

MNPEF
Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão - Unidade Acadêmica Especial de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

PRODUTO EDUCACIONAL

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A INSERÇÃO DE ELEMENTOS DE
ESTATÍSTICA COMO ORGANIZADORES PRÉVIOS EM CONCEITOS BÁSICOS DE
TERMODINÂMICA

Luciano Ferreira Silva

Catalão-GO, janeiro de 2020.

SUMÁRIO

Apresentação	2
Introdução	3
Proposta de Sequência Didática	4
1. Aplicação de Avaliação Diagnóstica a partir de pré-testes conceituais	4
2. Introdução teórica	5
3. Experimentos	17
4. Simulações	32
5. Aplicação de pós-testes conceituais	39
6. Considerações finais	40
7. Referências Bibliográficas	41
APÊNDICE A - Questões para pré-testes e pós-testes.	43
APÊNDICE B - Experimento 1 - Lançamento de Moedas	46
APÊNDICE C - Experimento 2 - Lançamento de Dados	48
APÊNDICE D - Experimento 3 - Caminho Aleatório	50
APÊNDICE E - Papel quadriculado para atividade do caminho aleatório	53

Apresentação

Prezado Colega,

O presente material foi elaborado no intuito de possibilitar a aplicação de uma sequência didática que possa subsidiar, sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa de Ausubel, organizadores prévios necessários à compreensão introdutória de conceitos estatísticos aplicáveis ao estudo de Termodinâmica. A proposta consiste de três etapas: em um primeiro momento serão expostos aspectos históricos da evolução dos conceitos termodinâmicos, o método indutivo e a sua aplicação enquanto metodologia científica e, em sequência, conceitos básicos de estatística; a segunda etapa é essencialmente composta de três atividades experimentais onde são introduzidos de forma prática, conceitos elementares de estatística; na sequência, a terceira etapa traz a utilização de simuladores em Java cujo objetivo é expandir os conceitos suscitados na segunda etapa. Por fim, buscar-se-á vincular os conceitos propostos nas atividades anteriores às grandezas termodinâmicas conforme o conteúdo majoritariamente proposto no currículo de Ensino Médio.

Esta sequência, além de buscar fornecer subsídios que contribuam com a aprendizagem significativa de alguns conceitos da Termoestatística, visa complementarmente, proporcionar ao aluno aprendiz a imersão no processo científico, oportunizando, sobretudo, que possam comparar os resultados propostos teoricamente e os obtidos de forma experimental.

As atividades experimentais são realizadas com material de baixo custo e facilmente encontrados e os simuladores são acessíveis, sendo necessário além dos acessórios que abaixo elencamos, um computador com o pacote Java instalado, para demonstração.

A utilização de recursos disponíveis proporcionando um ambiente interativo e investigativo em sala de aula tendem a ser um diferencial frente a dificuldades que se apresentam no desenvolvimento e implementação do processo de ensino aprendizagem.

Este material, longe de trazer a pretensão de ser abrangente e definitivo, visa esperançosamente, facilitar a aproximação do estudante com a Ciência, do incremento na interação professor-aluno e como alternativa ao modelo expositivo tradicional que, por sua conveniência, traduz-se em zona de conforto nem sempre favorável ao ambiente criativo e dialógico.

Introdução

Neste trabalho propomos um produto educacional cujo objetivo é possibilitar a aplicação de uma proposta metodológica para a inserção de elementos de estatística como organizadores prévios em conceitos básicos de termodinâmica.

Neste viés, este projeto foi planejado para ser realizado essencialmente com material de baixo custo em ambiente acessível a professores e alunos. Particularmente, o que foi adquirido no comércio local foram os dados (não viciados) utilizados na atividade 2, bem como o material emborrachado conhecido como tela antiderrapante (figura 6) usado como complemento (dispensável) à superfície plana e horizontal tida como suporte, tanto para o lançamento de moedas quanto dos dados.

De maneira alternativa, como superfícies que sirvam de suporte aos lançamentos, podem ser utilizadas mesas de leitura, mesas de plástico, mesas improvisadas e até mesmo, desde que limpo e organizado, o piso do ambiente físico.

As moedas a serem utilizadas propõe-se que sejam as encontradas com maior facilidade. Sugere-se por questão de praticidade a utilização de um único tipo de moedas (de cinco ou dez centavos). A semelhança entre as moedas pode facilitar a identificação de suas faces pelos alunos, proporcionando agilidade nas anotações das informações obtidas.

Complementarmente, foram utilizadas planilhas impressas em folhas de papel A4, canetas hidrocor, um computador ou notebook com acesso à internet e um meio de reprodução de imagens dos simuladores. Podem ser utilizados tanto um conjunto projetor/tela de projeção (datashow) quanto uma tela/monitor de dimensão suficiente a possibilitar uma visualização confortável das imagens, por parte dos estudantes.

É prudente que o professor opte por trabalhar com turmas com quantitativo reduzido de alunos, tanto quanto possível. A experimentação em sala de aula pode exigir do professor dedicação redobrada de modo que os grupos possam desenvolver as atividades propostas em toda sua plenitude e em um intervalo de tempo que não extrapole a uma hora-aula, em média. Neste projeto especificamente, foi possível trabalhar confortavelmente com grupos de 20 alunos e com uma carga horária de 12 aulas.

Não obstante, haja vista a disponibilidade de carga horária suficiente e de espaço físico adequado, pode-se ter um efetivo maior de alunos bem como maior interatividade entre os mesmos.

Ademais, o conhecimento nunca é alcançado de forma pronta e imutável de modo que o professor aplicador possui a plena liberdade de adequar o produto à realidade própria em todas as suas particularidades.

Proposta de Sequência Didática

Objetivando a aplicação da Sequência Didática, enquanto produto educacional projeto deste trabalho, planejamos sua execução a partir da utilização de uma aula semanal com duração média de 45 minutos em um total de 12 aulas previstas, conforme a seguinte distribuição:

Aula	Atividade
1	Aplicação de Pré-teste conceitual
2	Introdução e abordagem histórica da Termologia e metodologia científica
3	Conceitos elementares de Estatística
4	Atividade 1 – Lançamento de Moedas
5	Análise da Atividade 1, exposição e análise de resultados
6	Atividade 2 – Lançamento de dados não viciados
7	Análise da Atividade 2, exposição e análise de resultados
8	Atividade 3 – Random Walk em duas dimensões
9	Análise da Atividade 3, exposição e análise de resultados
10	Simulação – Lançamento de moedas
11	Simulação – Caminho aleatório em duas dimensões
12	Aplicação de Pós-teste conceitual

1. Aplicação de Avaliação Diagnóstica a partir de pré-testes conceituais

O objetivo deste tópico é diagnosticar os conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos em relação aos conceitos elementares de Termologia. Com isso procura-se identificar elementos que possam ser utilizados como subsunçores dentro da perspectiva da Aprendizagem Significativa.

A fim de atingir o propósito descrito, utilizaremos um questionário investigativo (Anexo 1) composto de vinte perguntas de múltipla escolha, contendo cada uma delas três alternativas das

quais uma proposição é correta e duas são incorretas. Para evitarmos escolhas aleatórias não fundamentadas, é solicitado aos alunos, após cada questão, a justificativa de sua escolha.

O teste abordará o conhecimento acerca de conceitos relativos à existência do calor, sua natureza, formas de propagação, bem como sua relação com a temperatura e a massa. Além desses conceitos, também será possível diagnosticar a compreensão dos alunos em conceitos que envolvem a velocidade de partículas, sua energia cinética, o trabalho realizado por estas ou sobre estas, a variação da energia interna e as transformações termodinâmicas.

2. Introdução teórica

2.1 O método indutivo e os conceitos termodinâmicos iniciais

A percepção dos fenômenos

Advindo de nossas próprias percepções a sensação de quente e frio, por certo ponto, pode nos parecer trivial. Essa observação advém do fato de que, normalmente, podemos, através dos sentidos, sermos capazes de perceber o mundo no qual estamos inseridos. No livro “Filosofia da Educação”, Henrique Nielsen Neto define a percepção da seguinte forma:

É o ponto de partida do nosso conhecimento do mundo. Percebendo tudo que está a seu redor (fatos e coisas). E os estímulos destes fatos e coisas ativam os órgãos dos sentidos. Quando um indivíduo já está ou entra num ambiente qualquer, o que ele sente diante de si constitui uma forma de conhecimento: isto é a percepção. (Neto, 1988)

No entanto, podemos admitir que a percepção de quente e frio através dos sentidos, nos remete aos conceitos iniciais acerca de temperatura. Segundo Hans Christian Von Baeyer, “A sensação de quente ou de calor é uma experiência curiosa, difícil de descrever com palavras, e, de certa forma, diferente de outras sensações” (Von Baeyer, 1994).

Ainda, segundo Von Baeyer, à medida que são apresentadas as medidas para transformar qualidades em quantidades, há uma passagem da especulação filosófica sobre a natureza física do calor para permitir o início de uma formulação de teoria científica. A observação de outros fenômenos relacionados à mudança de temperatura, como por exemplo, a dilatação, já no século XVII, proporciona o desenvolvimento do termômetro.

Figura 1: Termoscópio de Galileu



Fonte: do próprio autor

Tal invenção favorece o aumento da precisão das medidas e a possibilidade de reproduzir, com maior correção, fenômenos térmicos anteriormente percebidos. Com isso, conceitos são aperfeiçoados e distinguidos. Há uma maior atenção em nomear as transformações físicas da matéria como também, em perceber suas causas e as consequências da interferência humana.

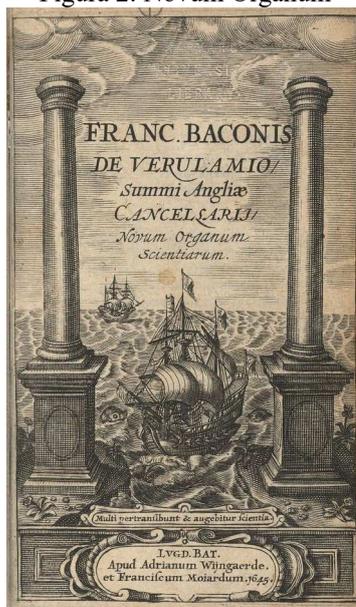
Tem-se a ideia de que os desbravadores da Termometria não tinham, de forma clara, o entendimento das grandezas que se dispunham a medir. De forma empírica, avançavam entre erros e acertos. E, dada a preocupação de um significativo número de pessoas obcecadas em resolver problemas relacionados à temperatura, os avanços se tornavam mais consistentes e aplicáveis.

O método indutivo

O método indutivo, que pode ser chamado simplesmente de indução, constitui-se de uma linha argumentativa utilizada com o propósito de se chegar a uma conclusão, sendo utilizada em diversas áreas de conhecimento. De modo simplificado, a indução acrescenta informações novas em premissas que foram fornecidas antecipadamente. Dessa forma, sendo utilizado principalmente no estudo das Ciências, parte de premissas verdadeiras para se chegar a conclusões que podem, ou não, serem verdadeiras. Sobre certo viés, pode-se afirmar que o método indutivo sugere a verdade, mas não a garante.

No século XVII, o filósofo inglês Francis Bacon (1561-1626), lança as bases para a criação do método indutivo. Coligado à ideia de empirismo, tal método se propõe a investigar fatos a partir da observação dos fenômenos ocorrentes na natureza. Para tanto, o método indutivo exige que, primeiramente, os cientistas façam observações. A partir de então, formem uma teoria para explicar o que foi observado. E, enfim, teste a validade de suas respostas a partir de experimentos.

Figura 2: Novum Organum



Fonte: Wikipédia. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Novum_Organum#/media/Ficheiro:Houghton_EC.B1328.620ib_-_Novum_organum_scientiarum.jpg. Acesso em 14/06/2018

A proposta de Bacon se desvencilha de Aristóteles e Platão pelo fato desses últimos não se atentarem à experimentação. Faltavam a eles a praticidade e aplicabilidade. Pela inexistência dos experimentos, eram falhas suas conexões com o mundo real.

Como contraponto, durante o Iluminismo francês, a interpelação de Bacon à ciência acaba por se tornar mais influente que a abordagem dualista fornecida por Descartes. De forma diversa, Francis Bacon sortiu sua vida entre a contemplação filosófica e a empolgação da vida pública. Para ele, a dedicação exagerada aos estudos, sem uma finalidade prática, era pura vaidade acadêmica, ao passo que os estudos não poderiam ser um fim em si mesmo, aduzindo que os verdadeiros sábios são capazes de utilizar os conhecimentos de maneira prática, indicando uma visão pragmática para a ciência e a filosofia (OLIVEIRA, 2002).

Ao examinar a natureza do calor, Bacon explica em sua obra (BACON, 2000), como seu método deve ser aplicado. Para tanto, cria duas tabelas: a primeira, enumerando as várias circunstâncias em que encontramos calor, esta é denominada “Tabela de Essência e Presença”; Na segunda, que é nomeada como “Tabela de Desvio, ou de Ausência na Proximidade”, ele enumera as circunstâncias que se parecem com as da primeira tabela, exceto pela ausência de calor. Partindo de uma análise (do), que ele chama de naturezas (cor, emissão de luz, dureza, flexibilidade etc.) dos itens nestas listas, somos levados a conclusões sobre a causa do calor. Ou seja, as naturezas que estão sempre presentes na primeira tabela, mas nunca na segunda, são consideradas como a causa do calor.

Ao afirmar que o homem é “o ministro e intérprete da natureza”; que “o conhecimento e o poder humano são sinônimos”; que “os efeitos são produzidos por instrumentos e ajudas”; que “o homem enquanto opera só pode se inscrever ou retirar corpos naturais, a natureza realiza internamente o resto”; e que “a natureza só pode ser comandada obedecendo-a”, Bacon nos sugere a síntese de sua filosofia: que pelo conhecimento da natureza e pelo uso de instrumentos, o homem pode governar ou direcionar a natureza para produzir resultados definitivos.

Assim, ao buscar o conhecimento da natureza, o homem alcança poder sobre ela – e assim, o restabelecimento do “Império do Homem sobre a criação”, que havia sido perdido pela queda junto com a pureza humana original.

O calor como energia

De forma leiga, os conceitos de temperatura e calor, são praticamente utilizados indistintamente. Simplificando, enquanto o primeiro se refere à intensidade do nível de agitação das partículas que compõem um sistema, sendo medido a partir de um termômetro, o segundo, menos passível de observação direta, mede sua quantidade enquanto relacionado, principalmente, à massa de substâncias envolvidas tanto nas mudanças de temperatura dos corpos ou sistemas quanto nas alterações provocadas no estado físico da matéria, objeto da observação.

Na ânsia de sanar a preocupação dos cientistas do século XVIII, quanto a essa distinção, o sucesso da teoria do fluido ao explicar a eletricidade ensejou sua transposição para o calor. À época, o calor era visto como um fluido invisível, uma substância material que fluía de um corpo para

outro. O fato é que a teoria proposta, acompanhada da confusão existente entre calor armazenado (energia interna) e calor radiante, se sucumbira aos testes experimentais e teóricos que lhes foram impostos (Von Baeyer, 1994).

A natureza do calor começa a se mostrar evidente a partir da experiência relatada por Benjamim Thompson, o Conde de Rumford, realizada na última década do século XVIII. Na ocasião, foi observado que ao furar o metal de um canhão com uma broca, havia produção calor, provocando a elevação de temperatura. Não obstante à situação, que já fora observada anteriormente, o Conde de Rumford concluiu que o calor não poderia ser um fluido, pois, com a continuidade do experimento, uma substância material, tendo sua origem quer seja no canhão, quer seja na furadeira, acabaria por se esgotar e deixar de fluir.

Nas palavras de Rumford (Von Baeyer, 1994),

“Qualquer coisa que qualquer corpo isolado, ou sistema de corpos, possa continuar a fornecer, ilimitadamente, não tem possibilidade de ser uma substância material; e me parece extremamente difícil, se não totalmente impossível, formar qualquer ideia clara, de qualquer coisa, capaz de ser acionada e transmitida da forma como o calor o foi nessas experiências, a não ser que seja movimento.”

De forma pioneira, o calor era relacionado ao movimento dinâmico. A ideia se revigora quando associada à teoria atomística da matéria, propondo que o calor seria atribuído às vibrações aleatórias dos átomos e moléculas que compõem as substâncias.

Embora a experiência relatada tenha envolvido corpos sólidos, estender a teoria para os fluidos soou bastante pertinente, principalmente, quando aplicada aos gases. Ao ser comprimido em um recipiente fechado, por exemplo, o gás exerce uma pressão que pode ser interpretada como consequência da existência da quantidade de colisões das suas partículas com as paredes do recipiente. Com o aquecimento do gás, essas partículas se movimentam com maior velocidade, colidindo com as paredes com mais intensidade que antes, e, conseqüentemente, aumentando a sua pressão. De forma simples, e por que não dizer simpática, a teoria cinética conjuga duas ideias fundamentais da Física: a hipótese atômica e o conceito de movimento. E, como veremos a simplicidade tem se tornado uma das importantes chaves para a compreensão dos fenômenos termodinâmicos.

Interessante se faz perceber que, a forma com que a Termodinâmica se aperfeiçoa, se conecta com a necessidade da humanidade em buscar desenvolvimento científico e tecnológico. Em

como, a evolução dos conceitos almeja integrar-se a necessidade de obter resultados práticos. Paradigmas são apresentados, a ciência é buscada e alçada a ser a transformadora de um modelo econômico e social. Como nem todos os problemas são resolvidos, é estabelecido um conflito que servirá de motivador à busca de novas teorias e concepções, proporcionando a evolução do conhecimento e o desenvolvimento de novas aplicações tecnológicas.

Neste viés, Thomas Kuhn (1922-1996), procura demonstrar que as ciências, além de serem construções humanas, o são, em consequência, construções históricas e sociais. O físico argumenta que: “Talvez a ciência não se desenvolva pela acumulação de descobertas e invenções individuais...” (KUHN, 1997). Evidente se torna a percepção de que a ciência se desenvolve de forma coletiva, conjunta, sem individualizar conquistas e sem desmerecer as valorosas contribuições dos predecessores (1997, p.21):

Quanto mais cuidadosamente estudam, digamos, a dinâmica aristotélica, a química flogística ou a termodinâmica calórica, tanto mais certos tornam-se de que, como um todo, as concepções de natureza outrora correntes não eram nem menos científicas, nem menos o produto de idiosincrasias do que as atualmente em voga.

No tocante à Termodinâmica, assim como a toda ciência, seu desenvolvimento não acontece de forma linear, como um somatório de saberes ou um enfileiramento de compêndios ou uma sequência de conceitos. Mas, sobretudo, uma emaranhada relação entre fatos, teorias, dados e paradigmas.

No conceito vanguardista encabeçado por Antoine Laurent de Lavoisier, conscrita a ideia do “nada se cria, nada se perde, tudo se transforma” e suas consequências no processo de combustão e oxidação, Julius Robert von Mayer (1814-1878), lança as bases para o Princípio da Conservação da Energia e, conseqüentemente, o Primeiro Princípio da Termodinâmica. Relacionando-a ao calor gerado pelos efeitos mecânicos nos seres vivos, o calor corporal e os alimentos ingeridos, Mayer (1851, apud MARTINS, 1984, p.66) concluiu que “o calor produzido organicamente pelo organismo deve manter uma relação quantitativa invariável para com o trabalho gasto em sua produção”, estendendo este conceito não só para os organismos vivos, mas para qualquer tipo de sistema existente na natureza.

E Martins complementa (1984, p.66):

Mayer procura estabelecer que o calor produzido pelo atrito de dois sólidos é proporcional ao trabalho mecânico utilizado; sugere que nas máquinas a vapor há uma conversão de calor em trabalho; e calcula, a partir das propriedades dos gases,

o valor do equivalente mecânico do calor, chegando a um valor numérico que pode ser expresso como $1 \text{ cal} = 3,6 \text{ J}$. Mayer não tenta explicar o calor como uma forma de movimento, mas adota uma concepção muito mais geral: ele admite que o calor, o movimento (energia cinética) e a força de queda (energia potencial) são diferentes formas de uma mesma coisa, mas que essa coisa – a força em abstrato – não é propriamente, nenhuma dessas três coisas.

Admiravelmente, a abstração apresentada por Mayer se assemelha ao que temos como conceito moderno de energia.

A hipótese do calor como uma modalidade de energia provocou muitas discussões entre os cientistas do século XIX. Buscando sua confirmação, experiências foram propostas tendo em vista a confirmação das suposições de Rumford. Tais experimentos, sobretudo o de James Prescott Joule (1818-1889), acabaram por estabelecer, definitivamente, que o calor era uma forma de energia e tornando lei, as transformações de energia em suas diversas modalidades. Ou seja, a energia é conservada em qualquer processo quando se é levado em conta o calor, a compreensão do processo de mecanismo pelo qual um sistema altera suas variáveis ou propriedades termodinâmicas.

Sintetizando, a primeira lei da termodinâmica estabelece que a variação de energia interna de um sistema é equivalente à diferença entre o calor trocado com a vizinhança e o trabalho realizado pelo sistema ou sobre o sistema, denotando a possibilidade de conversão de uma modalidade de energia em outra. Ademais, a lei, por não fornecer o sentido do fluxo, não restringe as possibilidades de conversão de energia.

Nota-se que o desenvolvimento da Termodinâmica esteve vinculado às máquinas que tocaram a revolução Industrial. Neste crescente, Willian Tompson Kelvin (1824-1907) e Rudolf Clausius (1822-1888), desenvolveram a segunda lei da Termodinâmica, a partir das ideias de Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832), sobre os fundamentos das máquinas térmicas, ciclos termodinâmicos e processos reversíveis.

Clausius formula a relação entre fluxo de calor e trabalho mecânico e ainda, introduz o conceito de entropia, tornando claro que o calor não era nenhum fluido misterioso, mas uma modalidade de energia térmica. Sua formulação para a segunda lei da termodinâmica ficou assim, enunciado (Clausius, 1850):

“Nenhum processo pode ter como único efeito transferir calor de um corpo para outro a uma temperatura mais elevada que a dele.”

Lord Kelvin, ao estudar as máquinas que trabalhavam segundo o ciclo de Carnot, percebia que parte do calor absorvido do reservatório quente era liberada para o reservatório frio e conseqüentemente impossibilitando uma eficiência de 100%. Então, em 1851, Kelvin expressa pela primeira vez seu enunciado para a segunda lei da Termodinâmica, sendo que o mesmo, mais tarde, foi refinado por Max Planck (1858-1947) proporcionando o que hoje conhecemos como enunciado de Kelvin-Planck da segunda lei da Termodinâmica:

“Nenhum processo pode ter como único efeito a retirada de calor de uma fonte a uma temperatura fixa e a realização de um trabalho equivalente.”

Irrefutavelmente, pode-se mostrar que os dois enunciados são equivalentes. Fazemos isso, mostrando que a contradição de um enunciado implica na contradição do outro e vice-versa.

Além da proposição para a segunda lei da Termodinâmica, tanto Clausius quanto Kelvin, provaram o teorema de Carnot, segundo o qual nenhuma máquina térmica que opere entre um reservatório quente e um reservatório frio (em relação ao considerado quente) pode ter rendimento maior que o de um ciclo de Carnot.

Sinteticamente, a Segunda Lei da Termodinâmica determina o sentido e a direção de um processo, estabelece o estado final de equilíbrio, define a execução ideal para as máquinas de conversão de energia além de determinar a possibilidade de reversibilidade do processo, ao estabelecer que trabalho seja sempre diretamente convertido em calor, sem, no entanto, encontrar reciprocidade.

Posteriormente, Clausius numa formulação alternativa da segunda lei da termodinâmica, sem fazer menção às máquinas térmicas, definiu a função a qual chamou de entropia. Notou-se que a mesma se conserva em todas as transformações reversíveis e aumenta nas irreversíveis. Ele argumentou que qualquer ciclo reversível pode ser aproximado com precisão arbitrária por uma sucessão de ciclos de Carnot. Através da combinação de alguns ciclos, ele demonstrou que o valor da transformação para um fluxo de calor poderia ser reduzido para a mesma forma, qual seja, estabelecendo que “os valores de transformação poderiam ser somente uma função universal do calor e temperatura, $Q_f(t)$ e $Q_{1F}(t_1, t_2)$ ”, como uma conversão de calor em trabalho (Barbarini, 2018).

Dessa forma, cada troca de calor poderia ser tratada igualmente e ao estabelecer que “a soma dos valores de transformação para seu ciclo era simplesmente a soma de $Q_f(t)$ em todas as temperaturas e, desde que o ciclo consistisse de uma transformação mais o inverso de seu equivalente” (Barbarini, 2018) para qualquer ciclo reversível, Clausius cria uma nova função de estado o qual denominou de entropia. Adiante, em 1877, Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) estabelece o vínculo entre o teorema de Clausius sobre o aumento da entropia e a probabilidade de estado de um sistema, proporcionando, então, a interpretação estatística da entropia.

A partir de então, as bases da Termodinâmica foram aprofundadas e fortalecidas. Seus conceitos operativos buscam fundamentar-se na oportunidade, desordem, aleatoriedade e probabilidade.

O ato aleatório de jogar uma moeda, por exemplo, não nos dá a certeza do resultado, pois, o mesmo não pode ser previsto independente de quantas vezes a mesma tenha sido jogada. No entanto, à medida que aumentamos o número de jogadas, pode-se afirmar que, em aproximadamente metade das vezes, o resultado poderá ser “cara” ou “coroa”. Segundo Von Baeyer (1994, p.175),

A Física procura descobrir as regularidades no comportamento da matéria. A Atomística a desmembra em inúmeras partículas que, segundo a Teoria do Calor, estão em movimento aleatório. A Estatística resgata a ordem em um nível diferente na hierarquia da análise e viabiliza a ciência exata da Termodinâmica.

De forma específica, aplica-se a Estatística à distribuição de posição e velocidades das moléculas de modo que a aleatoriedade desses atributos constitua a base hipotética da Teoria Cinético Molecular da Matéria.

Conhecer a natureza, dominar seus segredos, desenvolver tecnologia, promover a evolução da sociedade. Com o desenvolvimento deste trabalho, pretende-se observar que a ciência e, sobretudo a Termodinâmica, não progrediram como resultado de esforços individuais e que seu desenvolvimento não acontece de forma linear. A sociedade constrói o conhecimento. As contribuições para tal, podem até nascer de percepções individualizadas dos fenômenos naturais, mas adquirem robustez ao ser socializada, estabelecida como paradigma, posta em discussão, criticada, aperfeiçoada e aplicada na viabilização de uma sociedade melhor.

2.2 Conceitos básicos de probabilidade e estatística

Partindo de uma abordagem transdisciplinar, pode-se afirmar que a matéria é composta por partículas (átomos, moléculas etc.) sendo possível descrever suas propriedades físicas, usando de um sistema macroscópico a partir da análise do comportamento médio das partículas que compõem esse sistema (SALINAS, 2013, p.41). Desta forma, a partir do cálculo de valores médios das grandezas relacionadas às partículas, torna-se possível obter importantes informações acerca do sistema observado.

Para que possamos determinar os valores médios das grandezas envolvidas se faz necessário a definição de conceitos estatísticos. Para o proposto no projeto em tela, será necessário definirmos os seguintes conceitos:

a) Ponto amostral (p): é qualquer resultado possível em um experimento aleatório.

Como exemplo, considerando o lançamento de uma moeda, o resultado possível pode ser cara ou coroa.

b) Espaço amostral (E): é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Do exemplo anterior, $E = (cara, coroa)$

c) Evento simples (i): têm-se como resultado de um experimento.

d) Frequência (F_i): é a razão entre o número de vezes que o evento i ocorreu (n_i) e o número total de experimentos (N).

$$F_i = \frac{n_i}{N}$$

Exemplo: Em 20 moedas lançadas foram observadas a incidência de 12 caras. Assim a frequência do resultado específico “*cara*” é dado por:

$$F_i = \frac{12}{20}$$

que resulta $F_i = 0,6$ ou $F_i = 60\%$

e) Probabilidade da ocorrência de um evento i (P_i): é obtida a partir da razão entre resultado favorável, $n(p)$ e o número de resultados possíveis, $n(E)$.

Continuando no exemplo do lançamento de moedas, a probabilidade de obtermos o resultado “**cara**” é:

$$P_i = \frac{n(p)}{n(E)}$$

Assim, como $n(p) = 1$ (**cara**) e $n(E) = 2$ (**cara** ou **coroa**), temos que

$$P_i = \frac{1}{2}$$

então, $P_i = 0,5$ ou $P_i = 50\%$.

Outrossim, podemos escrever a definição matemática de probabilidade como sendo:

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(N)}{N}$$

onde n_i é o número de eventos simples e N é o número total de experimentos.

f) Propriedades da probabilidade:

A probabilidade (P_i) da ocorrência de um evento i é sempre maior ou igual a zero.

$$P_i \geq 0$$

A soma das Probabilidades (P_i) de cada evento possível ocorrer é igual a 1, ou seja, 100%.

$$\sum_i P_i = 1$$

g) Medidas de dispersão

As medidas de dispersão são utilizadas para indicar o quanto os dados estão dispersos em torno de uma região central¹.

g1) Amplitude (H): A amplitude ou intervalo total é calculado tomando-se os valores extremos do conjunto de dados.

Pode ser calculada a utilizando-se a expressão $H = x_1 - x_n$ onde,

H é a amplitude

x_1 é o primeiro valor

x_n é o último valor

g2) Desvio (D_i): O desvio é utilizado para medir a dispersão entre uma variável em relação à medida de tendência central e pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$D_i = x_i - M_A$$

onde,

D_i é o desvio;

x_i é uma variável qualquer;

M_A é a média aritmética dos dados.

g3) Desvio médio (D_M): O desvio médio é calculado tomando-se a diferença de uma variável pela média e serve para indicar qual a distância de cada elemento da amostra ao seu valor médio.

Para o seu cálculo, podemos utilizar a expressão: $D_M = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_A)}{n}$

onde,

D_M é o desvio médio;

x_i é um valor qualquer no conjunto de dados não posição i ;

M_A é a média aritmética;

n é o total dos dados do conjunto.

g4) Desvio padrão (D_P): O desvio padrão é utilizado para calcular a uniformidade do conjunto de dados e pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

¹ Definições adaptadas a partir de consulta realizada ao portal **matematicabasica.net**, disponível em <https://matematicabasica.net/estatistica/>, acessado em 03/11/2019.

$$D_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_A)^2}{n}}$$

onde,

D_p é o desvio padrão;

x_i é um valor qualquer no conjunto de dados não posição i ;

M_A é a média aritmética;

n é a quantidade total dos dados do conjunto.

g5) Variância (V): A variância é utilizada para indicar o quanto disperso os dados estão da média e pode ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_A)^2}{n}$$

onde,

V é a variância;

x_i é um valor qualquer no conjunto de dados não posição i ;

M_A é a média aritmética;

n é a quantidade total dos dados do conjunto.

3. Experimentos

Esta parte da sequência didática é composta da realização de três atividades que visam a compreensão de noções elementares de estatística utilizando de experimentos simples.

As atividades devem ser desenvolvidas em grupos com quantitativo entre quatro e cinco alunos. Sugere-se a utilização de mesas ou bancadas que possam comportar o trabalho em grupo.

3.1 Lançamento de moedas

Para a coleta de dados e resposta aos questionamentos pertinentes à atividade utilizaremos o roteiro denominado Experimento 1 – Lançamento de moedas, constante no Anexo 2.

Cada grupo recebe 20 (vinte) moedas idênticas e devem efetuar duas seqüências de lançamentos:

Figura 3: Preparação para a seqüência de lançamento de moedas



Fonte: do próprio autor

a) primeira seqüência: 20 (vinte) lançamentos de 10 (dez) moedas;

A primeira seqüência tem por objetivo familiarizar o grupo com a atividade além de provocar a observação quanto a distribuição de tarefas que envolve tanto a coleta de dados quanto o lançamento propriamente dito.

Orienta-se aos alunos, distribuídos em grupos de quatro ou cinco componentes a lançar, simultaneamente, dez moedas. Conforme se efetivam os lançamentos os mesmos são lançados na tabela própria.

Tabela 1: Referente à segunda sequência de lançamentos de moedas

Primeira Sequência					
20 lançamentos de 10 moedas					
Lançamentos	CARA	COROA	Lançamentos	CARA	COROA
L1			L11		
L2			L12		
L3			L13		
L4			L14		
L5			L15		
L6			L16		
L7			L17		
L8			L18		
L9			L19		
L10			L20		

	CARA	COROA
Totais		

Fonte: do próprio autor

Após o preenchimento da primeira tabela, os alunos responderão as questões simples e diretas, enumeradas de 1 a 3, elaboradas com o intuito de atingir o objetivo exposto acima.

Questões:

1- Qual a probabilidade teórica de uma moeda justa dar cara? _____

2- Juliano lançou quarenta moedas para cima e obteve cara em 16 delas. Tendo por base os lançamentos realizados por Juliano, qual a probabilidade da moeda resultar cara?

R.: _____

3- De acordo com os lançamentos realizados por seu grupo na primeira sequência, qual a probabilidade de se obter, em 20 lançamentos de 10 moedas,

a) 5 caras e 5 coroas? _____

b) 6 caras e 4 coroas? _____

c) 4 caras e 6 coroas? _____

b) segunda sequência: 20 (vinte) lançamentos de 20 (vinte) moedas.

A segunda sequência tem por objetivo fornecer dados suficientes para que haja a percepção de que, ao considerar uma quantidade significativa de lançamentos, o número de resultados “cara” obtidos (*a posteriori*) tende a se aproximar da probabilidade esperada (*a priori*).

Para tanto, o grupo de alunos, ao efetuar a sequência de lançamentos, preencherá a segunda tabela da atividade e responderá os questionamentos enumerados de 4 a 10.

Tabela 2: Referente à segunda sequência de lançamentos de moedas

Segunda Sequência					
20 lançamentos de 20 moedas					
Lançamentos	CARA	COROA	Lançamentos	CARA	COROA
L1			L11		
L2			L12		
L3			L13		
L4			L14		
L5			L15		
L6			L16		
L7			L17		
L8			L18		
L9			L19		
L10			L20		
Totais		CARA	COROA		

Fonte: do próprio autor

Questões:

4- De acordo com os lançamentos realizados por seu grupo na quarta sequência, qual a probabilidade real de se obter, em 20 lançamentos de 20 moedas,

a) 5 caras e 15 coroas? _____

g) 11 caras e 9 coroas? _____

b) 6 caras e 14 coroas? _____

h) 12 caras e 8 coroas? _____

c) 7 caras e 13 coroas? _____

i) 13 caras e 7 coroas? _____

d) 8 caras e 12 coroas? _____

j) 14 caras e 6 coroas? _____

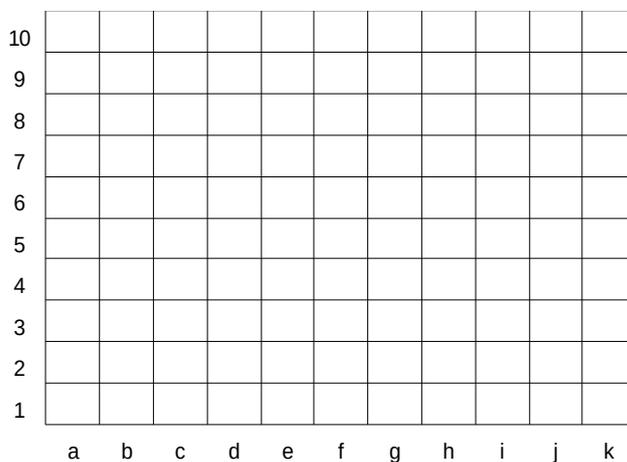
e) 9 caras e 11 coroas? _____

k) 15 caras e 5 coroas? _____

f) 10 caras e 10 coroas? _____

5- Faça o histograma com os dados obtidos na questão anterior:

Figura 4: base para confecção do histograma



Fonte: do próprio autor

6- No total, quantas moedas foram lançadas por seu grupo? _____

7- Qual foi a probabilidade de se obter cara? _____

8- Qual foi a probabilidade de se obter coroa? _____

9- O que é possível perceber sobre a probabilidade experimental depois de todos os lançamentos realizados?

10- Por que os resultados teórico e experimental não são iguais?

A questão 4 prevê um resultado mínimo de 5 “caras” e um máximo de 15 “caras”. Obviamente, o resultado obtido pelos alunos durante a atividade pode extrapolar os limites sugeridos. No entanto, tal limite é definido propositalmente tendo em vista que o grupo de alunos

deve perceber que, muito embora possam ocorrer tais prognósticos, as probabilidades são menores na medida em que executam os lançamentos.

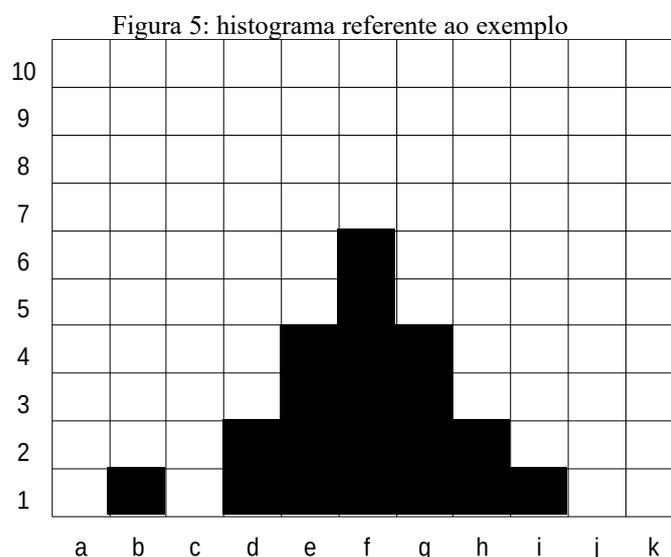
A questão 5 solicita a confecção de um histograma de acordo com o obtido na questão anterior. Sua relevância se pressupõe à medida que se torna possível verificar as distribuições discretas dos lançamentos das moedas. Para preenchê-lo, para cada situação (a,b,c,d,e,f,g,h,i,j ou k) marque a quantidade de incidências.

Exemplo:

Em 20 lançamentos de 20 moedas simultaneamente, foram obtidos:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) 5 caras e 15 coroas? <u>0</u> | g) 11 caras e 9 coroas? <u>4</u> |
| b) 6 caras e 14 coroas? <u>1</u> | h) 12 caras e 8 coroas? <u>2</u> |
| c) 7 caras e 13 coroas? <u>0</u> | i) 13 caras e 7 coroas? <u>1</u> |
| d) 8 caras e 12 coroas? <u>2</u> | j) 14 caras e 6 coroas? <u>0</u> |
| e) 9 caras e 11 coroas? <u>4</u> | k) 15 caras e 5 coroas? <u>0</u> |
| f) 10 caras e 10 coroas? <u>6</u> | |

O histograma deverá ser preenchido da seguinte forma:



Fonte: do próprio autor

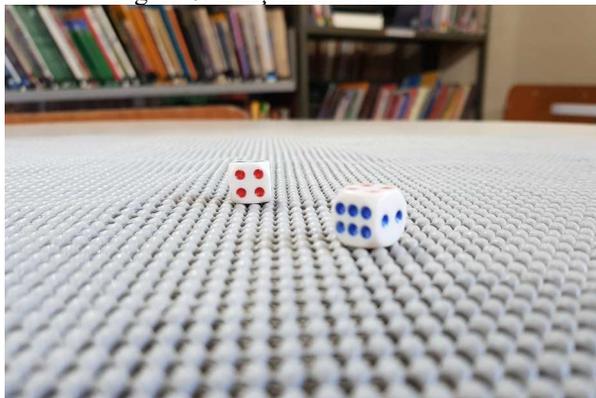
As questões de 6 a 10 tem por finalidade estimular os alunos a identificar padrões tendo por fundamento os levantamentos estatísticos, permitindo que os mesmos possam comparar os resultados obtidos aos apontamentos teóricos.

3.2 Lançamento de dados

Para a coleta de dados e resposta aos questionamentos pertinentes à atividade utilizaremos o roteiro denominado Experimento 2 – Lançamento de dados, constante no Anexo 3. Cada grupo recebe dois dados semelhantes para se realizar os lançamentos.

A atividade consiste do lançamento simultâneo de dois dados não viciados. Será considerada e registrada a soma das faces dos dois dados. Ao realizar a atividade, o grupo de alunos perceberá experimentalmente que há resultados que se verificam com maior incidência que outros e poderá determinar a probabilidade deste resultado se repetir.

Figura 6: Lançamento de dois dados



Fonte: do próprio autor

A sequência consiste de 30 lançamentos de dois dados simultaneamente e, além de registrar o valor resultante de cada face dos dados (dado 1 e dado 2), serão registrados também, a soma das faces.

Tabela 3: Referente à sequência de lançamentos de dois dados não viciados

Sequência – 30 lançamentos de 2 dados							
Lançamentos	Dado 1	Dado 2	Soma das faces	Lançamentos	Dado 1	Dado 2	Soma das faces
L1				L16			
L2				L17			
L3				L18			
L4				L19			
L5				L20			
L6				L21			
L7				L22			
L8				L23			
L9				L24			
L10				L25			
L11				L26			
L12				L27			
L13				L28			
L14				L29			
L15				L30			

Fonte: do próprio autor

Após o preenchimento da tabela, os alunos responderão as questões simples e diretas, enumeradas de 1 a 7, elaboradas com o intuito de atingir o objetivo exposto acima.

Questões:

1- Um dado calibrado tem 6 faces numeradas de 1 a 6. Todas as faces possuem a mesma chance de aparecer quando o dado é jogado.

Qual é a probabilidade de um dado justo dar 2? _____

2- Ao lançar um dado 60 vezes, quais a probabilidade dos lances resultarem em 1? _____

3- Quais os possíveis resultados quando lançamos dois dados? Sugestão: escreva sua resposta na forma de par ordenado: (dado1;dado2)

4- Ao lançar simultaneamente 2 dados, qual a probabilidade da soma das faces resultar

- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| a) 2? _____ | d) 5? _____ | g) 8? _____ | j) 11? _____ |
| b) 3? _____ | e) 6? _____ | h) 9? _____ | k) 12? _____ |
| c) 4? _____ | f) 7? _____ | i) 10? _____ | |

Considere os lançamentos de dados realizados por seu grupo na primeira sequência:

5- Qual somatório de faces ocorreu mais vezes? _____

6- Qual somatório de faces ocorreu menos vezes? _____

7- Qual é o valor médio obtido a partir da soma das faces dos dados lançados? _____

8- Faça o histograma dos lançamentos obtidos com a tabela da primeira sequência:

Figura 7: base para confecção do histograma

8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

soma das faces

Fonte: do próprio autor

A questão 1 visa estabelecer qual a probabilidade, a priori, de se obter resultado igual a dois no lançamento de um dado não viciado. Espera-se que o grupo de alunos encontre $\frac{1}{6}$.

A questão 2 tem por objetivo ampliar o conceito entabulado na questão 1, independente do número de lançamentos.

A questão 3 visa estabelecer quais os resultados possíveis no lançamento de dois dados não viciados: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5) e (6,6).

Para responder a questão 4, com a colaboração e auxílio do professor, o aluno pode perceber que, ao lançarmos dois dados não viciados há um número de eventos possíveis para cada soma de duas faces:

Soma = 2: (1,1)

Soma = 3: (1,2), (2,1)

Soma = 4: (1,3), (2,2), (3,1)

Soma = 5: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

Soma = 6: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

Soma = 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

Soma = 8: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)

Soma = 9: (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)

Soma = 10: (4,6), (5,5), (6,4)

Soma = 11: (5,6), (6,5)

Soma = 12: (6,6)

Continuamente ao exercício, sugerimos ao professor que promova a evolução do raciocínio da turma de alunos demonstrando que, a partir do número de combinações possíveis ($6 \times 6 = 36$), é possível determinar a probabilidade para a soma das faces de dois dados não viciados.

Para as questões 5 e 6, deve-se considerar os dados coletados e registrados na tabela 1.

A questão 7, a resposta é obtida a partir da média das somas das faces dos dados lançados dois a dois (soma dos resultados das faces dos dados lançados dividido por 30).

A questão 8 solicita a confecção de um histograma de acordo com o obtido nos lançamentos registrados na tabela. Sua relevância se pressupõe à medida que se torna possível verificar as distribuições discretas dos resultados das somas das faces dos dois dados lançados simultaneamente. Para preenchê-lo, marque a quantidade de incidências dos resultados possíveis.

Exemplo: Ao se efetuar 30 lançamentos de dois dados simultaneamente são obtidos os seguintes resultados:

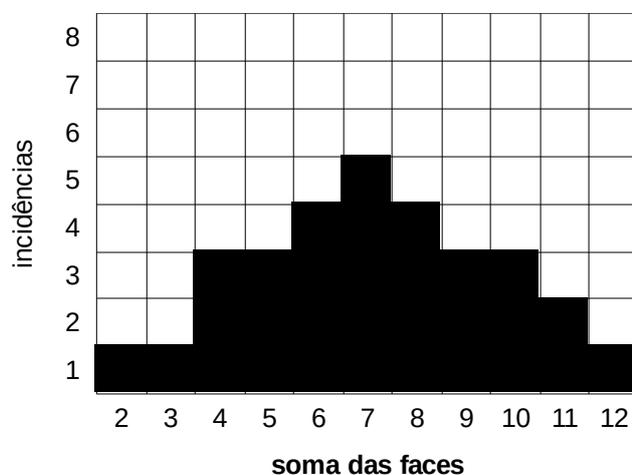
Tabela 4: Exemplo de resultados de lançamentos

Resultados soma das faces	Incidências
2	1
3	1
4	3
5	3
6	4
7	5
8	4
9	3
10	3
11	2
12	1

Fonte: do próprio autor

O histograma deverá ser preenchido da seguinte forma:

Figura 8: histograma referente ao exemplo de lançamentos



Fonte: do próprio autor

3.3 Caminho aleatório em duas dimensões

O caminho aleatório, também citado como *random walk*, descreve uma trajetória que consiste em uma sucessão de passos aleatórios e pode ser utilizado para “introduzir alguns conceitos e técnicas da teoria de probabilidades” (Salinas, 2013). Podem ser utilizados para fenômenos que ocorrem no mundo real que podem ir desde a análise do movimento das moléculas de um gás ao estudo do mercado flutuante de ações na bolsa de valores.

Esta atividade terá, por objetivo, proporcionar aos estudantes a observação dos efeitos da aleatoriedade na construção de algo real, no caso, o caminho percorrido, além de fundamentar a observação e compreensão das simulações que serão propostas e apresentadas posteriormente.

Para a coleta de dados e resposta aos questionamentos pertinentes à atividade utilizaremos o roteiro denominado Experimento 3 – Caminho Aleatório, constante no Anexo 4

O experimento consiste da obtenção de distâncias médias a partir de “passos” de tamanho constante e de direções e sentidos aleatórios.

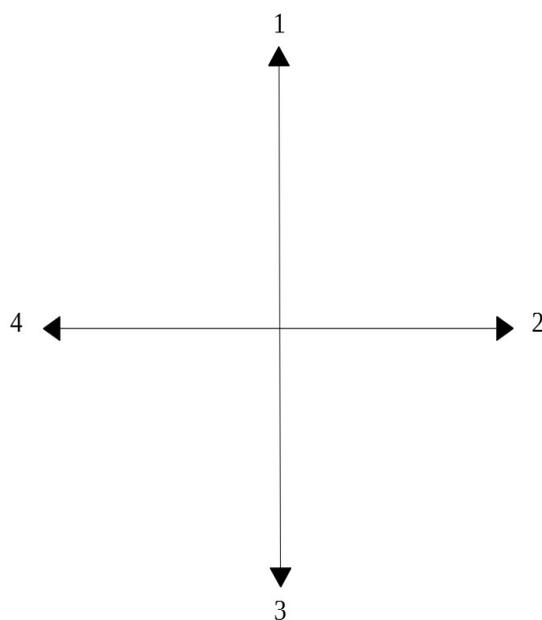
Será utilizado por cada um dos grupos de alunos, um dado não viciado e uma folha quadriculada referenciada. Com o propósito de se estabelecer um referencial fixo para o grupo de

alunos, a folha contém uma letra **F** no canto superior esquerdo da folha. O **Dado** determinará aleatoriamente a direção e o sentido do passo que, por padrão, terá módulo unitário. Nesta atividade sugere-se a realização de 50 lançamentos (passos) de cada componente do grupo.

Exercício 1

Iniciando-se a partir de um ponto qualquer da folha quadriculada, o resultado obtido com o lançamento do dado, determinará a direção e o sentido do passo em relação ao plano da folha referenciada na forma do gabarito indicado na figura 9.

Figura 9: Direção dos passos conforme resultado do lançamento dos dados



Fonte: do próprio autor

Assim, caso o resultado do **Dado** seja **1**, o passo será dado na direção vertical e sentido para cima; caso seja **2**, o passo será dado horizontalmente e à direita; caso seja **3**, verticalmente para baixo e, em sendo **4**, horizontalmente e à esquerda. Caso o resultado seja **5** ou **6**, dever-se-á efetuar novamente o lançamento sem que o mesmo seja computado no total de 50 passos, como sugerido.

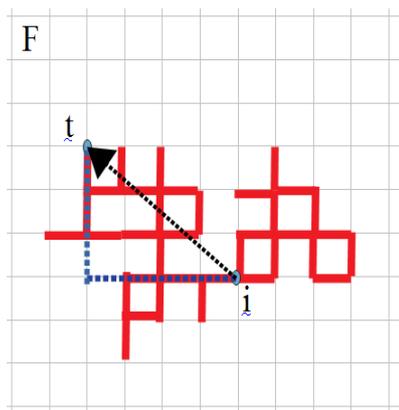
Para o procedimento seguinte, é importante que cada aluno, participante da atividade, registre na folha quadriculada o ponto de início e término do caminho aleatório.

Ao concluir a primeira parte da atividade, pode-se sugerir ao grupo de alunos que determine, através da utilização de cálculos simples, a distância percorrida pelo caminhante.

Considere o exemplo a seguir:

Foram realizados 50 lançamentos para a confecção de cada caminho aleatório, no qual, a título de exemplificação, apresentamos a seguinte situação²:

Figura 10: Configuração do caminho aleatório conforme exemplo



Fonte: do próprio autor

A distância percorrida pode ser determinada a partir da simples aplicação do Teorema de Pitágoras em que os catetos são as coordenadas em relação à origem (ponto onde se tenha iniciado o caminho aleatório)

Especificamente, para este exemplo a distância percorrida d_{RW} pode ser dada por:

$$d_{RW} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d_{RW} = \sqrt{(4u)^2 + (3u)^2}$$

$$d_{RW} = \sqrt{16u^2 + 9u^2}$$

$$d_{RW} = \sqrt{25u^2}$$

$$d_{RW} = 5u$$

2 Na figura 10, a letra (i) indica o início do “caminho aleatório” e a letra (t), seu término.

Exercício 2

Após cada estudante determinar a distância percorrida conforme o desenvolvimento de sua atividade, será preenchida a tabela seguinte de modo que todos os participantes possam contribuir para com o resultado acumulado no desempenho da atividade conjunta.

Tabela 5: Tabela conjunta – Caminho Aleatório

Tabela conjunta – Caminho Aleatório			
caminhos	abscissa	ordenada	distância
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Fonte: do próprio autor

Exercício 3

Após o preenchimento da tabela conjunta com dados do caminho aleatório obtido pelos componentes do grupo de alunos, propõe-se o cálculo das respectivas medidas de dispersão. Utilize as expressões apresentadas na seção **2.2**.

Questão: A partir dos dados obtidos com o preenchimento da tabela da atividade 2 e tendo por base as medidas de distância, determine:

a) a amplitude: _____

b) a média aritmética: _____

c) o desvio: _____

d) o desvio padrão: _____

e) a variância: _____

Após os cálculos, o professor regente da turma poderá estimular a comparação dos resultados obtidos entre os alunos, promovendo a interatividade entre os mesmos.

4. Simulações

As simulações terão por objetivo expandir os conceitos inicialmente trabalhados a partir dos experimentos estatísticos. Utilizando-se do emprego das simulações, poder-se-á visualizar interações para um número superior ao trabalhado na atividade experimental, permitindo-se propor resultados que, de certa forma, poderiam ser demasiadamente longos e extenuantes.

Utilizaremos os simuladores da página *Statistical and Thermal Physics*, que se encontram disponíveis na Biblioteca Digital AAPT ComPADRE³. Trata-se de uma coleção de informações e recursos para professores de Física abordando a Estatística e Termologia. Os recursos desta coleção são complementos aos livros-texto de Estatística e Física Térmica padrão e incluem atividades dos alunos, informações básicas e aplicativos.

4.1 Lançamento de moedas

Primeiramente é necessário que o pacote java⁴ esteja instalado na máquina que rodará as simulações.

O passo seguinte é baixar o simulador de acesso livre “Ejs Multiple Coin Toss” disponível na página <https://www.compadre.org/STP/items/detail.cfm?ID=8302>.

O simulador “Ejs Multiple Coin Toss”⁵ foi criado usando a ferramenta de modelagem Easy Java Simulations (Ejs). Ele é distribuído como um arquivo Java pronto para execução (compilado). Ao acessar a página, clique no ícone “download_1333kb.jar”.

Figura 11: Botão para baixar o arquivo
download_1333kb.jar



Fonte: Biblioteca Digital AAPT ComPADRE

³ A Biblioteca Digital AAPT ComPADRE é uma rede de coleções de recursos on-line gratuitos que dão suporte a docentes, alunos e professores em Educação Física e Astronomia. Disponível em www.compadre.org.

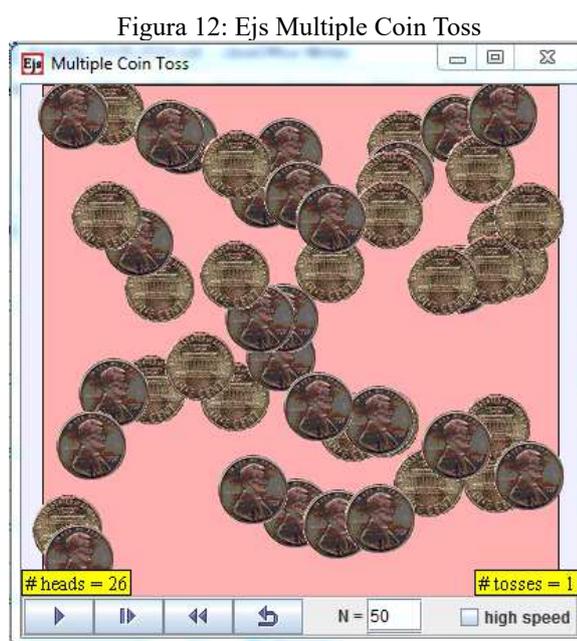
⁴ As instruções para instalação do Java em computador Windows estão disponíveis em https://www.java.com/pt_BR/download/help/windows_manual_download.xml, Para instalação em computador com plataforma Linux, consulte as informações de instalação através do site https://www.java.com/pt_BR/download/help/linux_x64_install.xml, acessado em 20/05/2019.

⁵ O simulador Ejs Multiple Coin Toss foi desenvolvido por Wolfgang Christian e Mario Belloni os quais são os titulares dos direitos autorais.

Após realizar o download, execute o arquivo “ejs_stp_MultipleCoinToss”, clicando duas vezes no arquivo.

Ao executar o simulador são apresentadas em sua tela três janelas: a primeira corresponde ao simulador de fato (figura 12).

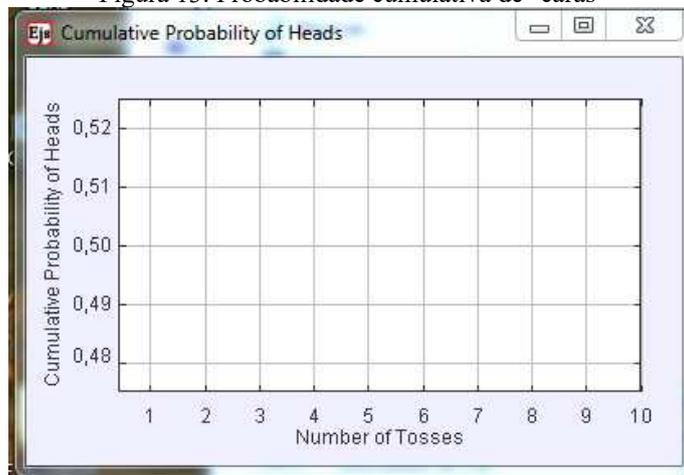
Através dela serão controladas as interações, o número de moedas lançadas (N), a velocidade da simulação (a velocidade das interações pode ser aumentada marcando-se a caixa “high speed”, localizada no canto inferior direito) bem como o controle do início dos lançamentos, a tendência do resultado (“viciar” a moeda) e o retorno das interações. É possível modificar esta simulação clicando com o botão direito do mouse na simulação em execução e selecionando “Open Ejs Model” (Abrir modelo do Ejs) no item de menu pop-up.



Fonte: Simulação realizada pelo autor

A segunda janela (Figura 13) ilustra a probabilidade acumulada do número de “caras” em função do número de lançamentos. O usuário poderá perceber que, conforme são incrementados os lançamentos, a curva tende a se aproximar de 0,50, conexo à probabilidade de se obter um resultado ou outro.

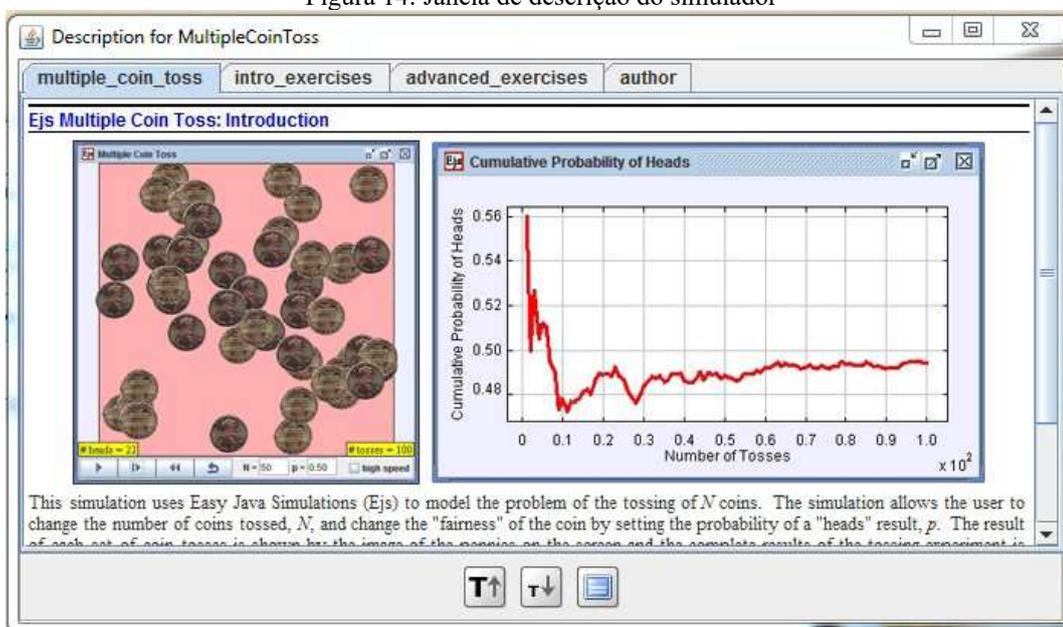
Figura 13: Probabilidade cumulativa de "caras"



Fonte: Simulação realizada pelo autor

Já a terceira janela (figura 14) descreve o uso do simulador e traz também, propostas de exercícios elementares e avançados para o emprego no simulador.

Figura 14: Janela de descrição do simulador



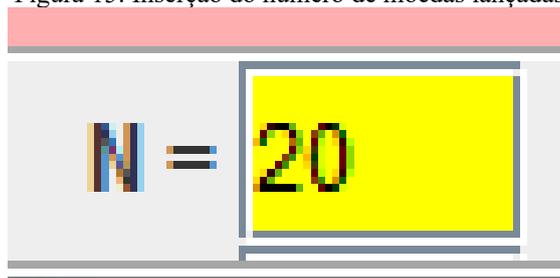
Fonte: simulação realizada pelo autor

Para utilização do aplicativo em sala de aula sugere-se a simulação de moedas não viciadas em quantidades semelhantes aos experimentos realizados.

A primeira simulação com $N = 10$ (dez moedas lançadas simultaneamente) e a segunda, com $N = 20$ (vinte moedas lançadas simultaneamente).

É possível alterar o número de moedas lançadas clicando duas vezes a caixa “N” conforme a figura 15, inserindo manualmente a quantidade desejada. Em seguida, tecle “enter” e clique no botão “play” para iniciar a simulação.

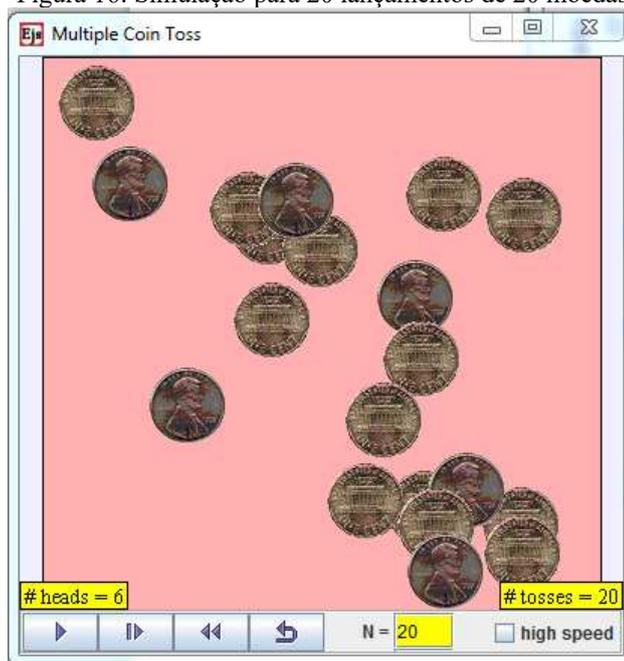
Figura 15: Inserção do número de moedas lançadas



Fonte: simulação realizada pelo autor

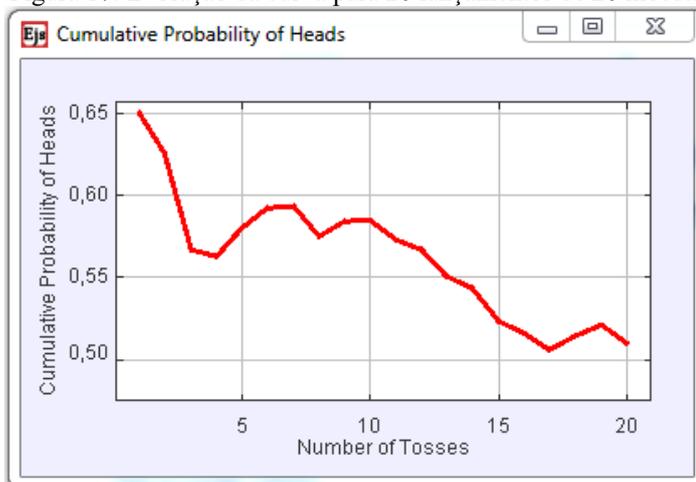
Para utilizar a simulação passo a passo, basta clicar no botão “single step the simulation”. Assim, cada lançamento será registrado de cada vez e será possível perceber a evolução da curva da probabilidade cumulativa de resultados “cara”, no gráfico.

Figura 16: Simulação para 20 lançamentos de 20 moedas



Fonte: simulação realizada pelo autor

Figura 17: Evolução da curva para 20 lançamentos de 20 moedas



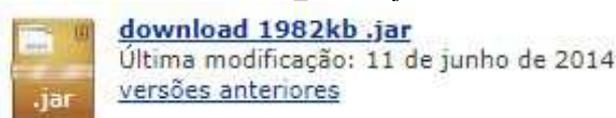
Fonte: simulação realizada pelo autor

4.2 Caminhos aleatórios

Para a utilização do simulador de caminhos aleatórios, de mesma forma se faz necessário ter o pacote Java instalado no computador utilizado para a atividade. Caso não o tenha, sugere-se instalação seguindo o procedimento indicado anteriormente.

Na sequência, o passo seguinte é baixar o simulador de acesso livre “Ejs Randon Walk 2D” disponível na página <https://www.compadre.org/STP/items/detail.cfm?ID=8845>. O simulador “Ejs Randon Walk 2D”⁶ foi criado usando a ferramenta de modelagem Easy Java Simulations (Ejs). Ele é distribuído como um arquivo Java pronto para execução (compilado). Ao acessar a página, clique no ícone “download_1982kb.jar”.

Figura 18: Botão para baixar o arquivo
download_1982kb.jar



Fonte: Biblioteca Digital AAPT ComPADRE

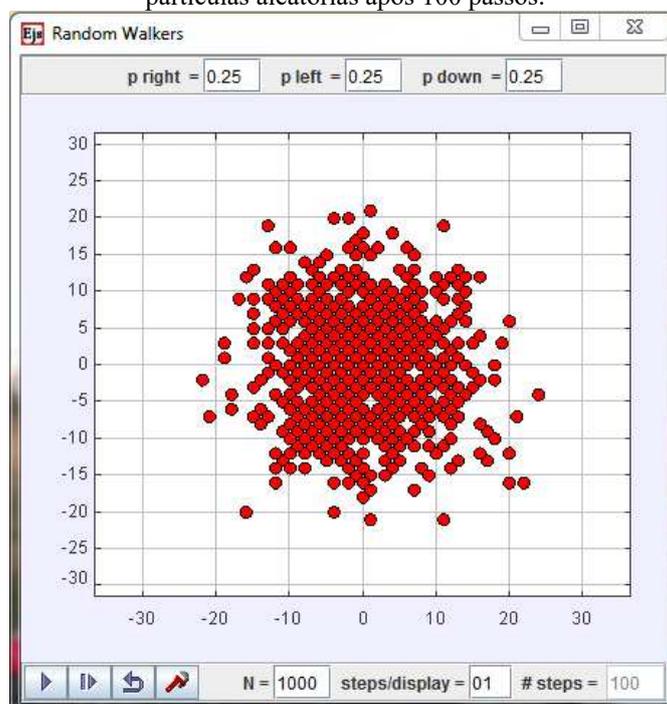
⁶ O simulador Ejs Randon Walk 2D foi desenvolvido por Wolfgang Christian o qual é o titular dos direitos autorais.

Após realizar o download, execute o arquivo “ejs_stp_RandomWalk2D.jar”, clicando duas vezes no arquivo.

O modelo Randon Walk 2D simula o caminho aleatório em duas dimensões. É possível alterar o número de partículas aleatórias bem como a probabilidade de se seguir em uma determinada direção. Os itens da simulação podem ser alterados ao clicar com o botão direito do mouse sob o gráfico e selecionando “Abrir modelo do Ejs no item de menu pop-up”.

Ao executar o simulador surgirão em sua tela três janelas: a primeira corresponde ao simulador de fato (figura 19). Através dela serão controlados o número de partículas aleatórias (N), o lapso de passos mostrados na tela e a probabilidade de se seguir nas direções direita, esquerda e para baixo, respectivamente. Inicialmente, a probabilidade da partícula seguir em uma das quatro direções (direita, esquerda, para cima ou para baixo) é a mesma, ou seja, $p = 0,25$. As mesmas podem ser alteradas estando sujeitas à condição de normalização de que a soma das probabilidades é a unidade.

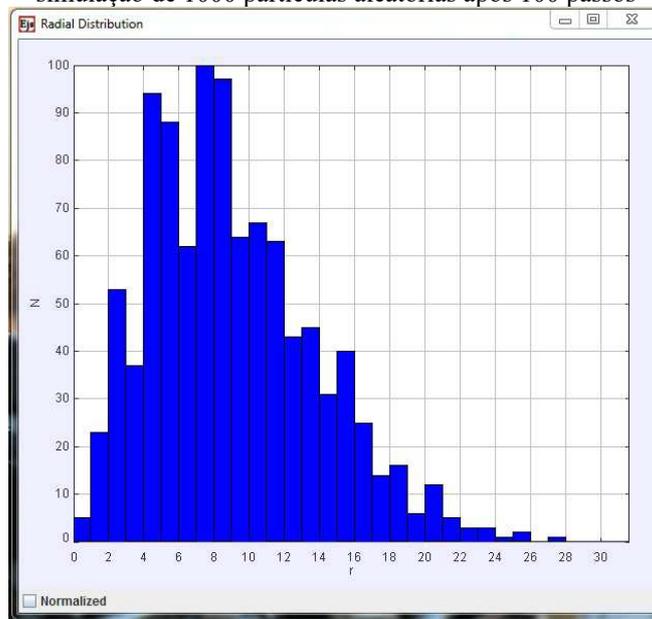
Figura 19: Simulador do caminho aleatório em duas dimensões. A situação representa a simulação de 1000 partículas aleatórias após 100 passos.



Fonte: simulação realizada pelo autor

A segunda janela (figura 20) ilustra a distribuição radial das partículas aleatórias com relação a origem. Há a possibilidade dos dados do gráfico se apresentarem normalizados, bastando, para isso, selecionar manualmente a caixa localizada no canto inferior direito da janela.

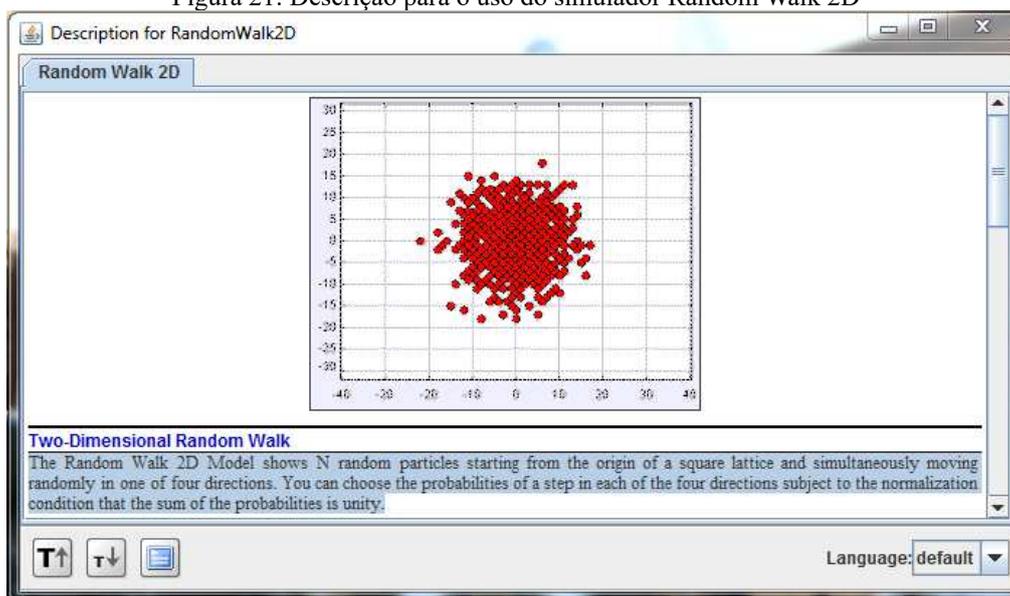
Figura 20: Distribuição Radial. A situação representa a simulação de 1000 partículas aleatórias após 100 passos



Fonte: simulação realizada pelo autor

A terceira janela (figura 21) descreve o uso do simulador e traz também, propostas de exercícios para o emprego no simulador.

Figura 21: Descrição para o uso do simulador Random Walk 2D



Fonte: simulação realizada pelo autor

Para utilização em sala de aula, sugere-se que a probabilidade definida para as direções sejam igualmente distribuídas, proporcionando uma situação de análise condizente com a escolaridade dos aprendizes.

É interessante e sugestivo que os alunos, observadores da simulação, possam encontrar correspondência com a atividade proposta experimentalmente, de forma que estas possam se complementar quanto ao objetivo proposto.

5. Aplicação de pós-testes conceituais

Os pós-testes, que se constituem das mesmas questões inseridas como pré-testes⁷, são aplicados preferencialmente, após o conteúdo proposto de Termodinâmica ter sido ministrado à turma de alunos. Lembramos que o objetivo deste produto educacional é fornecer organizadores prévios necessários ao processo de ensino aprendizagem possibilitando assim, mecanismos que possam promover aprendizagem significativa pelos alunos.

Após serem aplicados o professor poderá, através de um quadro comparativo em relação aos pré-testes, identificar o quão relevante foi a aplicação do produto educacional, bem como, de que forma os conceitos de estatística básica foram relevantes no processo.

Embora não obrigatórios, o emprego dos pré-testes e pós-testes tem como objetivo subsidiar o trabalho do professor, proporcionando uma avaliação dos meios utilizados e favorecendo a evolução das técnicas e meios empregados em sala de aula.

⁷ Ver item 1, do tópico sequência didática.

6. Considerações finais

Desde seu início este projeto foi pensado de modo a incentivar a interação professor-aluno além de proporcionar uma experiência na qual os estudantes possam em conjunto, observar conceitos básicos e relevantes à compreensão de fenômenos físicos a partir de um conteúdo que, essencialmente, não faz parte de grande parte dos programas de Física para o Ensino Médio.

Propomos uma sequência didática que traz inicialmente uma explanação histórica que perpassa momentos cruciais dos apontamentos da evolução dos conceitos de Termodinâmica. Nesse aspecto procuramos destacar a importância da percepção bem como da experimentação científica.

A partir de então, introduzimos conceitos basilares de estatística. O suficiente para que, ao realizar os experimentos propostos, os estudantes organizados em grupos e sob orientação do professor, tivessem a capacidade de construir conhecimento.

Neste diapasão, pleiteamos que o aluno compreenda sobretudo que a ciência evolui de forma colaborativa e que, apesar das ocasionais frustrações, da dedicação árdua e de circunstâncias adversas, com o trabalho em equipe e, ao conglomerarmos os resultados alcançados, percebe-se o quão interessante pode ser o aprendizado e o quanto o protagonismo estudantil pode resultar em conhecimento.

Com isso, afastada a pretensão de algo pronto, concluído e imutável, temos a intenção de que este trabalho proporcione ao professor uma ferramenta simples e prática para que possa enriquecer sua aula e, conseqüentemente, possa despertar no aluno o interesse pela ciência, tendo uma ideia básica sobre sua evolução e de como ela é estruturada.

7. Referências Bibliográficas

BACON, Francis. **Novum organum: ou verdadeiras indicações acerca da interpretação da natureza**. São Paulo: Nova Cultural, 2000.

BARBARINI, Alcenir Tarcisio. **Clausius, Rudolf (1822-1888)**. Faculdade de Engenharia Mecânica. UNICAMP. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/clausius.htm>> Acesso em 06/10/2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 05/08/2018.

BRASIL. **Ministério de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 05/08/2018.

BRASIL. Ministério de Educação. **A Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 10/03/2019.

CARRAHER, D. W., CARRAHER, T. N., SCHLIEMANN, A. D. **Caminhos e descaminhos no ensino de ciências** In Simpósio Sul-Brasileiro de Ensino de Ciências, II., Florianópolis Disponível em: <http://www.ufpa.br/eduquim/caminhos_e_descaminhos_no_ensino.htm> Acesso em: 12/08/2018.

CARVALHO, A.M.P., Pérez D.G.. **Formação de Professores de Ciências**. 2ª edição. 1995.

KHAN ACADEMY, **Probabilidade teórica e experimental: lançamento de moedas e dados**. Disponível em <<https://pt.khanacademy.org/math/ap-statistics/probability-ap/randomness-probability-simulation/a/theoretical-and-experimental-probability-coin-flips-and-die-rolls>>. Acesso em 06/02/2019.

KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo: Perspectiva, 1997.

MATEMÁTICA BÁSICA. **Estatística: Medidas de Dispersão e Amostragem**. Disponível em <<https://matematicabasica.net/estatistica/>>. Acesso em 03/11/2019.

MARTINS, Roberto de Andrade. **Mayer e a conservação da energia**. Cadernos de História e Filosofia da Ciência (6): 63-95, 1984.

MOREIRA, M.A. **Teorias de Aprendizagem** – São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, M.A. **Uma abordagem cognitivista ao ensino de física; a teoria de aprendizagem de David Ausubel como sistema de referência para a organização do ensino de ciências**. Porto Alegre: UFRGS, 1983.

MOREIRA, M.A.; MASSONI, N.T. **Epistemologias do século XX**. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária Ltda.,2011.

MOREIRA, M.A.; MASSONI, N.T. **Pesquisa Qualitativa em Educação em Ciências**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

NETO, Henrique Nilsen. **Filosofia da Educação**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 1988.

OLIVEIRA, Bernardo Jefferson de. **Francis Bacon e a fundamentação da ciência como tecnologia**. Belo Horizonte: UFMG, 2002.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. "**Medidas de dispersão: variância e desvio padrão**"; Brasil Escola. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/medidas-dispersao-variencia-desvio-padrao.htm>>. Acesso em 03/11/2019.

SALINAS, Sílvio R.A. **Introdução à Física Estatística**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

SANTOS, A. DE C.K., MOREIRA, M.A. & LEVANDOWSKI, E.C.. **Influência do Instrumento na Avaliação da Aprendizagem Decorrente do Ensino de Laboratório em Física**. Cad. Cat. Ens. Fis., Florianópolis, 3: 122-123, dez. 1986.

VON BAEYER, Hans Christian. **Arco-Íris, flocos de neve, quarks: a física e o mundo que nos rodeia**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1994.

APÊNDICE A

Questões para pré-testes e pós-testes.

1. Associamos a existência de calor

- (A) a qualquer corpo, pois todo corpo possui calor.
- (B) apenas àqueles corpos que se encontram "quentes".
- (C) a situações nas quais há, necessariamente, transferência de energia.

2. Para se admitir a existência de calor

- (A) basta um único sistema (corpo).
- (B) são necessários, pelo menos, dois sistemas.
- (C) basta um único sistema, mas ele deve estar "quente".

3. Calor é

- (A) energia cinética das moléculas.
- (B) energia transmitida somente devido a uma diferença de temperaturas.
- (C) a energia contida em um corpo.

4. No interior de um quarto que não tenha sido aquecido ou refrigerado durante vários dias

- (A) a temperaturas dos objetos de metal é inferior à dos objetos de madeira.
- (B) a temperatura dos objetos de metal, das cobertas e dos demais objetos é a mesma.
- (C) nenhum objeto apresenta temperatura.

5. Dois cubos metálicos A e B são postos em contato. A está mais "quente" do que B. Ambos estão mais "quentes" do que o ambiente. Após um certo tempo, a temperatura de A e B será

- (A) igual à temperatura do ambiente
- (B) igual à temperatura inicial de B
- (C) uma média entre as temperaturas iniciais de A e B.

6. Duas pequenas placas A e B do mesmo metal e da mesma espessura são colocadas no interior de um forno, o qual é fechado e ligado. A massa de A é o dobro da massa de B ($m_A = 2m_B$). Inicialmente as placas e o forno encontram-se todos à mesma temperatura. Muito tempo depois a temperatura de A será

- (A) o dobro da de B.
- (B) a metade da de B.
- (C) a mesma da de B.

7. Considere duas esferas idênticas, uma em um forno quente e a outra em uma geladeira. Basicamente em que diferem elas imediatamente após terem sido retiradas do forno e da geladeira respectivamente?

- (A) Na quantidade de calor contida em cada uma delas.
- (B) Na temperatura de cada uma delas.
- (C) Uma delas contém calor e a outra não.

8. Duas esferas de mesmo material porém de massas diferentes ficam durante muito tempo em um forno. Ao serem retiradas do forno, são imediatamente colocadas em contato. Nessa situação:

- (A) calor contido na esfera de maior massa passa para a de menor massa.
(B) calor contido na esfera de menor massa passa para a de maior massa.
(C) não há transferência de energia na forma de calor entre as esferas.
9. As mesmas esferas da questão anterior são agora deixadas durante muito tempo em uma geladeira. Nessa situação, ao serem retiradas e imediatamente colocadas em contato:
- (A) nada acontece, pois todo o calor contido nas esferas foi removido.
(B) calor contido na esfera de maior massa passa para a de menor massa.
(C) não há condições para transferência de energia na forma de calor.

10. A energia interna de um corpo pode ser associada com

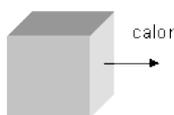
- (A) calor
(B) energia cinética de átomos e/ou moléculas
(C) energias nuclear forte de átomos e/ou moléculas

11. Complete a seguinte frase

"O aumento de temperatura que você percebe quando esfrega suas mãos é resultado de _____ .
Consequentemente há condução de _____ para o interior das mãos, resultando, em função disso, um aumento de _____ .

- (A) trabalho, calor, energia interna.
(B) calor, energia, temperatura.
(C) trabalho, temperatura, calor.

12. Observando-se a figura e sem dispor de qualquer outra informação, pode-se dizer que necessariamente o cubo A possui, em relação ao meio que o cerca



- (A) temperatura mais elevada.
(B) mais energia.
(C) mais calor.

13. Objetos de metal e de plástico são colocados no interior de um *freezer* que se encontra a -20°C . Depois de alguns dias, pode-se afirmar que a temperatura dos objetos de plástico é

- (A) maior que a dos objetos de metal.
(B) menor que a dos objetos de metal.
(C) igual à dos objetos de metal.

14. Ao submetermos uma massa gasosa a um aumento de temperatura, certamente haverá:

- (A) aumento de volume, caso a pressão se mantenha constante.
(B) diminuição da pressão, caso o volume se mantenha constante.
(C) aumento da massa sobre quaisquer circunstâncias.

15. Quando uma massa gasosa é aquecida, suas moléculas tendem a

- (A) ficar mais agitadas.
(B) ficar mais lentas.
(C) o aquecimento não interfere na agitação das moléculas.

16. Quando uma massa gasosa é resfriada, suas moléculas tendem a

- (A) afastar-se umas das outras.
 - (B) aproximar-se umas das outras.
 - (C) manter a distância entre elas.
17. Imagine que um balão de ar quente entre em uma região onde ocorra uma queda brusca da temperatura do ar ao seu redor, lá permanecendo. Inexistindo a possibilidade de fornecer energia térmica ao ar localizado no interior do balão, pode-se afirmar que, com o decorrer do tempo:
- (A) o balão tende a descer imediatamente.
 - (B) o balão subirá indefinidamente.
 - (C) a princípio o balão sobe e, com o passar do tempo, tende a descer.
18. Ao comprimirmos um gás em uma transformação isotérmica,
- (A) a distância entre as suas moléculas tendem a aumentar.
 - (B) a sua temperatura diminui.
 - (C) o volume ocupado pelo gás diminui.
19. O número de colisões que ocorrem entre as moléculas de um gás e as paredes do recipiente que o contém está relacionado à grandeza
- (A) pressão.
 - (B) volume.
 - (C) calor.
20. Para que a energia cinética das moléculas de um gás aumente, é necessário que:
- (A) a velocidade das moléculas aumente.
 - (B) a velocidade das moléculas diminua.
 - (C) a velocidade das moléculas se aproxime de zero.

APÊNDICE B

Experimento 1 - LANÇAMENTO DE MOEDAS

Primeira Sequência					
20 lançamentos de 10 moedas					
Lançamentos	CARA	COROA	Lançamentos	CARA	COROA
L1			L11		
L2			L12		
L3			L13		
L4			L14		
L5			L15		
L6			L16		
L7			L17		
L8			L18		
L9			L19		
L10			L20		

	CARA	COROA
Totais		

Questões:

1- Qual a probabilidade teórica de uma moeda justa dar cara? _____

2- Juliano lançou quarenta moedas para cima e obteve cara em 16 delas. Tendo por base os lançamentos realizados por Juliano, qual a probabilidade da moeda resultar cara? R.: _____

3- De acordo com os lançamentos realizados por seu grupo na primeira sequência, qual a probabilidade de se obter, em 20 lançamentos de 10 moedas,

a) 5 caras e 5 coroas? _____

b) 6 caras e 4 coroas? _____

c) 4 caras e 6 coroas? _____

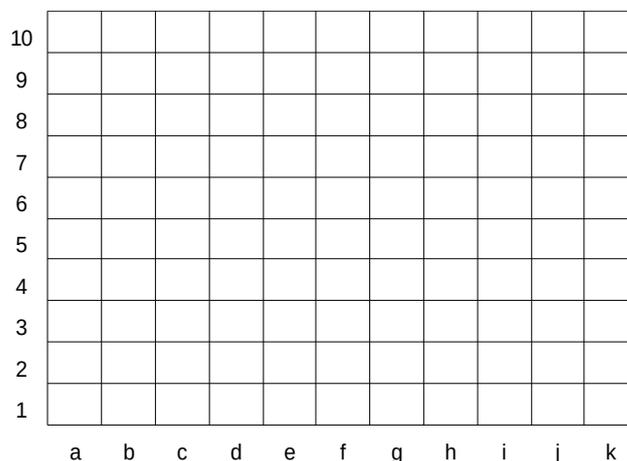
Segunda Sequência					
20 lançamentos de 20 moedas					
Lançamentos	CARA	COROA	Lançamentos	CARA	COROA
L1			L11		
L2			L12		
L3			L13		
L4			L14		
L5			L15		
L6			L16		
L7			L17		
L8			L18		
L9			L19		
L10			L20		

	CARA	COROA
Totais		

4- De acordo com os lançamentos realizados por seu grupo na quarta sequência, qual a probabilidade real de se obter, em 20 lançamentos de 20 moedas,

- a) 5 caras e 15 coroas? _____ g) 11 caras e 9 coroas? _____
 b) 6 caras e 14 coroas? _____ h) 12 caras e 8 coroas? _____
 c) 7 caras e 13 coroas? _____ i) 13 caras e 7 coroas? _____
 d) 8 caras e 12 coroas? _____ j) 14 caras e 6 coroas? _____
 e) 9 caras e 11 coroas? _____ k) 15 caras e 5 coroas? _____
 f) 10 caras e 10 coroas? _____

5- Faça o histograma com os dados obtidos na questão anterior:



6- No total, quantas moedas foram lançadas por seu grupo? _____

7- Qual foi a probabilidade de se obter cara? _____

8- Qual foi a probabilidade de se obter coroa? _____

9- O que é possível perceber sobre a probabilidade experimental depois de todos os lançamentos realizados?

10- Por que os resultados teórico e experimental não são iguais?

APÊNDICE C

Experimento 2 - LANÇAMENTO DE DADOS

Sequência – 30 lançamentos de 2 dados							
Lançamentos	Dado 1	Dado 2	Soma das faces	Lançamentos	Dado 1	Dado 2	Soma das faces
L1				L16			
L2				L17			
L3				L18			
L4				L19			
L5				L20			
L6				L21			
L7				L22			
L8				L23			
L9				L24			
L10				L25			
L11				L26			
L12				L27			
L13				L28			
L14				L29			
L15				L30			

Questões:

1- Um dado calibrado tem 6 faces numeradas de 1 a 6. Todas as faces possuem a mesma chance de aparecer quando o dado é jogado.

Qual é a probabilidade de um dado justo dar 2? _____

2- Ao lançar um dado 60 vezes, quais a probabilidade dos lances resultarem em 1? _____

3- Quais os possíveis resultados quando lançamos dois dados? Sugestão: escreva sua resposta na forma de par ordenado: (dado1;dado2)

4- Ao lançar simultaneamente 2 dados, qual a probabilidade da soma das faces resultar

- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| a) 2? _____ | d) 5? _____ | g) 8? _____ | j) 11? _____ |
| b) 3? _____ | e) 6? _____ | h) 9? _____ | k) 12? _____ |
| c) 4? _____ | f) 7? _____ | i) 10? _____ | |

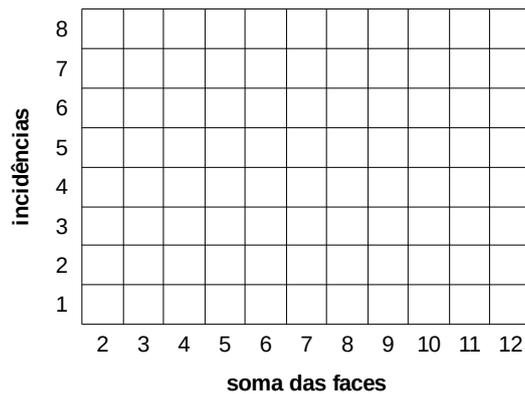
Considere os lançamentos de dados realizados por seu grupo na primeira sequência:

5- Qual somatório de faces ocorreu mais vezes? _____

6- Qual somatório de faces ocorreu menos vezes? _____

7- Qual é o valor médio obtido a partir da soma das faces dos dados lançados? _____

8- Faça o histograma dos lançamentos obtidos com a tabela da primeira sequência:

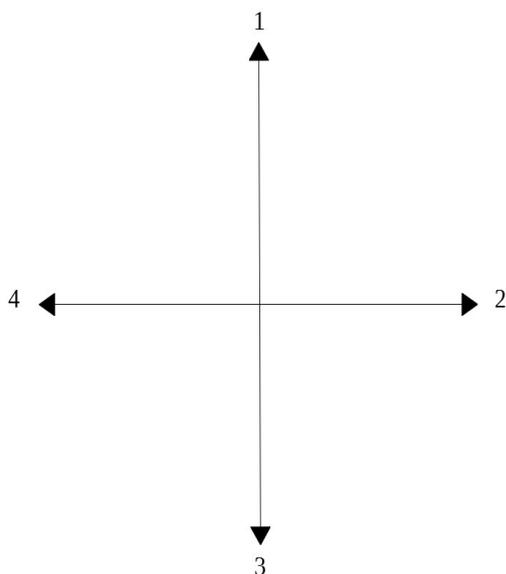


APÊNDICE D

Experimento 3 – CAMINHO ALEATÓRIO

Exercício 1 – Caminho aleatório

A partir de um ponto qualquer da folha quadriculada (Anexo), inicie o caminho aleatório (*random walk*) a partir do resultado do dado lançado conforme a figura:



Caso o resultado do lançamento do Dado seja 1, o passo será dado na direção vertical e sentido para cima; caso seja 2, o passo será dado horizontalmente e à direita; caso seja 3, verticalmente para baixo e, em sendo 4, horizontalmente e à esquerda. Caso o resultado seja 5 ou 6, dever-se-á efetuar novamente o lançamento sem que o mesmo seja computado no total de 50 passos.

Exercício 2

Após cada estudante determinar a distância percorrida conforme o desenvolvimento de sua atividade, será preenchida a tabela seguinte de modo que todos os participantes possam contribuir para com o resultado acumulado no desempenho da atividade conjunta.

Tabela conjunta – Caminho Aleatório			
caminhos	abscissa	ordenada	distância
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Exercício 3

Após o preenchimento da tabela conjunta com dados do caminho aleatório obtido pelos componentes do grupo de alunos, propõe-se o cálculo das respectivas medidas de dispersão. Utilize as expressões apresentadas na seção 2.2.

Questão: A partir dos dados obtidos com o preenchimento da tabela da atividade 2 e tendo por base as medidas de distância, determine:

a) a amplitude: _____

b) a média aritmética: _____

c) o desvio: _____

d) o desvio padrão: _____

e) a variância: _____

APÊNDICE E
QUADRICULADO PARA ATIVIDADE DO CAMINHO ALEATÓRIO

