frac{d}{dx} \left[\ln(x+1) - \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Exemplo

Outra solução $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$\frac{d}{dx} \left[\ln(x+1) - \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln x - 2$$

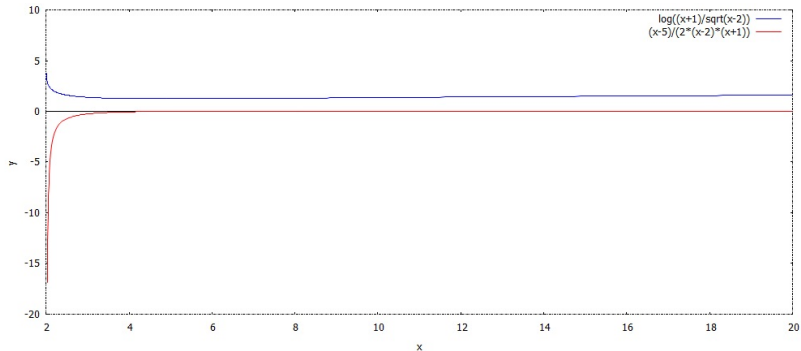
Exemplo

Outra solução $\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$\frac{d}{dx} \left[\ln(x+1) - \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x-2)$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} \right)$$



$$y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}, \quad y' = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

Exemplo

Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln |x|$.

Exemplo

Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln |x|$.

Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo

Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln |x|$.

Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue que pela regra da cadeia

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo

Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln |x|$.

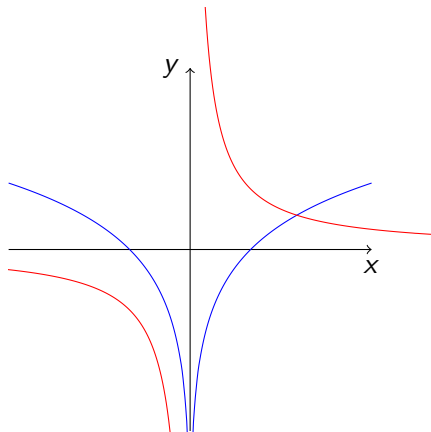
Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue que pela regra da cadeia

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim para todo $x \neq 0$ temos que $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$



$$y = \ln|x|, \quad y = \frac{1}{x}$$

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.
Usando a definição de limite temos que:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.
Usando a definição de limite temos que:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.
Usando a definição de limite temos que:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \end{aligned}$$

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.
Usando a definição de limite temos que:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} \end{aligned}$$

O Número e Como Um Limite

Já vimos que para $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$. Assim $f'(1) = 1$.
Usando a definição de limite temos que:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} \end{aligned}$$

Como $f'(1) = 1$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Usando as propriedades de limite e a continuidade da função exponencial.

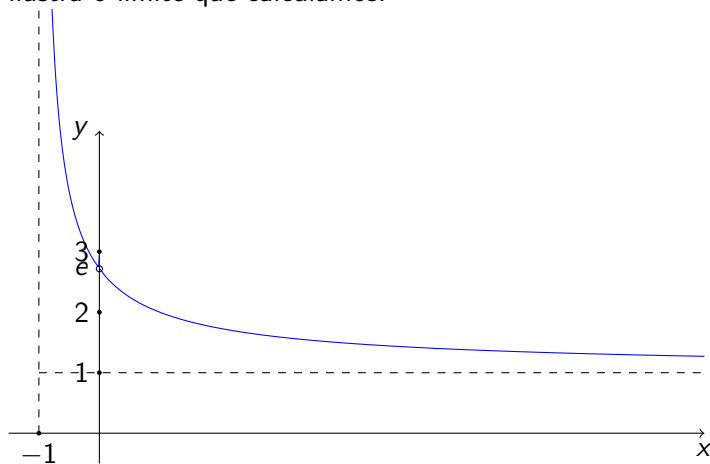
Usando as propriedades de limite e a continuidade da função exponencial.

$$\begin{aligned} e &= e^1 = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \end{aligned}$$

Usando as propriedades de limite e a continuidade da função exponencial.

$$\begin{aligned} e &= e^1 = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \\ e &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \end{aligned} \tag{1}$$

A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Isto ilustra o limite que calculamos.



$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Se na fórmula 19 colocamos $y = \frac{1}{x}$ então $y \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$.

Se na fórmula 19 colocamos $y = \frac{1}{x}$ então $y \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$.
E daí chegamos que

$$e = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \quad (2)$$

Aproximação Linear

Quando provamos a regra da cadeia observamos que se uma função $y = f(x)$ é diferenciável no número a então existe $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$ contínua tal que

Aproximação Linear

Quando provamos a regra da cadeia observamos que se uma função $y = f(x)$ é diferenciável no número a então existe $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$ contínua tal que

$$\Delta y = f' \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Aproximação Linear

Quando provamos a regra da cadeia observamos que se uma função $y = f(x)$ é diferenciável no número a então existe $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$ contínua tal que

$$\Delta y = f' \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Lembrando que $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ e chamando $x = a + \Delta x$ temos que $\Delta x = x - a$ e então

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \epsilon(x - a) \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$$

Aproximação Linear

Quando provamos a regra da cadeia observamos que se uma função $y = f(x)$ é diferenciável no número a então existe $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$ contínua tal que

$$\Delta y = f' \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Lembrando que $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ e chamando $x = a + \Delta x$ temos que $\Delta x = x - a$ e então

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \epsilon(x - a) \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$$

Daí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \epsilon(x - a) \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a \quad (3)$$

Aproximação Linear

Quando provamos a regra da cadeia observamos que se uma função $y = f(x)$ é diferenciável no número a então existe $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$ contínua tal que

$$\Delta y = f' \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Lembrando que $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ e chamando $x = a + \Delta x$ temos que $\Delta x = x - a$ e então

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \epsilon(x - a) \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$$

Daí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \epsilon(x - a) \quad \text{e} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a \quad (3)$$

Assim quando x está próximo de a , $f(x)$ está próximo da reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $(a, f(a))$ é a reta que mais se aproxima da função nas proximidades do número a .

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $(a, f(a))$ é a reta que mais se aproxima da função nas proximidades do número a .

Quer dizer que podemos aproximar a função, para valores próximos de a , pela reta tangente.

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $(a, f(a))$ é a reta que mais se aproxima da função nas proximidades do número a .

Quer dizer que podemos aproximar a função, para valores próximos de a , pela reta tangente.

As vezes é difícil calcular o valor de certa função em um número x , mas sabendo o valor da função e da sua derivada em número a próximo de x podemos aproximar via reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

A equação da reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4)$$

A equação da reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4)$$

Quando x fica próximo de a a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ se aproxima de $y = f(a)$.

A equação da reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4)$$

Quando x fica próximo de a a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ se aproxima de $y = f(a)$.

Daí temos,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (5)$$

A equação da reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4)$$

Quando x fica próximo de a a reta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ se aproxima de $y = f(a)$.

Daí temos,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (5)$$

A aproximação acima é chamada **Aproximação Linear** de f em a .

A função afim dada pela reta tangente,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (6)$$

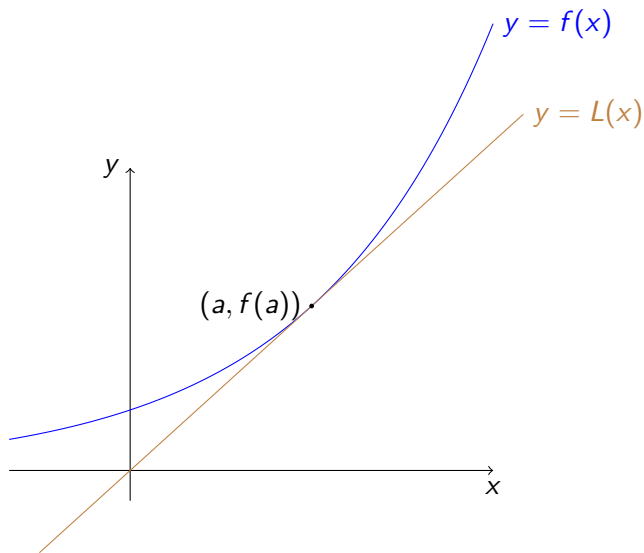
é chamada de **linearização** de f em a .

Na equação 24 colocamos $E(x) = \epsilon(x - a)$, daí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E(x)$$

Onde $E(x)$ é o erro que se comete quando aproximamos $f(x)$ pela sua linearização em a . Temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x - a} = 0$$



Exemplo

Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x+3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$.
Estas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

Resolução

Se $f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$ então

Resolução

Se $f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Resolução

Se $f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Temos que $f(1) = 2$ e que $f'(1) = \frac{1}{4}$. Colocando na equação 24 temos

Resolução

Se $f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{2}}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

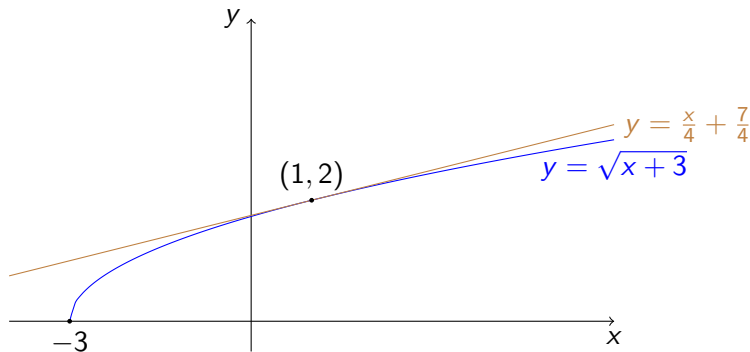
Temos que $f(1) = 2$ e que $f'(1) = \frac{1}{4}$. Colocando na equação 24 temos

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \frac{1}{4}(x - 1) = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

Assim,

$$\sqrt{3,98} = f(0,98) \approx L(0,98) = \frac{0,98}{4} + \frac{7}{4} = 1,995$$

$$\sqrt{4,05} = f(1,05) \approx L(1,05) = \frac{1,05}{4} + \frac{7}{4} = 2,0125$$



Vamos fazer uma tabela para as estimativas da aproximação linear e o valor real

	x	$L(x)$	valor real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176581315...
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1.994993734326...
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000000000...
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2.012461179749811...
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2.024845673131658...
$\sqrt{5}$	2	2,25	2.23606797749979...
$\sqrt{6}$	3	2,5	2.449489742783178...