ao fato de um operador linear ser diagonalizável ou não, o conjunto dos escalares no qual trabalhamos desempenha um papel importante.

Ainda assim, mesmo permitindo valores complexos, nem todo operador linear é diagonalizável. Por exemplo, seja $T: V \to V$, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão 4 e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde α é uma base de V. Então, o polinômio característico de T é $p(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1)^2$, e portanto seus autovalores são $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$ (com multiplicidade 2). Não é possível, entretanto, encontrar dois autovetores LI (tente!) para $\lambda_3 = 1$, e assim T não é diagonalizável.

Porém, quando $T: V \to V$ for um operador linear não diagonalizável e V um espaço vetorial *complexo*, poderemos achar sempre uma base β de V, tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ assuma uma forma especial, chamada *forma de Jordan*. Esta forma é obtida por blocos do tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & \lambda i \\ 0 & & & 1 \quad \lambda i \end{bmatrix}$$

ou $[\lambda_i]$ colocados na diagonal.

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

A demonstração deste fato é um tópico especial que deve fazer parte de um estudo mais avançado de Álgebra Linear[3].

7.5 EXERCÍCIOS

1. Entre os operadores dos exercícios 2 a 8 da secção 6.3 verifique quais são diagonalizáveis.

2. Dizemos que uma matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ é *diagonalizável* se seu operador associado $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for diagonalizável, ou seja, $\mathbf{A}$ é diagonalizável se, e somente se $\mathbf{A}$ admitir n autovetores LI. Baseado nisto, verifique quais das matrizes dos Exercícios 9 a 18 da secção 6.3 são diagonalizáveis.

3. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) $\mathbf{A}$ é diagonalizável (use a definição do exercício anterior).
   b) Encontre seu polinômio minimal.

4. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz 3×3 triangular superior, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

   a) Quais são os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$?
   b) Qual é o polinômio minimal de $\mathbf{A}$?

5. Para quais valores de a as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[3]Para detalhes consulte Lipschutz, S. *Álgebra Linear*, Mc Graw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971; ou Hoffman, K. e Kunze, R. *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971; ou Gelfond, I. M.: *Lectures in Linear Algebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.

6. Sejam $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ linear, $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base canônica de $\mathbf{R}^3$, $\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

b) Ache $[T]_{\beta}^{\beta}$ e o polinômio característico. Que observação você faz a este respeito?

c) Encontre uma base γ de $\mathbf{R}^3$, se for possível, tal que $[T]_{\gamma}^{\gamma}$ seja diagonal.

7. *a*) Sejam $T: V \to V$ um operador linear (V de dimensão finita) e α e β bases distintas de T. Mostre que

$$\det [T]_{\alpha}^{\alpha} = \det [T]_{\beta}^{\beta}$$

(Sugestão: veja a relação entre $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$ no Capítulo 6).

b) Se $\mathbf{A}_{n \times m}$ é diagonalizável, mostre que o determinante de $\mathbf{A}$ é o produto de seus autovalores.
(Sugestão: considere $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, observando que a matriz de $T_{\mathbf{A}}$ na base canônica é exatamente $\mathbf{A}$. Use então o resultado do item (*a*) considerando como α a base canônica e β a base de autovetores.

8. Mostre que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. *a*) Mostre que um operador linear T (num espaço de dimensão finita) que comuta com qualquer operador linear diagonalizável é diagonalizável.
b) Nas condições do item (*a*) mostre que na verdade T é um múltiplo escalar do operador identidade, isto é, existe um número r tal que $T = r \cdot I$.

10. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é *nilpotente* se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (isto é, $T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$) para todo $\mathbf{v} \in V$).
a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores.
b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq 0$ tal que $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja nilpotente.
c) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

11. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é *idempotente* se $T^2 = T$ (isto é, se $T \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$).
a) Seja T idempotente. Ache seus autovalores.
b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq \mathbf{0}$ tal que $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja idempotente.
c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.

*12. Mostre que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. No entanto, se $\mathbf{A}$ representar, numa certa base, um operador linear $T: V \to \mathrm{V}$, onde V é um *espaço vetorial complexo*, então T é diagonalizável. Verifique este fato ou, equivalentemente, que existe uma matriz com elementos complexos $\mathbf{P}_{3 \times 3}$, inversível, tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

*13. Problema-pesquisa: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M & a & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & M & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & a & M & \ldots\ldots & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots\ldots & M & a \\ a & a & a & \ldots\ldots & a & M \end{bmatrix}_{n \times n}$$

onde M e $a \neq 0$ são números reais. Mostre que
a) Os autovalores de $\mathbf{A}$ são
$\lambda = M - a$ com multiplicidade $n - 1$
e $u = M + (n - 1)a$
b) $\det \mathbf{A} = (M - a)^{n-1} \cdot [M + (n - 1)a]$

(Este é um caso particular da situação estudada no artigo "sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável" de Odelar Leite Linhares, publicado na revista Ciência e Cultura (SBPC) volume 29, número 8, de agosto de 1.977.)

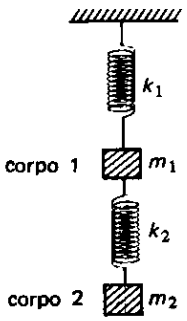
14. Utilize a forma diagonal para encontrar $\mathbf{A}^n$ nos seguintes casos (n natural):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Você pode generalizar o seu procedimento para o caso de uma matriz quadrada qualquer? Quais são as condições?

Biblioteca de Ciência & Tecnologia UFRJ

***15.** Considere o sistema mecânico mostrado na figura abaixo



Utilizando os procedimentos da secção 7.1.5 estude a vibração do sistema quando ele é tirado da posição de equilíbrio. Resolva completamente descrevendo o comportamento do sistema no caso em que $m_1 = 0{,}5$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $k_1 = 1{,}2\frac{N}{m}$, $k_2 = 1{,}8\frac{N}{m}$. Os deslocamentos iniciais dos corpos 1 e 2 são, respectivamente, 0,1 m para cima e 0,2 m para baixo.

7.5.1 Respostas

1. 6.3.2; 6.3.3; 6.3.4 e 6.3.8 são diagonalizáveis.

2. 6.3.9; 6.3.10; 6.3.13; 6.3.14; 6.3.16 e 6.3.17 são diagonalizáveis.

3. *a*) Não

b) $p(x) = (2 - x)^2\ (3 - x)$

5. *a*) $a \neq 1$

b) $a = 0$

6. *a*) $p(\lambda) = (2 - \lambda)\ (3 + \lambda)^2$; $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = (x, 0, 0)$; $\lambda_2 = -3$, $\mathbf{v}_2 = (0, y, 0)$

b)
$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad p(\lambda) = (2 - \lambda)(3 + \lambda)^2$$

O polinômio característico é independente da base.

c) Não existe.

8.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

10. *a*) $\lambda = 0$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Se T fosse diagonalizável, existiria uma base β tal que os autovalores estivessem na diagonal de $[T]_\beta^\beta$, uma matriz diagonal. Mas os únicos autovalores de T são 0 (veja *a*), e logo, $[T]_\beta^\beta = \mathbf{0}$. É dizer, T seria nulo, o que não está de acordo com a hipótese.

11. *a*) $\lambda = 0$ ou 1

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) Como $T^2\mathbf{v} = T\mathbf{v}$, $(T^2 - T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja, $T^2 - T = \mathbf{0}$
Seja $p(x) = x^2 - x = x(x - 1)$. Então $p(T) = 0$
Como os autovalores de T são 0 e 1, o polinômio característico de T é da forma $p(\lambda) = (-\lambda)^n\ (1 - \lambda)^m$. Então $p(x)$ é o polinômio minimal de T e como os fatores lineares são distintos, T é diagonalizável.

14. *a*) Note que se temos uma matriz diagonal então $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$. Diagonalize, então, a matriz A calculando os autovalores e autovetores respectivos (é possível fazer isto), bem como a matriz de mudança de base. Utilizando 5.4.10 pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Portanto

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 + 2^{n+2} & 4 - 2^{n+2} \\ -1 + 2^n & 4 - 2^n \end{bmatrix}$$

b) É similar ao anterior.