Portanto $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico é $P(\lambda) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)$ e os autovalores serão, portanto, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Calculemos os autovetores associados:

i) $[T]^{\alpha}_{\alpha} \cdot [\mathbf{v}]_{\alpha} = 1[\mathbf{v}]_{\alpha}$ o que implica $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3a \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$

ii) $[T]^{\alpha}_{\alpha} [\mathbf{v}]_{\alpha} = -2[\mathbf{v}]_{\alpha}$ o que implica $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbf{R}$

Assim, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são da forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{w}_1 + 3a\mathbf{w}_2 = 13a + 4ax, \quad \forall a$$

Ainda, os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são da forma

$$\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = 4b + bx$$

6.2.8 Vamos aproveitar os exemplos de 6.2.5 para introduzir o conceito de multiplicidade de um autovalor. Chamamos de ***multiplicidade algébrica de um autovalor*** a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. No Exemplo 1 de 6.2.5 o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 2. (Ou ainda, 3 é uma raiz dupla do polinômio característico.)

No Exemplo 2 o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade algébrica 2.

Observe que no Exemplo 1 encontramos para o autovalor $\lambda_1 = 3$ autovetores do tipo $\mathbf{v} = (x, y, 0)$. Note que $\{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3; x, y \in \mathbf{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e portanto a dimensão deste subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ é 2 (dois vetores LI). Neste caso dizemos que a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 3$ é 2. Mais precisamente, a ***multiplicidade geométrica de um autovalor*** λ é a dimensão do subespaço $\mathbf{V}_{\lambda}$ de autovetores associados a λ. No Exemplo 2, o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade geométrica 1, visto que a dimensão de $\{(x, 0, 0); x \in \mathbf{R}\} = \{x(1, 0, 0); x \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0)]$ é 1. Observe ainda que se a multiplicidade algébrica de um autovalor for 1, a multiplicidade geométrica será necessariamente igual a 1.

6.3 EXERCÍCIOS

1. Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

   $(x, y) \mapsto (y, 2y)$.

   Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de T e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

2. $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

3. $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

4. $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

5. $T: P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

6. $T: M_2 \to M_2$ tal que $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}'$ (Isto é, T é a transformação que leva uma matriz na sua transposta.)

7. $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

8. Encontre a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de **A** de um espaço vetorial:
a) Real *b*) Complexo

20. Se λ é autovalor da transformação linear $T: V \to V$ e $\mathbf{v}$ é um autovetor associado a ele, mostre que
a) $k\mathbf{v}$ é outro autovetor associado a λ se $k \neq 0$.
b) O conjunto formado pelos autovetores associados a λ e o vetor nulo é subespaço de V.

21. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Mostre que
a) Os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ correspondentes são LI.
b) $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ são LI.

22. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Ache os autovalores de **A** e de $\mathbf{A}^{-1}$.
b) Quais são os autovetores correspondentes?

23. Suponha que λ seja autovalor de $T: V \to V$ com autovetor $\mathbf{v}$ e α um número não nulo. Ache os autovalores e autovetores de αT.

24. Suponha que $\mathbf{v} \in V$ seja autovetor de $T: V \to V$ e $S: V \to V$, ao mesmo tempo com autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente. Ache autovetores e autovalores de
a) $S + T$. *b*) $S \circ T$.

25. Seja $T: V \to V$ linear
a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.
b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

26. Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis.
a) Calcule **AB** e **BA** e observe que estes produtos são distintos.
b) Encontre os autovalores de **AB** e os de **BA**. O que você observa?

c) Encontre os autovetores de **AB** e os de **BA**. O que você nota?
d) Motivado pelos itens anteriores, mostre que: se **A** e **B** são matrizes inversíveis de mesma ordem, os autovalores de **AB** e **BA** são os mesmos. Mostre mais ainda: se λ_1 é um autovalor de **AB** com autovetor **v**, então λ_1 é autovalor de **BA** com autovetor B**v**. Da mesma forma, se λ_2 é um autovalor de **BA** com autovetor **w**, então λ_2 é autovalor de **AB** com autovetor A**w**.

6.3.1 Respostas

3. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\mathbf{v}_1 = (x, \sqrt{2}x)$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\mathbf{v}_2 = (x, -\sqrt{2}x)$

5. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = ax^2 + bx + b$

7. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0, w)$

8. $T(x, y) = (-6y, -x + y)$

9. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (x, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (-y, y)$

11. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$

13. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (-y, y, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (x, 2x, -x)$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

16. $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{v}_1 = (y - z, y, z)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{v}_2 = (x, 0, x)$ ou $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{v}_1 = (y, y, 0)$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_2 = (-z, 0, z)$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

17. $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{v}_1 = (2y - 7z, y, z)$; $\lambda_2 = 9$, $\mathbf{v}_2 = (x, x, x)$

18. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (0, y, 0, -y)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = (x, 0, -2x, 0)$; $\lambda_3 = 6$, $\mathbf{v}_3 = (x, 0, 4x, 0)$

19. *a*) $\lambda = -2$, $\mathbf{v} = (2x, x, -x)$
b) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = (2x, x, -x)$; $\lambda_2 = i$, $\mathbf{v}_2 = [(-1 + i)y, y, (1 + i)y]$; $\lambda_3 = -i$, $\mathbf{v}_3 = [(-1 - i)y, y, (1 - i)y]$

22. *a*) Os de **A** são -1 e 2; os de $\mathbf{A}^{-1}$, -1 e $\frac{1}{2}$.
b) Os de **B** são $(-2y, y)$ e $(x, 2x)$; os de $\mathbf{A}^{-1}$, $(-2y, y)$ e (x, x)

23. Autovalor $\alpha\lambda$ com autovetor **v**.