



Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão
Instituto de Física e Química
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



TERMODINÂMICA ATRAVÉS DO CUBO DE RUBIK

Geovani R. da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:
Petrus Henrique dos Anjos

Catalão - GO
Fevereiro - 2016

TERMODINÂMICA ATRAVÉS DO CUBO DE RUBIK

Geovani R. da Silva

Orientador:
Petrus Henrique dos Anjos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física

Aprovada por:

Dr. Petrus Henrique dos Anjos (Presidente)

Dr. Nome do Membro da Banca

Dr. Nome do Membro da Banca

Catalão - Goiás
Fevereiro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

S586p Silva, Geovani R.da
Termodinâmica através do cubo de Rubik/ Geovani R. da
Silva - Catalão : UFG / IF, 2015.
viii, 77 f.: il.;30cm.
Orientador: Petrus Henrique dos Anjos
Dissertação (mestrado) – UFG / Instituto de Física / Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2015.
Referências Bibliográficas: f. 74-77.
1. Ensino de Física. 2. Som. 3. Velocidade do som. I. Aguiar,
Carlos Eduardo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto
de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III.
Propagação do Som: Conceitos e Experimentos.

Dedico esta dissertação a meus filhos Sarah e Fernando e a minha esposa
Eliete.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter-me dado essa oportunidade e a perseverança nos momentos mais difíceis ao longo do curso.

Aos meus filhos Sarah Maria Braga Silva e Fernando Braga Silva pela compreensão nos momentos que tive que ausentar do nosso lar para cursar as disciplinas.

A minha esposa, Eliete Braga, que me incentivou e apoiou durante todo o mestrado, com paciência e compreensão necessárias para realização desse projeto.

Agradeço imensamente ao Prof. Petrus Henrique dos Anjos, pelo incentivo e ideia do produto a ser desenvolvido no trabalho, pela motivação e serenidade ao longo do curso, principalmente nos momentos difíceis na realização desse projeto.

Um agradecimento especial aos meus colegas de turma, pelo apoio, motivação e críticas construtivas no decorrer do nosso curso. Muito obrigado a todos que puderam enriquecer de maneira direta ou indireta no aperfeiçoamento desse produto.

Agradeço também, a todos os professores que de alguma forma contribuíram muito para a construção de conhecimentos ao longo do curso. Meu sincero agradecimento aos discentes da E.E. Messias Pedreiro que participaram no desenvolvimento deste produto, pois sem eles nada disso teria sentido. Muito obrigado à turma do 3ºF ano 2015, pelas sugestões dadas na aplicação deste produto.

Agradeço também a Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa no período do mestrado e a SBF (Sociedade Brasileira de Física) pelo suporte e gestão do MNPEF (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física), pois sem ela nada disso seria possível.

RESUMO

TERMODINÂMICA ATRAVÉS DO CUBO DE RUBIK

Geovani R. da Silva

Orientador:
Petrus Henrique dos Anjos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O famoso cubo de Rubik oferece oportunidades interessantes para ensinar conceitos aplicados na Física, Química e Matemática, para desenvolver habilidades para resolução de problemas. Nesse aspecto desenvolvemos este trabalho no intuito de trabalhar com alguns conceitos que são esquecidos nos livros de Física na educação básica, utilizando o cubo de Rubik. Através de um guia para professores, aplicamos nosso produto em sala de aula de segundo e terceiro ano colegial da Escola Estadual Messias Pedreiro em Uberlândia – MG, mostrando entre outros aspectos o caráter estatístico da entropia, a segunda lei da Termodinâmica, demônio de Maxwell e a distribuição de Max-Boltzmann. Para fundamentar este trabalho baseamos na estratégia de jogos e suas possibilidades metodológicas. Após aplicar o produto foram relatadas pelos estudantes suas impressões sobre a técnica aplicada.

Palavras-chave: Termodinâmica, Mecânica Estatística, Cubo de Rubik, Ensino de Física.

Catalão
Fevereiro, 2016

ABSTRACT

Thermodynamics teaching through the Rubik's Cube

Geovani R. da Silva

Supervisor(s):
Petrus Henrique dos Anjos

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The famous Rubik's cube offers interesting opportunities to teach concepts applied in physics, chemistry and mathematics, to develop skills for problem solving. We developed this work using the Rubik's cube in order to work with some concepts that are forgotten in the books of physics at basic education. Through a guide for teachers, we apply our product in 2nd and 3rd year high school classes in the Estate school Messias Pedreiro in Uberlândia – MG, showing among other things the statistical nature of entropy, the second law of thermodynamics, Maxwell's demon and the Max-Boltzmann distribution. To support this work we based on overview about the applied technique.

Keywords: Thermodynamics, Statistical Mechanics, Rubik's cube, Teaching Physics

Catalão
February, 2016

Sumário

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	Fundamentação teórica	6
2.1	Relações entre Termodinâmica e Mecânica Estatística.....	6
2.2	Entropia e 2ª Lei da Termodinâmica	7
2.3	Distribuição de Maxwell	11
2.4	Demônio de Maxwell	13
2.5	Como é a abordagem “tradicional” de Termodinâmica no ensino médio?	14
2.6	Quais as propostas atuais para o ensino de termodinâmica?	17
Capítulo 3	Descrição Geral do cubo.....	20
3.1	Mecânica do Cubo	20
3.2	Aprendendo a resolver o cubo de Rubik	23
3.3	Ensinando a resolver o cubo em sala de aula	27
3.4	Entropia, 2ª Lei da Termodinâmica no cubo	28
3.5	Distribuição de Maxwell no cubo.....	33
3.6	Demônio de Maxwell no cubo.....	35
Capítulo 4	Concepção do Guia Didático – Proposta Pedagógica e Aprendizagem.	36
4.1.	A construção do Guia Didático e a descrição das atividades propostas.....	37
4.2.	Tópico Saiba mais	37
4.3.	Abordagem reflexiva dos exercícios e exemplos.	38
4.4.	Análise do planejamento da atividade de sala.	39
4.5	Auto Avaliação sobre a aula Termodinâmica em um Cubo de Rubik.	39
Capítulo 5	Considerações finais	42
Apêndice A	44
	Multiplicadores de Lagrange	44

Capítulo 1

Introdução

A falta de textos para o ensino médio que tratam da segunda lei da termodinâmica e de entropia em seus aspectos estatísticos, faz nós professores discutir as dificuldades encontradas no ensino desses conteúdos. A esse respeito (ref.[1]), argumenta o quanto é difícil entender o conceito de entropia e seu caráter estatístico por falta de um apoio didático que possa ser considerado satisfatório para ensinar o conceito de entropia e da segunda lei no ensino médio. A entropia (ref.[2]) é o conceito mais dantesco para estudantes, devido a sua complexidade, e por professores porque os estudantes falham em entender seus princípios básicos. Muitos confundem entropia com desordem. Pensa que ela representa uma medida de desorganização espacial, o que realmente não é. A falta de conexão (ref.[3]) entre o macro e o micro que está presente em sala de aula é um dos motivos apontados por alguns pensadores na dificuldade encontrada no ensino da segunda lei e do conceito de entropia no ensino médio. A interpretação errada da segunda lei (ref.[4]) tem sido utilizada para explicar fenômenos sociais, apesar de seu foco ser sistemas microscópicos.

A Física clássica apresenta diversos conceitos difíceis, mas sem dúvida o mais difícil é o conceito de entropia. Von Neumann afirma que “ninguém realmente sabe o que é entropia” (ref.[5]). Essa dificuldade de compreensão da segunda lei da termodinâmica e da entropia fez alguns pesquisadores (ref.[1]) a analisar os livros didáticos de física do ensino médio sugeridos pelos PCNS e verificar de que forma esses conteúdos eram explicados em seus textos. Se essas abordagens contribuíam para a compreensão ou dificultavam na assimilação desses conceitos importantes na termodinâmica. Nesse artigo podemos observar a predominância da abordagem macroscópica para as leis da termodinâmica. Notamos também que a segunda lei é explicada em termos da impossibilidade de uma máquina térmica transformar completamente em trabalho o calor que recebe de uma fonte quente ou na irreversibilidade das trocas de calor.

No aspecto do conceito de entropia os livros didáticos de física, segundo a (ref.[1]) há dois enfoques principais: o primeiro faz uma menção que existe

uma grandeza que mede a irreversibilidade de processos, denominada entropia e que se o processo é irreversível, essa entropia aumenta. O segundo enfoque há uma tentativa de fazer uma abordagem microscópica com elementos estatísticos, associados ao conceito de desordem de sistemas. Quanto maior a desordem do sistema, maior a entropia. Observamos nesses livros que a entropia é associada simplesmente a uma desorganização espacial das coisas e não há referência a estados energéticos.

A termodinâmica é parte da Física importante na compreensão dos fenômenos do dia a dia. Portanto, se faz necessário propor uma metodologia diferente de ensinar alguns conceitos de termodinâmica. Antes de passar para essa proposta, vamos analisar outro aspecto importante da ciência que também aparece nos textos de ensino médio, mas somente nos livros do terceiro ano, que é a Física moderna.

Ao passear pelas ruas de qualquer cidade, por menor que seja, deparamos com alguns sistemas de portas que abrem e fecham automaticamente. Como explicar o funcionamento dessas portas para alunos do primeiro ano, com essa visão tradicionalista. A Física moderna está presente no dia a dia na forma de transistores utilizados em computadores, tablets, GPS, satélites, naves espaciais ou nos lasers utilizados em espectroscópio, scanners de código de barras, microscopia, CD e Blu-Ray players. Não há como ficar sem tecnologia e por isso é necessário rever os conteúdos de física do ensino médio. Introduzir tópicos de física contemporânea (ref.[6]) aproxima os estudantes dos empreendimentos humanos e permite a eles reconhecer as ideias revolucionárias que modificaram a Ciência do século XX. Não é possível com o desenvolvimento tecnológico que a humanidade atingiu ficar ensinando física do século XIX. É necessário repensar nossos currículos, atualizando com ênfase no ensino de novas tecnologias. Portanto, a imersão de tópicos de Física moderna e contemporânea qualificaria nossos currículos e motivaria nossos alunos a participar com entusiasmo na sua formação acadêmica.

A inserção de Física moderna e contemporânea não implica o abandono da Física Clássica, pois ela é em geral o suporte da Física Moderna. Buscar o equilíbrio de um currículo que satisfaça a integração entre esses ramos do

conhecimento é o ponto de partida para aproximar a ciência do cotidiano do estudante, promovendo uma aprendizagem significativa e satisfatória.

A forma pela qual se tem ensinando física nos livros didáticos e na sala de aula pelo professor corrobora para a dificuldade encontrada na aprendizagem do aluno. Assim como na vida, a habilidade na solução de problemas desempenha um papel importante no ensino/aprendizagem da física.

Uma grande habilidade na resolução de problemas (ref.[7]), usualmente denota um alto desenvolvimento de competências reguladoras (planejamento, monitoramento, avaliação) e transformadoras (questionamento, formulação de hipóteses, investigação e interpretação) importantes para o aprendizado. Lamentavelmente, a maioria das vezes o ensino tradicional leva os estudantes a solucionar problemas de física de forma puramente mecânica (ref.[8]). Não há espaço para se pensar sobre o conteúdo e não se desenvolve nenhuma das habilidades acima.

Alguns pesquisadores afirmam (ref.[9]) que resolver problemas, especialmente de física, requer a aplicação de uma teoria/conhecimento previamente dominada. Exige capacidade de compreensão do problema, capacidade de planejamento, de execução e de análise (ref.[10]). Habilidades essas que não são encontradas em livros textos de física, e que deveria desenvolver no estudante, pois o aproxima da vida real. Na tentativa de alterar esse paradigma, diversas estratégias têm sido empregadas, entre elas, o uso de atividades manipulativas, jogos e desafios (ref.[11]).

Neste trabalho, propomos continuar a explorar este tipo de estratégia utilizando o quebra cabeça conhecido como cubo mágico. Também chamado de cubo de Rubik, em homenagem a seu inventor o húngaro Erno Rubik. Rubik fabricou o primeiro protótipo do cubo em 1974, para ajudar a ilustrar o conceito da terceira dimensão para estudantes de arquitetura. O cubo começou a ser comercializado em 1980, e em janeiro de 2000, mais de 350 milhões de cubo já haviam sido comercializados em todo o mundo. De acordo com a Illumin [6] o cubo mágico capta o interesse de milhões de pessoas, independentemente da idade, sexo ou educação. Ele é considerado um quebra cabeça bastante difícil, e desafia o raciocínio espacial, a memória e a capacidade de planejamento.

A dificuldade e insucesso com as seguidas falhas nas tentativas iniciais de resolver o cubo são bastante semelhantes às enfrentadas pelos estudantes ao se depararem com problemas mais complexos de Física (ref.[12]). Mas, como no caso do cubo de Rubik, a dificuldade da tarefa faz todo o insucesso valer a pena: sente-se orgulho da realização e satisfação por aprender algo novo. Sente-se que se podemos aprender uma tarefa difícil como o cubo, também podemos aprender outras disciplinas complexas.

Do ponto de vista de física, o apelo do cubo de Rubik é a possibilidade de utilizá-lo para introduzir e ilustrar conceitos modernos de física, oferecendo um modelo educacional para explorar um mundo desconhecido de maneira científica (ref.[13]). As regras de movimento do cubo (impostas por suas simetrias) fixam leis de conservação que reduzem o número de estados permitidos, mas que fazem com que seja difícil chegar a um estado desejado. A impossibilidade de se atingir qualquer padrão imaginado abre campo para a discussão da ergodicidade do problema. O grande número de estados sugere uma abordagem estatística para expressar a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo. Tais características tornam o cubo de Rubik uma ferramenta educacional promissora para professores de física, química e matemática, em diversos níveis de ensino.

No cubo de Rubik há algo especial que parece cativar a imaginação do aluno mais apático (ref.[14]). Cada aluno tem uma quantidade enorme de potencial inexplorado, esperando para ser desbloqueado. O cubo de Rubik tem sido uma valiosa chave em desbloquear ele.

O cubo de Rubik oferece uma oportunidade impar na construção de conceitos da segunda lei da termodinâmica e da entropia, incluindo seu aspecto estatístico, não abordado em nenhum livro didático do ensino médio (ref.[12]). O objetivo desse trabalho é analisar e explorar conceitos de Termodinâmica e Mecânica Estatística através do cubo.

A termodinâmica é uma ciência macroscópica e fenomenológica, enquanto a mecânica estatística é probabilística. A termodinâmica sistematiza as leis empíricas sobre o comportamento térmico da matéria macroscópica. Ao contrário da mecânica estatística, ela exime de qualquer hipótese sobre a constituição microscópica dos corpos materiais (ref.[15]). A mecânica estatística exprime uma justificativa para as leis da termodinâmica e permite

obter equações fundamentais termodinâmicas de sistemas físicos a partir de sua composição microscópica.

Essa tese tem por finalidade apresentar o desenvolvimento do produto educacional na forma de um guia para professores de maneira a auxiliar a utilização do cubo de Rubik nos conceitos aplicados à termodinâmica, mostrando o caráter estatístico da entropia, a segunda lei da termodinâmica e a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

O restante desta dissertação está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 será feita uma breve revisão dos principais fundamentos de Termodinâmica e Mecânica Estatística discutidos em nosso guia. Na seção 2.1, apresentaremos brevemente a relação entre termodinâmica e a mecânica estatística. Na seção 2.2, discutiremos o conceito de entropia e a segunda lei. Na seção 2.3, analisaremos a distribuição de Maxwell-Boltzmann. Na seção 2.4, será discutido a questão do demônio de Maxwell.

No capítulo 3 apresentaremos também, uma descrição geral do cubo de Rubik e uma análise de seus aspectos estatístico/termodinâmico. Na seção 3.1 será apresentada a mecânica do cubo. Na seção 3.2, analisaremos a entropia, segunda lei no cubo. Na seção 3.3, discutiremos a distribuição de Maxwell no cubo, na seção 3.4 será discutida a questão do demônio de Maxwell no cubo.

O capítulo 4 será dedicado à concepção do guia, das atividades sugeridas e de sua efetiva aplicação em sala de aula. Na seção 4.1, faremos a análise do por que usar o cubo. Na seção 4.2, discutiremos as atividades propostas em sala de aula. Na seção 4.3, será analisado o tópico saiba mais. Na seção 4.4, faremos uma abordagem reflexiva dos exercícios e dos exemplos físicos. Na seção 4.5, será analisado o planejamento da aplicação da atividade em sala de aula.

Finalmente, no capítulo 5 delinearemos nossas conclusões e analisaremos os resultados e as perspectivas da utilização do cubo de Rubik no ensino de Física.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

2.1 Relações entre Termodinâmica e Mecânica Estatística

A Termodinâmica descreve macroscopicamente a interação do sistema mais a vizinhança, enquanto a mecânica estatística faz a ligação entre as propriedades microscópicas e as macroscópicas da matéria.

Boltzmann estabeleceu uma conexão entre as propriedades macroscópicas (entropia) e microscópicas (número de microestados acessíveis) dos sistemas ($S = k \ln \Omega$) (ref.[16]).

A conexão entre a mecânica estatística e a termodinâmica é estabelecida através de uma definição microscópica para entropia, que é o potencial termodinâmico relevante em sistema com energia fixa. O postulado fundamental da mecânica estatística estabelece que todos os estados microscópicos acessíveis a um sistema fechado em equilíbrio, são igualmente prováveis.

A termodinâmica tem por objetivo prescrever as leis empíricas relacionadas ao comportamento térmico da matéria macroscópica. A mecânica estatística é caracterizada de hipótese sobre a constituição microscópica, enquanto a termodinâmica não necessita dessas informações micro dos corpos materiais. A termodinâmica de equilíbrio proporciona uma descrição completa das propriedades térmicas de um sistema cujos parâmetros macroscópicos não estejam variando com o tempo.

Podemos então finalizar do exposto acima que a mecânica estatística é uma teoria probabilística que faz a conexão entre o nível macroscópico (Termodinâmica) e o microscópico (mecânica). O objetivo da mecânica estatística é calcular propriedades macroscópicas a partir de informações microscópicas. É próprio de a mecânica estatística admitir que certa grandeza seja tomada como flutuantes, e denomina-las variáveis aleatórias, enquanto outras não flutuantes funcionam como parâmetros. Uma variável aleatória é caracterizada por sua distribuição de probabilidade.

2.2 Entropia e 2ª Lei da Termodinâmica

A termodinâmica pode ser abordada sobre dois aspectos: a partir de leis empíricas (heurística) ou através de postulados (axiomática). Neste texto iremos utilizar a abordagem axiomática e transcreveremos a versão mais didática dos postulados enunciada por Callen (ref. [17]).

Sistemas simples são sistemas macroscopicamente homogêneos, isotrópicos, eletricamente descarregados, quimicamente inertes e suficientemente grandes para que se possam desprezar efeitos de superfície e não sujeitos a campos eletromagnéticos ou gravitacionais. Por fluido puro, entendemos um sistema simples com um único componente e na ausência de campos externos.

Postulado I: Existência de estados de equilíbrio de sistemas simples macroscópico de um fluido puro é completamente caracterizado pela energia interna U , pelo volume V e pela quantidade de matéria N .

Sistema composto é constituído por um conjunto de sistemas simples separados por paredes ou vínculos. As paredes são divisórias ideais que podem ser restritivas a certas variáveis: paredes adiabáticas são restritivas à troca de energia na forma de calor (caso contrário são diatérmicas), paredes fixas são restritivas às alterações de volume, paredes impermeáveis impedem a passagem de partículas de um ou de mais componentes do fluido.

Postulado II: Existência da entropia S , função de todos os parâmetros extensivos de um sistema composto $S = S(U_1, V_1, N_1, U_2, V_2, N_2, \dots)$, que é máxima no estado de equilíbrio.

Na remoção de um vínculo interno, os parâmetros extensivos assumem valores que maximizam a entropia. A entropia, como função dos parâmetros extensivos, constitui uma equação fundamental de um dado sistema, contendo todo conhecimento termodinâmico sobre o sistema.

Postulado III: A entropia de um sistema composto é aditiva sobre cada um dos seus componentes. A entropia é uma função contínua, diferenciável e monotonicamente crescente da energia.

Considere um sistema composto por dois fluidos puros:

$$S(U_1, V_1, N_1, U_2, V_2, N_2) = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2) \text{ e } (\partial S / \partial U) > 0$$

Podemos inverter a forma funcional de S e escrever $U = U(S, V, N)$, que também é uma equação fundamental encerrando toda a informação termodinâmica sobre o sistema considerado.

A aditividade da entropia significa que $S = S(U, V, N)$ é uma função homogênea de primeiro grau das suas variáveis:

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N),$$

para qualquer valor de λ (se $\lambda = 3$, triplicando a energia, o volume e o número de partículas, a entropia triplicará). Fazendo $\lambda = \frac{1}{N}$, temos:

$$\left(\frac{1}{N} S(U, V, N)\right) = S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right) = s(u, v),$$

onde definimos as densidades: $u = U/N$ e $v = V/N$ e $s = S/N$

Postulado IV: A entropia se anula na temperatura de zero absoluto. No estado em que $(\partial U / \partial S)_{V, N} = 0$. Conhecido como enunciado da lei de Nernst, ou terceira lei da termodinâmica.

A equação fundamental de um fluido puro, na representação da energia é dada pela relação $U = U(S, V, N)$. Na forma diferencial, temos:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S, V} dN ,$$

que descreve um processo termodinâmico ou quase estático (uma sucessão infinitesimal de estados termodinâmicos de equilíbrio). A expressão usual da lei de conservação de energia é:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W_{\text{mecânico}} + \Delta W_{\text{químico}} ,$$

Comparando com a equação diferencial, podemos as seguintes definições dos parâmetros intensivos ou campos da termodinâmica:

$$\text{Temperatura: } T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N}$$

$$\text{Pressão: } p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N}$$

$$\text{potencial químico: } \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V},$$

As funções $T = T(S,V,N)$, $p = p(S,V,N)$ e $\mu = \mu(S,V,N)$ representam as equações de estado na forma de energia.

Na representação da entropia, podemos escrever a equação fundamental de um fluido puro da seguinte forma:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,S} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} dN$$

Vamos considerar um sistema composto por dois fluidos puros, fechado e separados por uma parede adiabática, fixa e impermeável. Por um processo qualquer, a parede torna-se diatérmica, mas permanece fixa e impermeável. Depois de algum tempo o sistema atinge um novo estado de equilíbrio termodinâmico. Podemos caracterizar esse novo estado de equilíbrio pela maximização da entropia, que pode ser representada na forma:

$$S = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2),$$

onde V_1 , V_2 , N_1 e N_2 são parâmetros fixos, e $U_1 + U_2 = U_0$ é constante e representa a energia total do sistema que também está fixa. Então, podemos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_1}\right) = \frac{\partial S_1}{\partial U_1} + \frac{\partial S_2}{\partial U_1} = \frac{\partial S_1}{\partial U_1} - \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \rightarrow 0 = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \rightarrow T_1 = T_2$$

que corresponde à expectativa comum de equalização das temperaturas dos dois subsistemas termodinâmicos.

Veremos agora um exemplo de equilíbrio térmico e mecânico. Vamos continuar com a mesma situação anterior, mas com uma parede que pode tornar-se diatérmica e móvel a partir de certo instante. Podemos escrever a entropia da seguinte forma:

$S = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2)$, onde agora N_1 e N_2 são parâmetros fixos e a energia total continua constante ($U_1 + U_2 = U_0 = \text{constante}$). Seja também os volumes dos subsistemas $V_1 + V_2 = V_0 = \text{constante}$, onde V_0 é o volume total (fixo) do sistema composto. Na situação de equilíbrio, teremos:

$$\frac{\partial S}{\partial U_1} = \frac{\partial S_1}{\partial U_1} - \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \rightarrow \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \rightarrow T_1 = T_2$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial V_1} = \frac{\partial S_1}{\partial V_1} - \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \rightarrow \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} = 0 \rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

As expectativas usuais no equilíbrio,

$$T_1 = T_2 \text{ e } p_1 = p_2 ,$$

ou seja, as temperaturas e as pressões se equalizam.

A segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada de acordo com o mesmo autor (ref.[17]), por:

“Todo sistema tem uma função de estado extensiva, a entropia do sistema, que pode ser definida a menos de uma constante arbitrária. A variação infinitesimal da entropia do sistema (dS) satisfaz a desigualdade:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (1)$$

Onde δQ é a quantidade infinitesimal de calor trocada entre o sistema e o exterior e T é a temperatura absoluta do sistema”. (ref. [17]).

O sinal de igual só vale nas transformações infinitesimais reversíveis, enquanto o sinal de maior vale em qualquer transformação irreversível.

- Troca de calor reversível $\rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$ (2)

- Troca de calor irreversível $\rightarrow dS > \frac{\delta Q}{T}$ (3)

\rightarrow Num processo adiabático ($Q = 0$) reversível: $dS = 0 \rightarrow S_1 = S_2$ isentrópico

\rightarrow Processo adiabático ($Q = 0$) irreversível: $dS > 0 \rightarrow S_1 > S_2$ (S aumenta)

Em um sistema limitado por fronteiras adiabáticas o valor da entropia cresce (processo irreversível) até que no equilíbrio ela atinge o valor máximo que analiticamente pode ser expresso:

$$dS = 0 \text{ e } d^2S < 0, \text{ no equilíbrio.}$$

No caso de sistema isolado a entropia é constante ou é uma função crescente. Na eventualidade de se poder constituir um novo sistema pelo acréscimo das vizinhanças ao próprio sistema, a 2ª lei diz que a variação da entropia do universo (sistema + vizinhança) é nula ou é positiva.

$$dS_{\text{Total}} \geq 0 \rightarrow \Delta S_{\text{Total}} \geq 0$$

$$d(S_{\text{Sist}} + S_{\text{Viz}}) \geq 0 \rightarrow dS_{\text{Sist}} + dS_{\text{Viz}} \geq 0 \rightarrow \Delta S_{\text{Sist}} + \Delta S_{\text{Viz}} \geq 0$$

Em processos reversíveis a entropia permanece constante, ou seja, a variação da entropia é nula ($\Delta S = 0$). As condições de reversibilidade são:

- 1- Não há trabalho de forças de atrito, de forças viscosas ou de outras forças dissipativas que produzem calor.
- 2- A condução térmica só ocorre isotermicamente.
- 3- O processo deve ser quase estático, de modo que o sistema está sempre num estado de equilíbrio (ou infinitamente próximo de um estado de equilíbrio) (ref.[18]).

2.3 Distribuição de Maxwell

A distribuição de Maxwell é o nome que os físicos descrevem a distribuição de velocidades de partículas em gases ideais. Naqueles em que as partículas se movem livremente dentro de um recipiente estacionário sem interagir umas com as outras, exceto durante breves colisões em que trocam energia com outras ou com o seu ambiente térmico. Maxwell, interpretando o modelo cinético observou que a informação microscópica relevante não é o conhecimento das posições e velocidades de cada molécula e sim sua função distribuição. Baseado em simetria, ele encontrou a distribuição de velocidade. Para um gás de N partículas, considere $Nf(v_x)dv_x$ o número de partículas tendo velocidade na direção x entre v_x e $v_x + dv_x$. Ou seja, $f(v_x)dv_x$ é a fração de todas as partículas que possuem velocidade na direção x no intervalo entre v_x e $v_x + dv_x$. Mas, de acordo com a teoria cinética não há direção privilegiada. A probabilidade para a velocidade ficar entre v_x e $v_x + dv_x$, v_y e $v_y + dv_y$ e v_z e $v_z + dv_z$ será:

$$Nf(v_x)dv_x f(v_y)dv_y f(v_z)dv_z = Nf(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z$$

Maxwell argumentou que: $f(v_x)f(v_y)f(v_z) = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

Onde F é uma função desconhecida. No entanto o produto das funções a esquerda está refletido na soma das velocidades a direita. Isso ocorre se:

$$f(v_x) = Ae^{-Bv_x^2} \quad (4)$$

Onde, A e B são constantes arbitrárias. De acordo com Maxwell, devemos por um sinal menos no expoente porque deve existir menos partículas à medida

que vamos para velocidades mais altas -- certamente não um número divergente que resultaria se o sinal fosse o contrário. Multiplicando as distribuições de velocidades para as três direções, temos a distribuição em termos da velocidade da partícula v . No entanto, a função distribuição natural é aquela que dá o número de partículas possuindo velocidade entre v e $v + dv$.

É importante imaginar uma distribuição de partículas no *espaço de velocidades*, um espaço tridimensional (v_x, v_y, v_z) , onde cada partícula é representada por um ponto tendo coordenadas correspondendo à velocidade da partícula. Assim, todos os pontos que ficam em uma superfície esférica centrada na origem correspondem à mesma velocidade. Logo, o número de partículas possuindo velocidades entre v e $v + dv$ são iguais ao número de pontos dentro de duas esferas centradas na origem, com raios v e $v + dv$. Este é um espaço que substitui o pequeno volume $dv_x dv_y dv_z$. O volume de uma casca esférica é $4\pi v^2 dv$. Logo, a distribuição de probabilidade como função da velocidade é:

$$f(v)dv = 4\pi v^2 A^3 e^{-Bv^2} dv \quad (5)$$

As constantes A e B podem ser determinadas integrando-se a distribuição de probabilidades sobre todas as velocidades para encontrar o número total de partículas N , e sua energia total E . Como uma partícula movendo-se com velocidade v possui energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$, podemos usar a distribuição de probabilidade para encontrar a energia cinética média por partícula:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 f(v)dv}{\int_0^{\infty} f(v)dv} \quad (6)$$

O numerador é a energia total, o denominador é o número total de partículas. Note que uma constante desconhecida A cancela entre o denominador e o numerador. Substituindo o valor de $f(v)$ nas integrais, achamos.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3m}{4B} , \langle k \rangle = \frac{3}{2}kT \quad (7)$$

Substituindo o valor da energia cinética média em termos da temperatura do gás, vem:

$$\frac{3m}{4B} = \frac{3}{2}kT \rightarrow B = \frac{m}{2kT} \quad (8)$$

Com o valor de B

$$f(v) \propto v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (9)$$

(A constante de proporcionalidade é obtida integrando-se sobre todas as velocidades e igualando o resultado final à definição de $f(v)$). O resultado final é:

$$f(v) = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (10)$$

Note que esta função aumenta parabolicamente de zero para pequenas velocidades, chega a um máximo, e a partir daí diminui exponencialmente. À medida que a temperatura aumenta, a posição do máximo se desloca para a direita. A área total sob essa curva é sempre unitária (isto é, igual a um), por definição.

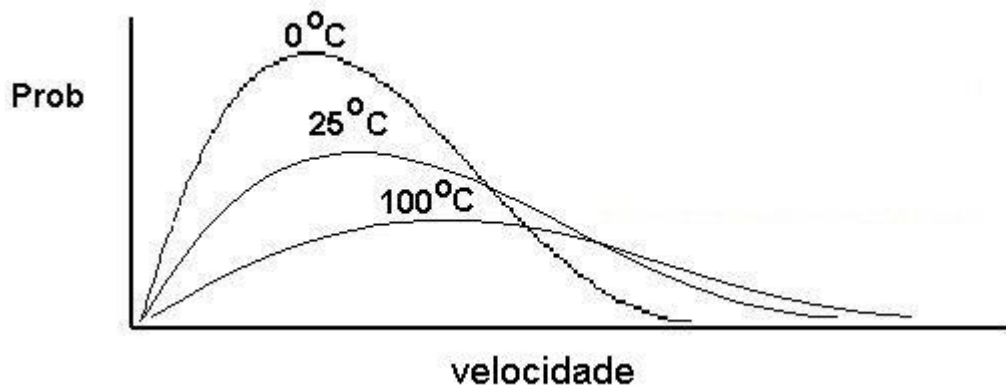


Figura 1: Distribuição de velocidade de Maxwell e duas dependências com a temperatura. Fonte: www.ufrj.br/~bertu/fis2

2.4 Demônio de Maxwell

O demônio de Maxwell é um experimento mental cuja finalidade proposta por Maxwell era mostrar que a segunda lei da termodinâmica seria verdadeira somente estatisticamente. Nas próprias palavras de Maxwell: “Se

concebermos um ser cujas faculdades são tão aguçadas que ele consegue acompanhar cada molécula em seu curso, esse ser, cujos atributos são ainda essencialmente tão finitos quantos os nossos, seria capaz de fazer o que atualmente nos é impossível fazer. Vimos que as moléculas em um recipiente cheio de ar a uma temperatura uniforme, movem-se com velocidade que não são de modo algum uniformes. Imaginemos agora que tal recipiente é separado em duas regiões A e B, por meio de uma divisória na qual há um pequeno orifício, e que um ser, que pode ver as moléculas individuais, abre e fecha este orifício, de forma a permitir que somente as moléculas mais rápidas passem de A para B, e somente as mais lentas passem de B para A. Ele irá, portanto sem nenhum trabalho elevar a temperatura de B e baixar a de A. Contradizendo a segunda lei da termodinâmica”. Podemos visualizar esse experimento na figura 2 abaixo.

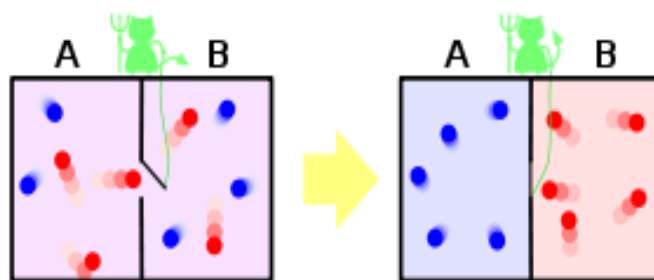


Figura 2: Demônio de Maxwell. Fonte: wikipedia.org

Leo Szilárd argumentou que na vida real o demônio de Maxwell, para medir a velocidade molecular gastaria energia na aquisição de informações. A energia dissipada pelo demônio irá causar um aumento na entropia do demônio que será maior do que a redução da entropia do gás. A termodinâmica da informação diz pra nós que é o ato de apagar a informação que dissipa energia no demônio e não a mera realização de medição. Apagar um bit de informação requer um aumento de entropia ($\Delta S \geq k \ln 2$), de acordo com o princípio de Landauer.

2.5 Como é a abordagem “tradicional” de Termodinâmica no ensino médio?

As novas diretrizes apresentadas no PCNEM para a Física traz uma maneira diferente para construir a formação de um cidadão capaz de

compreender a realidade tecnológica do seu cotidiano. Segundo o MEC a Física deve apresentar um conjunto de competências específicas que auxiliam os jovens a perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos presentes em seu cotidiano. Dentro desse aspecto, as habilidades para lidar com o mundo físico não têm sentido se for trabalhada de forma isolada. A construção dessas habilidades só tem significado quando são contextualizadas em articulação com habilidades de outras áreas repletas de outros conhecimentos. Nessa abordagem a velha estratégia contida na maioria dos livros textos, onde o ensino de Física se dá por resolução de inúmeros problemas de cálculo para que o aluno memorize uma quantidade de fórmulas perde sentido quando se deseja desenvolver outras competências. Não queremos com isso acabar com a formulação matemática, ao contrário ela continua sendo essencial, desde que desenvolvida através da síntese de conceitos e relações fenomenológicas. Nesse contexto para aproximar de situação real ou próxima dela é necessário substituir um problema por uma situação problema de forma a ganhar um novo sentido.

A proposta do PCNEM é permitir um trabalho mais agregado entre todas as áreas de Ciências da Natureza, e destas com Linguagens e Códigos e Ciências Humanas. Dessa forma, há habilidades relacionadas com a investigação e compreensão dos fenômenos físicos, enquanto há outras que dizem respeito à utilização da linguagem física e de sua comunicação, ou, finalmente, que tenham a ver com sua contextualização histórica e social. Nessa perspectiva o ensino de Física foi estruturado em seis temas que permitem a organização dos conteúdos abordados na disciplina. A Termodinâmica que faz parte desse trabalho está abordada no tema 2, denominado de Calor, ambiente e usos de energia. Na pag. 23 da unidade 2.2 encontramos: Tecnologias que usam calor; motores e refrigeradores. Cujos objetivos dessa unidade são:

- Identificar a participação do calor e os processos envolvidos no funcionamento de máquinas térmicas de uso doméstico ou para outros fins, tais como geladeiras, motores de Carnot etc, visando sua utilização adequada.
- Identificar o calor como forma de dissipação de energia e a irreversibilidade de certas transformações para avaliar o significado da eficiência em máquinas térmicas.

Na página 25 do PCNEM vem caracterizando que a Termodinâmica ao investigar os fenômenos que envolvem calor, troca de calor e de transformação da energia térmica em mecânica, abre espaço para uma melhor compreensão do conceito de energia. Nesse aspecto, a discussão das máquinas térmicas e dos processos cíclicos a partir de máquinas e ciclos reais, permite a compreensão da conservação de energia em um âmbito mais abrangente, ao mesmo tempo em que ilustra uma importante lei restritiva que limita processos de transformações de energia, estabelecendo sua irreversibilidade. É importante relatar que a omissão dessa discussão da degradação da energia, como geralmente acontece e não aparece na maioria dos livros textos do ensino médio, deixa sem sentido a própria compreensão da conservação de energia e dos problemas energéticos e ambientais do mundo contemporâneo.

Notamos do exposto acima que a abordagem estatística da entropia é relegada, bem como a sua definição não é clara, da mesma forma que aparece nos livros do ensino médio, onde existe uma confusão no conceito de entropia e da segunda lei da termodinâmica. Dessa forma, e olhando as diretrizes expostas acima, percebemos que precisamos procurar outra abordagem que facilite a compreensão do caráter estatístico da entropia e o real significado da segunda lei da termodinâmica.

A maioria dos livros do ensino médio traz um tratamento macroscópico para as leis da termodinâmica e a segunda lei é explicada através da irreversibilidade das trocas de calor ou da impossibilidade de uma máquina térmica transformar todo calor em trabalho. O conceito de entropia está relacionado com uma medida da irreversibilidade de alguns processos e esses livros complementam que se o processo é irreversível a entropia aumenta. Eles também trazem uma tentativa de fazer um tratamento microscópico com caráter estatístico, associado ao conceito de desordem dos sistemas. A entropia é associada à desorganização espacial dos sistemas e não há referência aos estados energéticos.

O cubo de Rubik permite uma abordagem microscópica e estatística na compreensão da termodinâmica. Os conceitos adquiridos através dele de forma totalmente abordadas em livros textos e em sala de aula, torna a física mais significativa e motivadora. O cubo prende a atenção dos estudantes e amplia a visão dos conceitos abordados pela termodinâmica. Ele facilita o

entendimento da equação que se encontra na lápide de Boltzmann e ainda permite compreender o significado da flecha do tempo, que raramente aparece em livros de ensino médio. Comparando a proposta do cubo em sala de aula com o método tradicional os estudantes acharam que o método utilizado para explicar termodinâmica através do cubo possibilitou a eles um entendimento mais fácil da segunda lei da termodinâmica e ajudou e muito na compreensão do caráter estatístico da entropia, pois eles tinham entendido no método tradicional que entropia é uma medida da desorganização de sistemas. Quanto mais desorganizado maior entropia. Não sabiam que entropia está relacionada com o número de estados acessíveis. Por isso, o cubo de Rubik foi importante para sedimentar os conceitos de termodinâmica.

2.6 Quais as propostas atuais para o ensino de termodinâmica?

A procura do entendimento dos conceitos relacionados com a termodinâmica tem levado os pesquisadores a procurar uma abordagem mais fácil para a compreensão de suas definições. A abordagem mais tradicional é aquela que parte de uma formulação heurística (baseada a partir de leis empíricas) ou axiomática (baseada em postulados). A primeira é encontrada tanto em livros do ensino médio, quanto em textos de ensino superior. A segunda em geral é encontrada somente em livros de ensino superior. Nas duas abordagens a entropia é interpretada como uma medida da irreversibilidade de processos físicos. No entanto, em alguns livros da educação básica essa característica não é relevada.

O ministério da educação propõem para a termodinâmica a identificação e a participação do calor e os processos envolvidos no funcionamento de máquinas térmicas de uso doméstico e também identificar o calor como forma de dissipação de energia e a irreversibilidade de certas transformações para avaliar o significado da eficiência em máquinas térmicas. Observamos nesse aspecto que o caráter estatístico da entropia não é abordado. A segunda lei da termodinâmica aqui é relacionada com as máquinas térmicas e as outras propriedades que podemos aferir de um conceito mais elaborado não é comentado.

Os livros de física do ensino médio em sua maioria a termodinâmica é apresentada de forma tradicional e a segunda lei é abordada de forma superficial e em geral ela vem expressa em uma fórmula que fornece o rendimento de uma máquina térmica. No entanto, essa equação é apenas uma consequência e a lei é mais abrangente e seu aspecto microscópico é ignorado. Dessa forma o caráter estatístico da lei também é ignorado e seu significado.

A revista brasileira de ensino de física [ref.19] apresenta uma proposta interessante para estudar o caráter estatístico da segunda lei da termodinâmica no ensino médio. Essa abordagem faz uma adaptação de uma ideia de Martin Sussman utilizado para representar estados, usando uma garrafa PET, bolas de gude e uma mangueira de ar refrigerado. Nessa proposta também é possível exprimir através de uma contagem a gaussiana que representa a distribuição de bolas de gude na mangueira. Essa abordagem em relação aos livros didáticos ela acrescenta muito, pois é possível entender o caráter estatístico da entropia, mas outros aspectos da termodinâmica não são possíveis caracterizar, por exemplo, o demônio de Maxwell. A proposta é um avanço no aspecto dos textos que encontramos para ensinar termodinâmica no ensino médio, por isso ela não deve ser relegada.

Nos livros textos de Física encontramos também outra abordagem tradicional para ensinar termodinâmica no ensino básico. Essa proposta que costumar aparecer em alguns livros parte de três leis: a primeira relacionada com o aspecto da energia; a segunda relata que a entropia nunca decresce em processos espontâneos e a terceira lei informa que a entropia se anula quando a temperatura tende a zero. Nessa contextualização da termodinâmica abordada pelos autores desses livros, avaliamos que a parte microscópica é deixada de lado, ou seja, o aspecto estatístico da entropia e as consequências das leis da termodinâmica não são comentados, a não serem as questões das máquinas térmicas e os ciclos termodinâmicos. A questão do demônio de Maxwell e a flecha do tempo não aparecem em seus comentários.

O congresso internacional sobre investigação e didática de ciências traz outra abordagem para ensinar termodinâmica no ensino médio. Essa proposta didática é a utilização de motores para a melhor compreensão dos conceitos relacionados com a termodinâmica. A abordagem propõe a utilização do motor

Stirling para desenvolver os conceitos de termodinâmica no ensino médio, de forma contextualizada. Nessa proposta os conceitos da termodinâmica são associados à transferência de energia a partir de uma diferença de temperatura. Dentro desse contexto o estudo das leis da termodinâmica é realizado baseado no ciclo de Carnot e das máquinas térmicas. Nesse aspecto é formulada a definição de rendimento dessas máquinas e as características máquina térmica ideal. No entanto, essa proposta em seu corpo não faz menção nenhuma e não traz nada relacionada com a entropia e seu aspecto estatístico. São muito abordadas as questões dos processos termodinâmicos e os seus ciclos.

Nossa proposta vem preencher uma laguna que havia nas últimas décadas no ensino de física no ensino médio. A reestruturação do ensino de física tem ganhado corpo nessa década e o elemento lúdico passa ter um papel importante nessa abordagem. Alguns autores têm destacado a eficiência dos jogos para despertar o interesse dos estudantes pela ciência. Na sua grande maioria estes autores acreditam que os jogos educacionais promovem a motivação e a facilitação no processo de aprendizagem, raciocínio e memorização do conteúdo. Nessa perspectiva o cubo de Rubik satisfaz essa busca e, além disso, permite ao professor ensinar termodinâmica nos seus aspectos macroscópicos e microscópico, que não aparece na maioria dos livros didáticos. O caráter estatístico da entropia é amplamente discutido com o cubo, a questão da distribuição de cores na face do cubo, permite uma relação com a distribuição de Maxwell. A segunda lei da termodinâmica no seu sentido mais amplo é totalmente visualizada com o cubo e até o demônio de Maxwell que raramente aparece nos livros texto do ensino médio é abordado nessa proposta. Sem dúvida nenhuma o cubo de Rubik é um apoio pedagógico impar para ensinar termodinâmica no ensino médio, pois faz uma ponte interessante entre o micro e o macro e auxilia os estudantes do ensino médio a compreenderem o caráter estatístico da entropia, a flecha do tempo e alguns aspectos de meta física.

Capítulo 3

Descrição Geral do cubo

3.1 *Mecânica do Cubo*

O cubo foi criado como um brinquedo de ensino há mais de três décadas por Erno Rubik e tornou-se um brinquedo popular que entretém, desafia e têm confundido milhões de pessoas pelo mundo. Este brinquedo simples que capta o interesse de inúmeras pessoas, independentemente da idade, sexo ou educação, um brinquedo que não requer pilhas ou eletricidade e custa muito pouco para produzir. O cubo de Erno Rubik provocou curiosidade ao redor do planeta por várias gerações. Pessoas de qualquer idade dedicaram valiosos tempos de seus dias para tentar resolver os seus enigmas. Muitas pessoas que conseguem resolver passam mais tempo em tentar criar novos padrões nas cores do cubo. Realmente o cubo é um brinquedo intrigante, um princípio de engenharia que prende a atenção de todos.

Após o cubo estar pronto, Rubik girou o cubo de vários lados para testar o cubo. Ele ficou cativado da forma que as cores se misturavam de forma aleatória. Ao concluir o teste, Rubik percebeu que ele não conseguia entender o seu caminho de volta para a configuração original. Rubik descobriu que girar o cubo aleatoriamente nunca iria trazer de volta o padrão inicial. Ele verificou que a única maneira de resolver o cubo era fazer movimentos calculados, cada um com uma finalidade específica. Depois de um mês de experimentos, ele conseguiu resolver o cubo e então demonstrou para a comunidade acadêmica de forma a se tornar extremamente popular, desde 1979.

Cubo de Rubik é um quebra cabeça tridimensional, cujo objetivo é o de fazer com que cada lado do cubo tenha apenas uma cor, como mostrado na figura 3 abaixo.

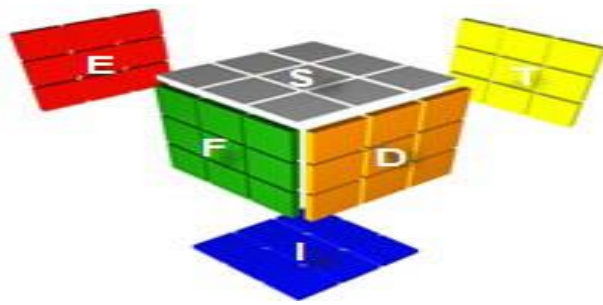


Figura3 : Diagrama de um cubo de Rubik resolvido. Os seis lados são: superior (S), frontal (F), e direito (D) os lados são visíveis. Os restantes: lados esquerdo (E), traseiro (T) e inferior (I) que são mostradas pelas imagens projetadas.

Cada uma das três divisões horizontais do cubo é chamada linha, ao passo que se denomina coluna cada uma das três divisões verticais do cubo. O cubo é construído de tal maneira que linhas e colunas podem girar para ambos os lados (ver figura 4).

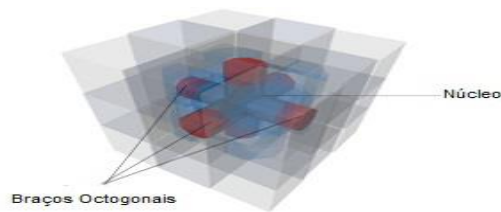


Figura 4: Diagrama do núcleo de um cubo de Rubik. O núcleo permite que cada linha e coluna do cubo girem para ambos os lados.

É difícil entender a mecânica do cubo sem primeiro conhecer os seus componentes. O cubo de Rubik consiste em duas componentes distintas: o núcleo e as peças (cubos) exteriores. A forma do núcleo consiste em um cubo central imaginário com seis braços octogonais ligados a cada uma das faces (Figura 4). Cada octógono é anexado ao cubo central permitindo a rotação livre em qualquer direção. As faces octogonais de cada um desses braços são perpendiculares ao cubo imaginário. As peças (cubos) exteriores são anexadas ao núcleo e podem ser divididas em três tipos: as centrais, as laterais e vértices (Figura 5).

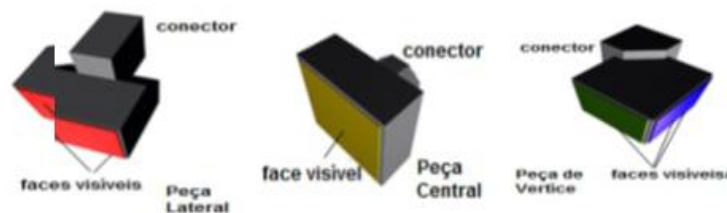


Figura 5. Componentes do Cubo de Rubik. Fonte: dos autores

Há um total de seis peças centrais (Tabela 1), cada uma tem apenas uma face visível na construção final do cubo. Cada peça central é ligada perpendicularmente a um dos braços octogonais, as peças centrais nunca se movem em relação ao núcleo. Há doze peças laterais que formam as arestas do cubo, cada uma destas peças possui duas faces visíveis. Finalmente, há oito peças de vértice, cada uma com três faces visíveis. Cada peça de vértice possui um conector localizado na aresta oposta a de suas faces visíveis. Os conectores das peças laterais e de vértice se encaixam nas arestas dos braços octogonais.

Tabela 1: Peças do Cubo de Rubik.




			
# peças	6	8	12
# faces	1	3	2

Tabela 1: Peças do cubo de Rubik. Fonte: dos autores

Juntas, estas vinte e seis peças compõem a parte visível do cubo de Rubik. Cada uma delas é presa firmemente por seus conectores aos braços do núcleo, impedindo que as peças adjacentes saltem para fora. Como cada um dos braços octogonais pode girar, as camadas do cubo (linhas e colunas) podem ser rotacionadas a partir da sua posição original. Quando um dos braços octogonais do núcleo gira, giram também os nove cubos externos conectados aos núcleos e travados por seus vizinhos. Com rotações de múltiplos de $\pi/4$, o cubo pode ser devolvido à sua posição original, mas é pouco provável que se retorne a sua posição original. Depois de apenas algumas rotações aleatórias de diferentes lados, as cores em cada uma das faces estarão muito bem embaralhadas.

O cubo de Rubik tem sido utilizado no ensino de matemática, ciências da computação e no ensino de física. A inserção do cubo na sala de aula aumenta a autoconfiança, especialmente nos alunos com desempenho insuficiente. Pois, na perseverança para apreender a técnica de resolver o cubo deixa o aluno com a perspectiva de que se consegue resolver o cubo, ele consegue resolver qualquer problema. O cubo mágico também promove a

aprendizagem cooperativa, como se observa no uso de jogos e atividades lúdicas no ensino. Os alunos geralmente preferem trabalhar em grupos, uns auxiliando o outro na aquisição da solução do problema proposto. O cubo de Rubik também auxilia no desenvolvimento do raciocínio sequencial necessário para resolver o cubo e de outros problemas. Demonstra a necessidade de prática na resolução do cubo, quanto mais se pratica mais rápido o cubo é resolvido. E por fim auxilia muito na percepção espacial, pois o cubo de Rubik é uma excelente ferramenta para melhorar o raciocínio espacial, uma vez que para resolver o cubo não basta apenas memorizar uma solução, mas planejar a manipulação de objetos tridimensionais.

3.2 Aprendendo a resolver o cubo de Rubik

Atualmente existe uma infinidade de métodos de solução para o cubo de Rubik, muitos dos quais disponíveis na web (veja, por exemplo: www.ryanheise.com/cube/beginner.html). Tais métodos utilizam diferentes seqüências de movimentos ou dividem o problema de resolver o cubo em diferentes problemas menores que uma vez resolvidos conduzem a solução final.

Nesta seção será apresentado um método simples, que utiliza apenas 3 seqüências de movimento para mudar ou ajustar peças diferentes. Na terminologia empregada nesta seção ajustar uma peça significa a alterar a direção das cores de uma peça (Fig. 6). Comutar duas peças refere-se a trocar a posição de duas peças diferentes (Fig. 7).

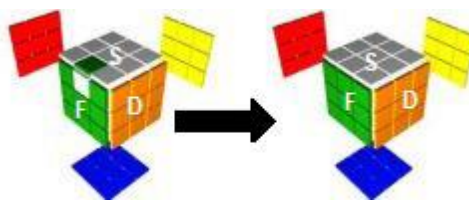


Figura 6: Ajustar uma peça

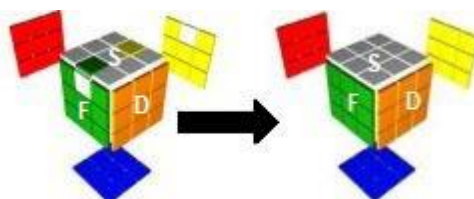


Figura 7: Comutar duas peças

Sequência 1 – Um movimento para ajustar dois vértices consecutivos (nada mais é alterado) (Fig. 8): i. Segurar o cubo de modo que os dois vértices a serem ajustados estejam na face superior; ii. Gire a coluna central para cima; iii. Gire a linha superior para esquerda; iv. Repita as etapas 2 e 3 mais duas vezes; v. Gire a linha superior para esquerda; vi. Gire a coluna central para baixo; vii. Repita os passos 5 e 6 mais duas vezes; viii. Rodar a linha superior para esquerda duas vezes.

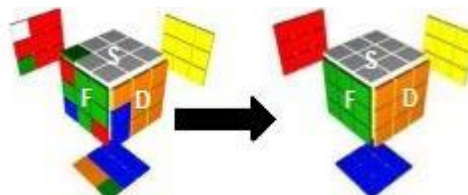


Figura 8: Ajustar vértices consecutivos

Sequência 2 – Um movimento para ajustar três vértices de uma face (Altera arestas adjacentes) (Fig. 9): i. Segure o cubo de forma que as arestas a serem alteradas estejam na face superior e voltadas para você e o canto inalterado fique na parte superior direita; ii. Gire a linha superior para a direita; iii. Gire a face frontal no sentido horário duas vezes; iv. Gire a linha superior para esquerda; v. Gire a face frontal no sentido horário; vi. Gire a linha superior para a direita; vii. Gire a face frontal no sentido horário; viii. Gire a linha superior para esquerda; ix. Gire a face superior no sentido horário duas vezes.

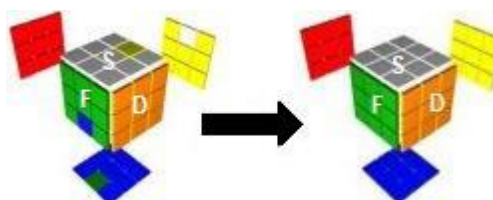


Figura 9: Ajustar três cantos

Sequência 3 – Um movimento para mudar as posições de três peças laterais em um mesmo plano (altera nada mais) (Fig. 10): i. Segurar o cubo de modo que o plano a ser alterado seja uma coluna central; ii. Posicione a quarta peça lateral no plano inferior e na face oposta a que esta próxima de você; iii. Gire a coluna central; iv. Gire a linha superior para esquerda duas vezes; v. Gire a coluna central para baixo; vi. Gire a linha superior para esquerda duas vezes.

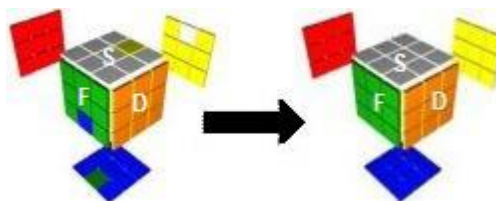


Figura 10: Mudar a posição das arestas na mesma face

Estas três sequências de movimento são vantajosas, pois seus efeitos são facilmente compreendidos e são de simples memorização. O planejamento de um algoritmo para resolver o cubo de Rubik utilizando estes três seria um projeto de ciências bastante interessante e factível para alunos que demonstram gosto por resolver quebra-cabeças, boa capacidade de raciocínio espacial e/ou já conheçam como resolver o cubo de Rubik. O objetivo do aluno neste trabalho seria determinar se as três sequências de movimentos são suficientes para resolver o cubo. Em outras palavras, se é possível resolver o cubo com apenas estes três sequências de movimento, ou que seriam movimentos adicionais.

Uma estratégia para resolver o cubo de Rubik utilizando estes 3 movimentos poderia ser dividida em 5 passos:

Passo 1: Fazer uma cruz em um lado do cubo. Fazer a cruz é simplesmente uma questão de inserção uma a uma cada uma das 4 peças laterais, um a um, em torno da peça central sem remover as peças que já foram colocadas. Gire a cruz até algumas das cores das peças laterais que formam a cruz combinem com as peças nos lados do cubo. Se apenas uma cor combinar, continue rotacionando a cruz: É sempre possível obter a combinação de duas cores.

No caso de se obter apenas duas peças laterais combinando, as peças laterais que não combinarem deve ser trocadas de posição. Existem duas possibilidades diferentes. Ou as duas peças laterais a serem trocadas estão próximas umas das outras, ou estão em lados opostos do cubo. Ambos os casos podem ser tratados pela mesma estratégia. Em primeiro lugar, desloque uma destas peças para a face oposta de forma independente da camada onde foi feita a cruz. A seguir, gire a peça trocada sobre a camada superior até que ela fique posicionada diretamente acima da sua posição correta. Finalmente, gire esta peça novamente para a camada onde está a cruz. Este mesmo

movimento também moverá a outra peça trocada para a camada oposta, onde ela pode ser levada para a posição correta utilizando a mesma estratégia no sentido inverso. Ao fim deste procedimento o cubo deve se encontrar num padrão análogo ao da Fig. 11. Este é um passo muito importante, visto que ele deverá ser repetido nos demais lados do cubo a fim de resolvê-lo.



Figura 11: Posição do cubo ao final do Passo 1

Passo 2: Obtenha uma face de uma mesma cor: Para tanto se devem inserir as 4 peças de vértice correspondente na camada onde foi feita a cruz. Neste ponto teremos 1/3 do cubo resolvido, como mostra a Fig. 12.



Figura 12: Posição do cubo final do Passo 2

Passo 3: Monte a camada intermediária. O objetivo aqui é inserir uma peça lateral da camada superior da camada intermediária e não bagunçar o restante do cubo já resolvido. Ao fim deste passo teremos resolvido 2/3 do cubo, como mostra a Fig. 13.



Figura 13: Posição do cubo ao final do Passo 3

Passo 4: Sem bagunçar o que já está resolvido, construir uma cruz na face oposta do cubo e colocar as peças laterais de cores correspondentes em suas posições corretas.

Passo 5: Neste momento o cubo deve se encontrar de forma equivalente a mostrada na Fig.14. Agora basta mover as últimas peças vértice desta camada para a posição correta e orientação correta. O cubo está resolvido.



Figura 14: Posição do cubo ao final do Passo 4

3.3 Ensinando a resolver o cubo em sala de aula

Ao se utilizar o cubo de Rubik em sala de aula é inevitável que ensine a resolvê-lo. Utilizando-se os movimentos e a estratégia da seção anterior, é possível ensinar de forma simples e com grande grau de eficácia. No entanto, seria mais interessante ensinar a resolvê-lo aos poucos, diluindo a solução do cubo ao longo de várias aulas à medida que se utiliza o cubo para ilustrar e discutir conteúdos de física como simetrias, leis de conservação, entropia, irreversibilidade e matemática, como potências de i , probabilidade e etc. Dessa forma as atividades voltadas para a resolução do cubo não necessariamente precisam ocupar um tempo demasiadamente grande em sala de aula. Com isso em mente, abaixo se delineia uma proposta de atividades que não devam ocupar mais que 20 minutos de cada aula.

Aula 1: Ensine os estudantes as 3 sequencias de movimento apresentadas na seção anterior.

Aula 2: Ensine os estudantes a usar os movimentos descritos para fazer uma cruz em um lado do cubo (Passo 1). Exercício: Completar o Passo 1 em cinco minutos.

A maioria dos estudantes deverá conseguir resolver este exercício com facilidade. Proponha aos estudantes que não consigam executar a tarefa, refazer o exercício no início da aula seguinte.

Aula 3: Ensine aos estudantes a realizar o Passo 2: fazer com que toda face do cubo tenha a mesma cor. Exercício: Completar o Passo 2 em cinco minutos.

A esta altura deverá ser claramente perceptível à natureza sequencial deste método de resolução do cubo, uma vez que os alunos não poderão executar o Passo 2 se não concluírem primeiro o Passo 1. Este é um ponto importante e deve ser bastante enfatizado, sendo que o docente pode fazer diversas referências a ele quando tratar de outros temas que são sequenciais por natureza. Essa rotina pode ser repetida sistematicamente para cada passo, observando-se o progresso dos alunos. Na aula seguinte após ensinar a executar o 5 passo, dê aos alunos cinco minutos para resolver todo o cubo de Rubik. A maioria dos estudantes deve conseguir fazê-lo dentro deste prazo com pouco ou nenhuma das dificuldades que tenham apresentado semanas antes.

Para se demonstrar o papel da prática contínua, atividades com o cubo podem ser utilizadas regularmente desafiando os alunos a melhorar os seus melhores tempos de resolução

3.4 Entropia, 2ª Lei da Termodinâmica no cubo

O ensino da segunda lei da termodinâmica e do seu conceito, associado à entropia, tem sido considerado problemático por vários autores (ref.[1]). Em grande parte, esta dificuldade está associada a concepções prévias errôneas bastante difundidas, além de interpretações e exemplos equivocados em tentativas malsucedidas de descrever a entropia em termos leigos (ref.[20]). Se há dificuldade em descrever a entropia em termos leigos, não há nenhuma dificuldade em descrevê-la matematicamente: entropia é uma medida do número de microestados acessíveis consistentes com o estado macroscópico de um sistema termodinâmico. Formalmente, temos:

$$S = k \ln \Omega \quad (11)$$

onde S denota a entropia do sistema, k é uma constante de proporcionalidade (chamada constante de Boltzmann) e Ω é o número de microestados

acessíveis ao sistema. Um macroestado é o estado do sistema descrito por variáveis empíricas medidas macroscopicamente, tais como temperatura, pressão, volume, magnetização, energia total. Um macroestado é o que observamos como resultado dos efeitos coletivo do estado dos diversos subcomponentes do sistema. Cada uma das configurações dessa coleção de subcomponentes é o que chamamos de microestado. Usualmente há diversos microestados distintos que resultam em um mesmo macroestado. Assim, a entropia é uma medida de quantos microestados resultam naquelas propriedades macroscópicas observadas, ou em outras palavras de quantas configurações diferentes o sistema pode se apresentar e ainda sim ter as mesmas propriedades de larga escala. A Eq. (11) pode ser reescrita em termos da probabilidade p_n de se encontrar o sistema no n -ésimo microestado (ver ref.[21]) , assumindo a forma

$$S = -k \sum_n p_n \ln p_n \quad (12)$$

Do ponto de vista puramente macroscópico, a entropia seria, uma medida da capacidade do sistema para realizar transformações, de maneira bastante análoga a nossa ideia de energia como uma medida da capacidade do sistema de realizar trabalho. De fato, a palavra entropia foi cunhada justamente afim explorar esta analogia unindo o prefixo “en” à expressão grega ή τροπή, que significa transformação (ref.[22]).

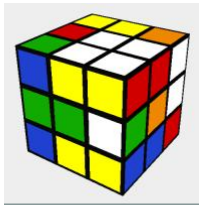
Em geral, ao passar por transformações a energia de um sistema se distribui pelos seus vários constituintes, além disso, energia e partículas são trocadas com o ambiente no qual se encontra o sistema. Isso permite que o sistema acesse um número cada vez maior de microestados, o que resulta em um aumento da entropia do sistema. Quando a entropia do sistema atingir seu valor máximo, as propriedades macroscópicas do sistema não mais se modificam, e atingimos o chamado equilíbrio. Estas observações constituem a conhecida segunda lei da termodinâmica.

O grande número de padrões obtidos por quem manipula o cubo de Rubik sugere uma aproximação estatística para expressar a irreversibilidade experimentada por quem lida como ele. A partir do cubo resolvido, se fizermos

movimentos aleatórios por um período de tempo, podemos recolher as estatísticas de uma face, por exemplo, com centro vermelho. Podemos descrever essa coloração de uma face por um vetor de seis dimensões, que iremos denotar por vetor de cor, definindo o seu módulo por:

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2} \quad (13)$$

Onde cada C_{is} corresponde a cores das peças (cubinhos) tomadas em ordem alfabética de seus nomes em inglês: blue (B), green (G), orange (O), red (R), white (W), yellow (Y). O comprimento desse vetor mede a ordem da face. Seja a figura abaixo que representa um cubo depois de fazer alguns movimentos aleatórios nele. Vamos expressar as coordenadas do vetor de cor e calcular o seu módulo para a face direita com centro laranja.



$$(2,1,1,3,2,0)$$

$$C = (2^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2)^{1/2}$$

$$C = \sqrt{19}$$

Os estados mais frequentes de mistura são rearranjos do tipo

$(3,2,2,1,1,0)$. O valor $C = \sqrt{19}$ tem a maioria de microestados. No caso do cubo resolvido as coordenadas para o vetor de cor é, por exemplo, $(0,0,0,9,0,0)$ e o vetor de cor tem módulo $C = 9$. No caso mais misto onde todas as cores estão presentes, por exemplo, de coordenadas $(2,1,2,1,2,1)$, o vetor de cor é mais curto e seu módulo é $C = \sqrt{15} \cong 4$. Os gráficos abaixo indicam como o valor médio de C oscila em torno deste valor, para os 50 movimentos aleatórios.

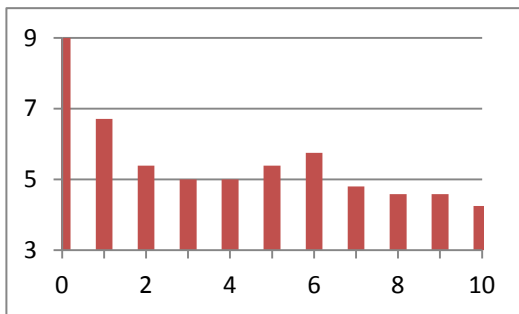


Gráfico 1 Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 10 movimentos.

Fonte: dos autores

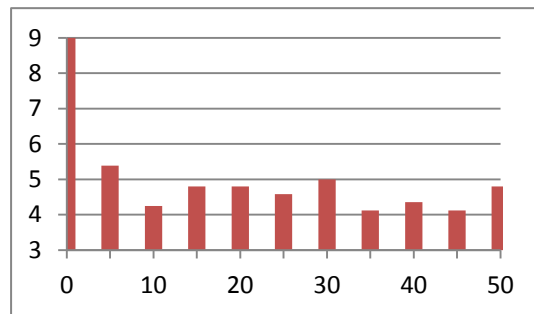


Gráfico 2 Variação do comprimento do vetor de cor nos primeiros 50 movimentos.

Fonte: dos autores

Ao analisar o gráfico acima, observamos que o vetor de cor tende a diminuir à medida que a face vai ficando multi colorida de tal forma que seu comprimento diminui a partir de $C = 9$ a $C < 5$, dentro de poucas voltas. Em seguida, ele flutua sobre este pequeno valor, como mostra a figura acima.

A entropia de uma mistura de cor é o logaritmo do número de microestados que têm essa mistura de cor. A mistura, a qual é caracterizada por os rearranjos dos números (3,2,2,1,1,0), tem a entropia máxima.

Se continuarmos a fazer movimentos aleatórios com o cubo por algum tempo, podemos coletar dados estatísticos sobre a coloração das faces. É curioso notar que estados de máxima mistura de cores (i.e. os possíveis rearranjos de (2,2,2,1,1,1)) são bastante raros. Os estados mais frequentes são rearranjos de (3,2,2,1,1,0), isso ocorre pois este estado pode ser formado pelo maior número de microestados diferentes, e portanto possuem a maior entropia. De fato, todos os rearranjos de (3,2,2,1,1,0), possuem $C = \sqrt{19} \cong 5$ e como consequência é entorno deste valor que flutua o valor de C como visto nos Gráficos 1 e 2.

Um segundo experimento pode ser instrutivo para esclarecer como as propriedades do sistema flutuam em torno dos valores de equilíbrio. Seja N_r o número de cores em uma face que ocupam exatamente r quadrados nesta face. Por exemplo, os estados de máxima mistura tem $N_1=N_2= 3$ e todos os demais iguais a zero, já a distribuição de máxima entropia tem $N_0 = 1$, $N_1= 2$, $N_2 = 2$, $N_3 = 1$ e todos os demais iguais a zero. Nosso experimento consiste em embaralhar o cubo e determinar a distribuição de cores, i.e os N_r em uma face e repetir este procedimento até termos um número suficientemente grande de dados. Para 50 configurações aleatórias do cubo obtivemos a distribuição expressa no Gráfico 3. Mas o Gráfico 3, também nos reserva uma agradável surpresa, ele lembra a forma de bem conhecida distribuição de Maxwell.

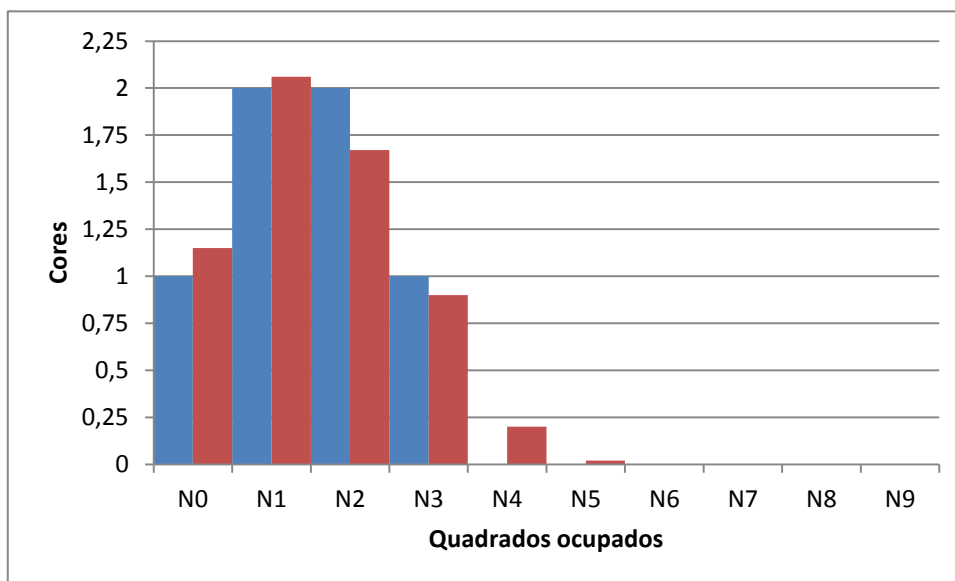


Gráfico 3 – Distribuição de Cores em uma face. Em azul a distribuição mais frequente, em vermelho a distribuição média. Fonte: dos autores

Como esperado a distribuição média está muito próxima da distribuição mais provável. Como discutido isso ocorre, pois a máxima entropia sinaliza a situação de equilíbrio para o sistema.

Percebemos também pelo gráfico que essa distribuição dos quadrados coloridos em uma face do cubo lembra a distribuição de Maxwell.

Quanto mais embaralhado o cubo, mais micro foi utilizado para obter esse padrão e, portanto maior a entropia. A entropia está relacionada com o número de estados acessíveis.

A segunda lei da termodinâmica vem mostrar o sentido espontâneo dos fenômenos ocorrido na natureza. Observamos que à medida que se embaralha o cubo, maior é quantidade de estados, mais energia foi gasta e conseqüentemente, maior a entropia. Portanto, em processos naturais a entropia do universo, sempre aumenta.

O vetor de cor, que dá uma medida do grau de embaralhamento do cubo. Quanto mais embaralhado o cubo, menor o vetor de cor, e conseqüentemente maior a entropia. Podemos observar na tabela 2, que o vetor de cor e a entropia são grandezas inversas. Ao fazer movimentos aleatórios no cubo, cada face vai rearranjando de maneira totalmente diferente, de tal forma que a energia gasta nos movimentos, acarreta um aumento de entropia. Vimos que à medida que o tempo passa o vetor de cor diminui com ele. Essa é uma formulação empírica da segunda lei da termodinâmica para o cubo,

expressando as nossas observações. No universo do cubo existe uma seta do tempo, satisfazendo a segunda lei da termodinâmica.

Vetor de cor	Entropia
9,00	1,79 k
5,38	11,93 k
5,20	13,02 k
5,00	13,31 k
4,58	13,43 k
4,12	13,72 k

Tabela 2 Vetor de cor e entropia para vários movimentos aleatórios no cubo de Rubik.
Fonte: dos autores

A constante k é denominada constante de Boltzmann. Os vetores de cores foram obtidos a partir do cubo resolvido (primeiro valor na tabela 2) e depois foram realizados movimentos aleatórios para obter os outros pontos, começando com 10 movimentos até atingir 50 movimentos aleatórios no cubo de Rubik.

3.5 Distribuição de Maxwell no cubo

A distribuição de Maxwell é o nome pelo qual os físicos descrevem a distribuição de velocidades de partículas em gases ideais, i.e. naquelas em que as partículas se movem livremente dentro de um recipiente estacionário sem interagir umas com as outras, com exceto durante breves colisões em que trocam energia e quantidade de movimento umas com as outras ou com o seu ambiente térmico. Surpreendentemente, não é uma simples coincidência que a distribuição de cores mostrada no Gráfico 3, lembre uma distribuição de Maxwell.

A distribuição de cores no cubo de Rubik pode ser resolvida por um problema de contagem. O cubo é formado por seis cores indicadas pelas iniciais de seus nomes em inglês: Azul (B), verde (G), laranja (O), vermelho (R), branco (W) e amarelo (Y). De quantas maneiras é possível distribuir essas cores nos 9 quadrados da face? O número de cores que ocupam exatamente r quadrados deve obedecer as seguintes relações:

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + N_9 = 6 \quad (14)$$

$$0N_0 + 1N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + 6N_6 + 7N_7 + 8N_8 + 9N_9 = 9 \quad (15)$$

A equação (14) expressa o fato de haver apenas 6 cores possíveis, enquanto a equação (15) expressa que essas cores ocuparão os 9 quadrados da face. Esse problema pode ser reinterpretado para uma situação mais “física” como sendo determinar o número de formas possíveis de se distribuir 9 unidades (quantas) de energia entre 6 átomos distinguíveis. Se existem N_9 átomos com 9 quanta, N_8 átomos com 8 quanta, ..., N_0 átomos sem quantum, o número total de casos diferentes é dado pela fórmula de Boltzmann:

$$\Omega = \frac{6!}{N_0!N_1!N_2!N_3!N_4!N_5!N_6!N_7!N_8!N_9!} \quad (16)$$

Dividindo as equações (14) e (15) por 6, podemos reinterpretá-las em termos de probabilidades:

$$P_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 = 1 \quad (17)$$

$$0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 = 3/2 \quad (18)$$

A situação de equilíbrio, ou seja, a situação de maior entropia é obtida maximizando a equação (12), sujeita as restrições impostas pelas equações (17) e (18). Procedendo desta maneira (utilizando, por exemplo, multiplicadores de Lagrange ref.[22], apêndice A), obtêm:

$$N_r = \frac{6}{Z} e^{-kr} \quad (19)$$

Note que essa expressão é (monotonicamente) decrescente com o aumento de r , o que é ligeiramente diferente do comportamento obtido no gráfico 3. Contudo salientamos que no cálculo acima não consideramos que o quadro central da face nunca se move e se quando o trocamos por um quadrado em uma borda ou em um canto da face, nosso cálculo contabiliza este como um microestado (acessível) diferente. Assim, os nove lugares da face devem ser distribuídos entre as 6 cores, cada um possuindo um determinado vetor de cor $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, o que altera a contagem de estados, pois adiciona uma nova restrição. Com isso a expressão para o número total de microestado precisa ser alterada:

$$\Omega = \frac{6!}{N_0!N_1!N_2!N_3!N_4!N_5!N_6!N_7!N_8!N_9!} \times \frac{9!}{C_1!C_2!C_3!C_4!C_5!C_6!} \quad (20)$$

Dessa forma a entropia dada pela equação (11) toma o valor máximo apenas para a distribuição em azul no gráfico 3. É claro que um leitor atento, observará que este cálculo não é processo uma vez que ele desconsidera as interações entre as faces do cubo. Não obstante, ela concorda muito bem com a evidência empírica, que obtivemos. Este aspecto nos ensina também algo sobre a natureza da ciência: o uso de modelos simplificados para explicar alguns aspectos da natureza, e a progressiva introdução de modelos mais e mais robustos para explicar toda a complexidade de um fenômeno.

Em todo caso, vemos que a distribuição de cores em um cubo de Rubik embaralhado pode ser analisada de uma maneira similar à forma como a Física Estatística analisa a distribuição de energias nas partículas de um gás.

3.6 Demônio de Maxwell no cubo

O cubo de Rubik possui muitas estratégias diferentes para resolver o cubo, deixando-o na forma original de fabrica. Os métodos utilizados requerem centenas de passos (ref. [13]). Apesar de que, um reduzido número de pessoas consegue resolver o cubo na faixa de 6 s. Um demônio de Maxwell hábil pode resolver o cubo em menos de 1 s, geralmente uma pessoa leva de 25 a 30 minutos para resolver o cubo. Mesmo assim ainda está longe de inverter a sequência de movimentos. Somente Deus pode conhecer o caminho mais curto para todos os casos. Se você observar cada passo que fez, você pode refazer seus próprios passos e voltar à ordem inicial. Dessa forma ao refazer o seu caminho o cubista está gastando uma forma de energia mental para voltar esses movimentos e de acordo com o princípio de Landauer's essa energia gasta $kT \ln 2$ na memorização dessas informações dos movimentos realizados pelo cubista, implicaria no aumento de entropia do sistema mais a vizinhança. Portanto, a segunda lei da termodinâmica não é violada pelo mais expert no cubo de Rubik.

Capítulo 4

Concepção do Guia Didático – Proposta Pedagógica e Aprendizagem.

A educação não processa de uma única forma e não tem, especificamente, um único modelo. E, quando ela se sujeita a teoria da educação, nesse momento, ela cria condições para o seu exercício, produz os caminhos para a aprendizagem e constitui executores especializados e, então, surge à escola, como principal foco de organização, sistematização e transmissão da cultura.

O saber aparece pelas ações de quem sabe fazer para quem não sabe e precisa aprender. Desse modo, é importante compreender os saberes da comunidade, ritmos, histórias de vida e a importância de sua aprendizagem.

Nesse sentido, Brandão (1985, p. 22) afirma: Tudo que é importante para a comunidade e existe com algum tipo de saber, existe também com algum modo de ensinar.

Portanto, decorre desse entendimento que a proposta do Guia Didático possibilite um movimento na resignificação de conceitos, agindo muito reflexivamente no aluno para gerir seus próprios saberes. É uma proposta desafiadora e de experiências, com ênfase nas aprendizagens, nas relações estabelecidas, em outros saberes que possam ser construídos na interação e colaboração.

O Guia Didático propõe-se como uma importante contribuição no desenvolvimento da disciplina de Física utilizando-se de textos com atividades multidisciplinares para a compreensão de conceitos como: reversibilidade, irreversibilidade, entropia, 2ª Lei da Termodinâmica, Demônio e distribuição de Maxwell e, bem como a aprendizagem e a troca de conhecimentos no cotidiano escolar.

Este trabalho evidencia-se também nas possibilidades já construídas e nas relações estabelecidas entre pares, tanto na teoria e prática quanto nos objetivos desejados.

Portanto, o Guia Didático não se encerra apenas nas leituras e atividades realizadas pelo aluno, mas legitimando a atividade epistêmica como processo no texto e contexto do cotidiano escolar.

O cubo de Rubik oferece um modelo educacional impar para explorar um mundo desconhecido nos caminhos para aprendizagem da física. As regras de movimento do cubo nos permite constatar as Leis de conservação, que diminui o número de estados permitidos, mas que fazem chegar a um padrão desejado mais difícil. O grande número de padrões sugere uma abordagem estatística para expressar a irreversibilidade experimentada por quem manipula o cubo.

4.1. A construção do Guia Didático e a descrição das atividades propostas.

O material didático tem um papel fundamental para a construção do conhecimento. Neste contexto, o Guia Didático está estruturado na ação educativa flexível e também interativa.

O contexto “interativo” refere-se ao uso do cubo, que o auxilia na compreensão das atividades propostas. Elas são desenvolvidas sob a orientação do professor permitindo uma análise da aprendizagem de seus alunos a partir dos resultados das atividades desenvolvidas. Essa atividade é de fundamental importância na compreensão das demais atividades.

Na ação educativa flexível assegura um processo educativo que seja relevante para o aluno, entretanto, também visa enriquecer a prática pedagógica, identificando as contribuições para o processo de ensino-aprendizagem.

Nesta assertiva, a construção do Guia Didático tem como propósito oportunizar ao aluno um material didático exigente cognitivamente e comunicacional, e ao mesmo tempo favorecer a aprendizagem. Dessa forma, o trabalho é estruturado e organizado, contemplando uma boa referência bibliográfica e de atividades para serem desenvolvidas no contexto da sala de aula.

4.2. Tópico Saiba mais

A finalidade desse tópico é enriquecer e aprofundar o conceito desenvolvido na seção do guia. Os temas relacionados nessa seção são relevantes no contexto da física clássica e contemporânea. Ele auxilia o aluno

há aprender um pouco mais sobre o tema, complementando e ampliando o texto abordado. Essa leitura é agradável aos estudantes e professores pelo interesse que os assuntos despertam. A leitura do *saiba mais* é sugerido que se faça em conjunto, na própria sala de aula.

A expressão *saiba mais* foi utilizada a fim de caracterizar um tema de Física pelo seu aspecto mais cultural ou tecnológico, desejável como parte de conhecimento de qualquer cidadão. Além de radicar os conceitos em cada tópico que aparece, ele permite ao professor e ao aluno a discussão profunda de conceitos relacionados à física nos seus aspectos significativos. Esse item é relevante na estrutura do guia e não pode ser omitido no desenvolvimento dos conceitos, pois essa omissão acarretaria numa perda significativa na aprendizagem do aluno. Outro aspecto importante é que nessa parte sempre aparece um conceito que em muitos casos não são tratados da maneira que deveriam aparecer no ensino médio.

4.3. Abordagem reflexiva dos exercícios e exemplos.

Os exemplos físicos alocados nessa seção tem o objetivo de caracterizar as ideias básicas que foram utilizadas nas atividades desenvolvidas com o cubo de Rubik. Auxilia na visualização e compreensão dos aspectos físicos inseridos na seção. As sugestões de exercícios constituem uma atividade indispensável para a aprendizagem do conteúdo estudado em cada seção. Eles estabelecem importante fonte de motivação e contribuem significativamente para sedimentação do tema.

Além disso, criam uma passagem para a resolução de problemas mais elaborados, estabelecendo transições suaves na estrutura cognitiva dos alunos. É aconselhável resolver os exercícios de um tópico antes de iniciar o estudo de outro tópico. Consideramos o comprimento desta recomendação muito importante para o sucesso do aluno no estudo da Física. Os exercícios sugeridos foram editados com a finalidade de permitir ao aluno a sedimentação da ideia central de cada tópico que aparece e de forma mais geral no final do guia de forma a consolidar todos os tópicos desenvolvidos no decorrer do produto.

4.4. Análise do planejamento da atividade de sala.

A aula desenvolvida em sala foi realizada com o tema: Termodinâmica em um cubo de Rubik sendo feita uma descrição do cubo em seus aspectos mecânicos e estatísticos para seus movimentos.

Foram realizados alguns movimentos aleatórios com o cubo, para compreender os conceitos de irreversibilidade e reversibilidade no cubo. A seguir foi discutido sobre o conceito de entropia dando ênfase em seu caráter estatístico. Definiu-se um vetor de seis dimensões denominado vetor de cor e foi analisada sua relação com a entropia.

Após discussão dos conceitos descritos acima foi colocado à questão da distribuição de cores em uma face e a partir dessa análise os alunos chegaram à expressão para o número total de microestado em um cubo de Rubik.

Em seguida com uma análise do vetor de cor em relação a ela gerou-se uma nova discussão sobre a segunda lei da termodinâmica sendo apresentados vários exemplos aos alunos, para posterior resolução de atividades, onde poderá fazê-las individualmente ou com seu grupo. Entretanto, ao longo dos trabalhos cada aluno deve realizar os seus registros para que seja em uma roda de conversa, socializadas.

4.5 Auto Avaliação sobre a aula Termodinâmica em um Cubo de Rubik.

A primeira aula ministrada utilizando o cubo de Rubik foi para uma turma de terceiro Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Messias Pedreiro que já, em sua maioria conheciam o processo de resolução do cubo e possuíam algum conhecimento prévio de termodinâmica, sendo assim utilizada como projeto piloto.

Inicialmente, foi apresentado o cubo para os alunos mostrando seus componentes e suas características. Notou-se que alguns alunos realmente já tinham habilidade em deixar o cubo na forma padrão e outros se sentiram curiosos na forma de resolvê-lo. Foi dado um tempo de aproximadamente 15 minutos para discussão entre os alunos, sem nenhuma intervenção por parte do professor. Em seguida foram discutidos os seguintes: processos reversíveis e irreversíveis, o conceito de entropia e seu caráter estatístico. Para

compreensão do conceito de entropia, foi definido um vetor de seis dimensões denominado vetor de cor e trabalhado com exemplos e exercícios na sedimentação desse conceito.

Foram analisadas as questões da distribuição de cores em uma face, observando que pode ser descrita por um problema de contagem. Nessa análise chegou-se na equação para o número total de microestado possível para o cubo de Rubik.

Outro aspecto relevante, que permitiu se discutir com a turma utilizando-se do cubo, foi a 2ª Lei da Termodinâmica e suas consequências de sua definição, sendo esta verificada pelos alunos após o cálculo da entropia para várias situações na face de um cubo.

A turma corroborou com entusiasmo o método utilizado. Para eles seria a dinâmica da aula, a interação entre os alunos e aprender com o colega tornou o aprendizado mais claro e fácil. Consideraram necessário um tempo maior para apreenderem a resolver o cubo e entenderem com maior clareza, os conceitos apresentados. Para resolver a questão do tempo sugiro dividir a aula em três momentos.

O primeiro momento seria destinado para a discussão dos alunos de como resolverem o cubo, solicitando a instrução por grupo ou pares, de forma que o professor não intervesse nesse momento.

O segundo seria para discutir os conceitos: vetor de cor, a entropia e a distribuição de cores. Nesse momento é fundamental que o professor dialogue com seus alunos evitando dar respostas imediatas, levando o próprio aluno a construir os conceitos.

Por fim, seria colocado o estudo da 2ª Lei da Termodinâmica e suas consequências gerando uma discussão entre os grupos, sendo apresentada a conclusão por um aluno do grupo.

Essa mesma aula foi aplicada para duas turmas do segundo Ano do Ensino Médio da mesma escola, que só conheciam a 1ª Lei da Termodinâmica. Nessa turma, foi necessário um tempo maior na apresentação do cubo, uma vez que nenhum aluno não utilizava o cubo e até mesmo desconhecia a existência do mesmo.

Nessas turmas utilizei os três momentos descritos acima aplicando inicialmente o primeiro momento e solicitando que eles pratiquem em casa a

resolução do cubo. Percebi que foi melhor e a motivação foi maior, uma vez que no segundo momento a maior parte já tinha adquirido maior afinidade com o cubo.

No segundo momento foram discutidos os processos reversíveis e irreversíveis. Foi apresentado e discutido o vetor de cor e através de um exemplo, foi demonstrado como é calculado o vetor de cor para três faces. Na aula seguinte a partir da discussão em grupos chegaram-se ao conceito de entropia, mostrando seu caráter estatístico. A partir da orientação do professor verificou-se como ocorre a distribuição de cores nos cubinhos e definiu-se o número de microestados que se pode atingir com essas cores e os cubinhos das faces. Ao final do conceito foi proposta uma série de exercícios para calcular a entropia, fazendo vários movimentos aleatórios no cubo. Alguns exercícios foram trabalhados em sala de aula e outros foram apresentados como fixação, sendo solicitado para serem resolvidos em casa.

Na aula seguinte foi discutido o conceito da segunda lei e foi discutida a questão da seta do tempo no cubo.

O relato dos alunos confirmou a eficácia da atividade e como se torna mais efetiva a aprendizagem a partir de atividades motivadoras.

Segundo o relato aprender termodinâmica com o cubo foi um pouco difícil no início, mas depois que se interagiram e com o auxílio do colega e a mediação do professor ficou mais fácil e prazeroso. Foi relatado por um dos alunos durante uma aula de um curso PRE-ENEM, que a equação ($S = k \cdot \ln \Omega$) foi mencionada pelo professor, no entanto, segundo ele, não seria discutida e nem trabalhada no Ensino Médio, apenas em alguns cursos de graduação.

Pode-se concluir que o ensino de alguns conceitos de termodinâmica através do cubo de Rubik, trás uma sensação de prazer e motivação para o professor e para os alunos, auxiliando na definição e discussão de alguns conceitos tornando-os mais fáceis de serem compreendidos favorecendo o processo ensino aprendizagem.

Capítulo 5

Considerações finais

A construção de um guia didático surgiu da necessidade pedagógica de elaborar um material de apoio ao professor, que realmente venha auxiliá-lo em sua prática no dia a dia, bem também propor outra estratégia para ensinar conceitos de compreensão difícil para os alunos, tais como entropia e a segunda lei da termodinâmica através de um brinquedo denominado cubo de Rubik.

Na busca de prender a atenção dos estudantes o professor é desafiado a todo instante a utilizar uma metodologia que atrai e motiva o interesse desses estudantes. Nessa perspectiva o cubo de Rubik oferece uma oportunidade ímpar de se aprender alguns conceitos de termodinâmica de forma diferente a abordada nos livros didáticos e na sala de aula pelo professor. Ele permite a física a tornar mais significativa e motivadora, além de desenvolver a habilidade de resolução de problemas e aguçar a curiosidade do estudante.

O cubo de Rubik é um material didático relevante na concepção de estratégias que minimizam a desatenção e facilita a aprendizagem significativa dos estudantes em sala de aula.

Vale ressaltar que a práxis humana não se limita à ação instrumental e que a teoria da ação comunicativa envolve a dimensão da interação, pelo diálogo e pelo convencimento que poderá ajudar no processo de integração. Nesse processo, os educadores, influenciados por novos paradigmas, estão percebendo a necessidade de mudar sua prática pedagógica para que todos os alunos possam aprender os conhecimentos necessários para integração. Portanto, a ideia central do Guia Didático é oportunizar ao aluno à reflexão no processo de ensino-aprendizagem como instrumento de reflexão e crítica em relação ao Cubo de Rubik.

Não é ao todo uma receita, mas algo de concreto que possibilita alunos e professores desencadear interações no âmbito da aprendizagem.

A elaboração do Guia Didático foi muito significativa, porque oportuniza outros olhares e saberes diferentes, e, sobretudo, porque também somos discípulos. Além disso, a questão do Cubo de Rubik não é discutida de forma isolada no interior da sala de aula e no Guia Didático. A proposta é dar ênfase

e abordar o assunto no contexto do ponto de vista do aluno e discutir a relação da teoria com a prática.

Nessa assertiva, o papel da docência no contexto, pressupõe-se sempre de mediação, pois é condição de todo e qualquer processo principalmente quando se coloca nas atividades da educação. Assim, o Guia Didático não se limita a ser mera aplicação mecânica de procedimentos, mas expressa a tese de tentar construir algo que possa contribuir com todos e que certamente não se esgota nesse contexto.

A validação da proposta pode ser observada pela a atenção e curiosidade dos alunos, mesmo por àqueles que nunca tiveram contato com o cubo. Ele proporciona uma aprendizagem significativa e desperta um grande interesse. É importante ressaltar que após aplicação da aula os alunos não deixaram de usar o cubo diariamente, procurando melhorar seus tempos de resolução.

Alguns alunos que não conheciam a técnica de resolução do cubo argumentaram que seria interessante dedicar um tempo maior no ensino da estratégia de resolução do cubo.

O cubo de Rubik é sem dúvida, um brinquedo educativo que contribui e facilita a compreensão da termodinâmica.

Apêndice A

Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange é um método matemático para determinar um ponto de máximo ou mínimo, em uma função contínua, sujeita a uma ou mais restrições.

Consideremos, primeiro alguma função $f(x, y, z)$, uma função contínua das três variáveis independentes x, y, z . Uma vez que a função é contínua, o diferencial total pode ser expresso por:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz \quad (\text{A.1})$$

No máximo (ou mínimo) da função, é necessário que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz = 0 \quad (\text{A.2})$$

Mas, uma vez que as variáveis x, y, z são independente, segue-se que as diferenciais dx, dy, dz são também independentes. Assim, a única maneira que a equação A.2 pode ser satisfeita por tais variações arbitrárias é para todos os coeficientes iguais a zero, de forma idêntica ao máximo. Isso é:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Agora, suponha que em vez disso, as variáveis x, y, z seja algumas independentes, mas sujeitas a algumas restrições:

$$g(x,y,z) = 0 \quad (\text{A.4})$$

De modo que quaisquer duas das três variáveis podem ser escolhidas como variáveis independentes e a terceira depende de acordo com a equação A.4. Neste caso, o argumento que conduz a equação A.3 não é mais válido, embora um máximo ainda é dado pela equação A.2. No entanto, temos agora uma segunda relação:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)dz = 0 \quad (\text{A.5})$$

No ponto máximo. Suponha que multiplicar a última equação por uma constante arbitrária λ e adicionar o resultado à equação A.2, vem:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)dz = 0 \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que quaisquer duas variáveis podem ser selecionadas como independentes, vamos escolher dx e dz arbitrariamente. Isto, naturalmente, requer que dy seja dependente. Portanto, escolher o valor de λ tal que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

no máximo. Tendo selecionado tal valor para λ , a única maneira que a equação A.6 pode ser identicamente nula para qualquer dy e dz arbitrários é se seus coeficientes forem nulos. Então:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Da mesma forma, quaisquer duas variáveis podem ser tomadas como independentes; em seguida, o multiplicador de Lagrange indeterminado λ é escolhido de modo a tornar o coeficiente da variável dependente igual a zero. O argumento subsequente é então análogo, e as equações A.7, A.8, A.9 os resultados são os mesmos.

Nós consideramos aqui o caso simples de uma função, mas sujeita a um multiplicador indeterminado. Este método pode ser facilmente estendido para determinar o máximo de uma função de um número qualquer de variáveis em qualquer número de restrições. Por exatamente o mesmo procedimento e os mesmos argumentos inteiramente análogo. O número resultante de multiplicadores é encontrado como sendo igual ao número de equações de restrição.

Um exemplo simples é um elétron numa caixa tridimensional que em mecânica quântica consiste em achar os níveis de energia de uma partícula quântica de massa m , dentro de uma caixa de paredes impenetráveis, na forma de um paralelepípedo de arestas a , b e c . A partir da equação de Schrödinger independente do tempo, com as condições de contorno apropriadas (a função de onda tem nós nas paredes da caixa), pode-se mostrar que a energia do estado fundamental é dada por:

$$E(a,b,c) = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \quad (1)$$

Desejamos encontrar os valores de a , b e c que minimizam a energia do elétron, sujeito ao vínculo de que o volume V_0 da caixa seja dado:

$$V(a,b,c) = abc = V_0 \quad (2)$$

De modo que a equação de vínculo seja,

$$\varphi(a,b,c) = abc - V_0 = 0 \quad (3)$$

correspondente a um multiplicador de Lagrange λ .

As condições de mínimo para a energia são, portanto:

$$\frac{\partial E}{\partial a} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\frac{h^2}{4m} \frac{1}{a^3} + \lambda bc = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial b} = -\frac{h^2}{4m} \frac{1}{b^3} + \lambda ac = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{h^2}{4m} \frac{1}{c^3} + \lambda ab = 0 \quad (6)$$

Multiplicando (4) por a , (5) por b e (6) por c , obtemos a seguinte relação:

$$\lambda abc = \frac{h^2}{4m} \frac{1}{a^3} = \frac{h^2}{4m} \frac{1}{b^3} = \frac{h^2}{4m} \frac{1}{c^3}$$

que é identicamente satisfeita se $a = b = c$, ou seja, o paralelepípedo reduz-se a um cubo de aresta a . O multiplicador de Lagrange é:

$$\lambda = h^2/4ma^5$$

Referências

- [1] Santos,Z.T.S dos **Conteúdo de Entropia na Física do Ensino Médio: Análise do material didático e abordagem histórica.** Holos-ISSN 1807 -1600, V3, p.75-84,2009
- [2] Lambert, Frank. Disorder – Cracked crutch for Supporting Entropy Discussions. **Journal of Chemical Education.** Vol 49, nº.2, Feb, 2002. p. 187-192.
- [3] Zamorano, Raul O.; Gibbs, Horácio M.; Maio, Lucrecia E; Viau, Javier E. Evaluación de um modelo didático analógico para el aprendizaje de energia interna e temperatura. **Revista Eureka** - sobre enseñanza e divulgación de las ciências. Ano 3, vol.3, 2006. p.392-408.
- [4] Oliveira, P.M.C; Dechonm,K. **Facilitando a compreensão da Segunda lei da Termodinâmica.** Revista Brasileira de Ensino de Física, V. 25,n 4,Dezembro,2003, p359-363.
- [5] Styer, Daniel F. Insight into Entropy. **American Journal of Physics**, ano 68, vol.12, 2000.p.1090-1096.
- [6] Ostermann,F.;Ferreira,L.M.; Cavalcante,C.J.H. **Física na escola 2**, Revista Brasileira de Ensino de Física. 20,3(1998).
- [7] Elshout,J.J and Veenman,M.V.J. Relation between intellectual ability and working method as predictors of learning. The Journal of Educational Research, 85(3):134-143, 1992.
- [8] Styer, Daniel F. **Getting there is half the fun.** American Journal of Physics, 66: 105-106, 1998.
- [9] Heller, Patricia and Hollabaugh, Mark. **Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups.** American Journal of Physics, 60(7): 637-644, 1992.
- [10] Polya, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2, 1978.
- [11] Borko, Hilda; Eisenhart, Margaret; Brown, Catherine A; Underhill, Robert G; Jones, Doug, and Agard, Patricia C. **Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily.** Journal for research in mathematics education, 23(3):194-222, 1992.
- [12] Silva, G.R.da; Anjos, P.H.dos. Anjos. **Cubo de Rubik: Uma ferramenta para o ensino de Física.** Semana da Física UFG, Campus Catalão. 2014.

- [13] Marx, George; Gajzago, Eva; and Gnadig, Peter. **The universe of rubik's cube**. European Journal of Physics, 3(1):39, 1982.
- [14] Joyner, D. **Adventures in group theory: rubik's machine & other mathematical toys**. The Mathematical Intelligencer, 27(2):92-92,2005.
- [15] Salinas, R.A.S. **Introdução à Física Estatística** São Paulo: Editora Universitária de São Paulo,1997
- [16] Stariolo D.A. **Mecânica Estatística** Programa de pós-graduação em Física- Instituto de Física- Universidade Federal do Rio Grande do Sul,2014
- [17] Callen, H.B; Wiles&Son, J. **Thermodynamics and introduction to Thermostatistics**, second edition
- [18] Tipler,P.A. **Física**, quarta edição,LTC
- [19] Souza, Paulo Victor S.; Penha, M. Cardozo Dias; dos Santos, Filipe M.P., Ensinando a natureza estatística da segunda lei da termodinâmica no ensino médio. Revista Brasileira de Ensino de Física, V.35, n2, 2502(2013)
- [20] JOHNSTONE, A. H.; MACDONALD, J. J.; WEBB, G. Misconceptions in school thermodynamics. **Physics education**, v. 12, n. 4, p. 248, 1977.
- [21] REIF, Frederick. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. Waveland Press, 2009.
- [22] CLAUSIUS, Rudolf. **On several convenient forms of the fundamental equations of the mechanical theory of heat**. Philosophical Magazine and Journal of Science, 1865.