ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $[-5\ 2\ 1\ 0]'$ e $[1\ -1\ 0\ 1]'$ são soluções do sistema obtidas da seguinte forma: a primeira, fazendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, e a segunda, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Elas são chamadas *soluções básicas* do sistema porque geram todas as outras. Todo sistema homogêneo tem solução que pode ser escrita desta forma. Basta reduzir o sistema, observar as variáveis livres e atribuir valores 1 para uma delas e zero para as outras, obtendo as soluções básicas (tantas quanto o grau de liberdade). A solução será uma soma destas soluções multiplicadas por constantes.

Exemplo 2: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

que reduzida torna-se $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Reinterpretando, vemos que y e z são variáveis livres.

Fazendo $y = \lambda_1$ e $z = \lambda_2$, temos

$$\begin{aligned} x &= -3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \end{aligned}$$

As soluções básicas são então: $x = -3$, $y = 1$, $z = 0$ e $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. Assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$

A matriz associada é

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ que reduzida à forma escada torna-se

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Reinterpretando, vemos que z e t são livres.

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compare com o exemplo 1. O que você nota?

2.6 EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, que estão na forma escada reduzida por linhas.

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6. Determine k, para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:
   i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
   ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.
   iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

   a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

   b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

10. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

11. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição *b*) de 2.4.1, que passa a ser: *b'*) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, *c* e *d* são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{5}{2} \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

18. *a*) Mostre a proposição 2.4.3 para matrizes 2 × 2 quaisquer.
b) Sinta a dificuldade que você terá para formalizar o resultado para matrizes $n \times m$, mas convença-se de que é só uma questão de considerar todos os casos possíveis, e escreva a demonstração. Consulte 2.7.

19. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
b) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

Note que podemos escrevê-lo na forma matricial

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que a matriz $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

b) Resolva o sistema e verifique que toda "matriz-solução" é da forma

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in R$.

c) Verifique

$$\lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo, associado ao sistema (*),

$$(**) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Conclua, dos itens *a*), *b*) e *c*), que o conjunto-solução do sistema * é o conjunto-solução do sistema **, somado a uma solução particular do sistema *.

21. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua valores para x, y, z e w.)
b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.
c) Resolva também o sistema homogêneo associado.
d) Verifique que toda matriz-solução obtida em *b*) é a soma de uma matriz-solução encontrada em *c*) com a solução particular que você encontrou em *a*).

22. Altamente motivado pelos Exercícios 20 e 21, mostre que toda matriz-solução de um sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é a soma de uma solução do sistema ho-

mogêneo associado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ com uma solução particular de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Sugestão: siga as etapas seguintes, usando somente propriedades de matrizes.

i) Mostre que se $\mathbf{X}_0$ é uma solução do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{X}_1$ é uma solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

ii) Se $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são soluções de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

iii) Use *i*) e *ii*) para chegar à conclusão desejada.

23. Faça o balanceamento das reações:

a) $N_2O_5 \rightarrow NO_2 + O_2$ (decomposição térmica do N_2O_5)
b) $HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$ (dissolução do vidro em HF)
c) $(NH_4)_2CO_3 \rightarrow NH_3 + H_2O + CO_2$

24. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a) Discuta a solução do sistema.
b) Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema incompatível.

25. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) de cada alimento, determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.
ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.
iii) O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.
iv) O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.
v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

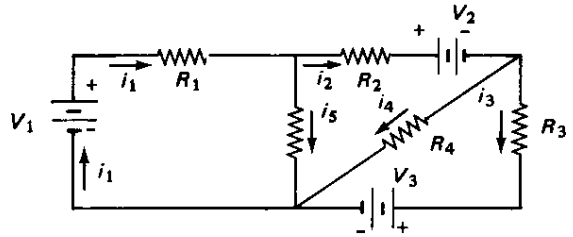
26. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada $10\,m^2$ 140 g de nitrato, 190 g de fosfato e 205 g de potássio.

Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

i) Cada quilograma do adubo I custa 5 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio.
ii) Cada quilograma do adubo II custa 6 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.
iii) Cada quilograma do adubo III custa 5 u.c.p. e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.
iv) Cada quilograma do adubo IV custa 15 u.c.p. e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar 54 u.c.p. a cada $10\,m^2$ com a adubação?

27. Deseja-se construir um circuito como o mostrado na figura,



onde $V_1 = 280$ V, $V_2 = 100$ V, $V_3 = 50$ V, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 100\Omega$.

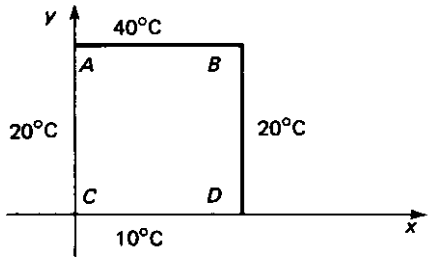
Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

corrente máxima		resistências 20Ω	30Ω	40Ω	50Ω	100Ω
	0,5 A	10,00	10,00	15,00	15,00	20,00
	1,0 A	15,00	20,00	15,00	15,00	25,00
	3,0 A	20,00	22,00	20,00	20,00	28,00
	5,0 A	30,00	30,00	34,00	34,00	37,00

De que tipo devemos escolher cada resistência para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de menor custo possível?

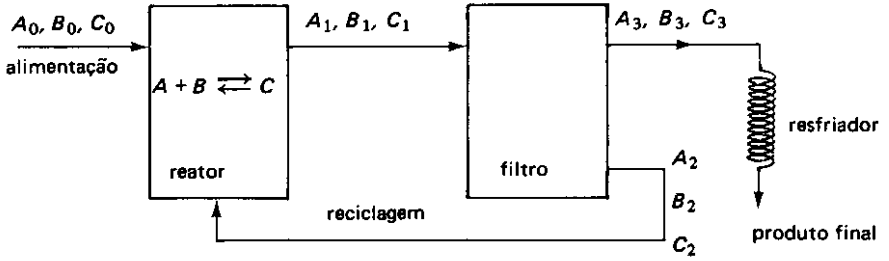
Biblioteca de Ciência & Tecnolog

28. Uma placa quadrada de material homogêneo é mantida com os bordos AC e BD à temperatura de 20°C, o bordo AB a 40°C e CD a 10°C, com o uso de isolantes térmicos em A, B, C e D (vide figura).



Após ser atingido o equilíbrio térmico, qual é a temperatura aproximada em cada ponto da placa?

29. Consideremos uma unidade de produção (muito simplificada) de um processo de produção industrial de um determinado composto C a partir de certos compostos A e B (segundo a reação química $A + B \rightleftarrows C$):



$A_0 = 100$ kg/h, $B_0 = 100$ kg/h, $C_0 = 10$ kg/h são os fluxos de alimentação, isto é, a quantidade de material jogada dentro da unidade de produção por hora, enquanto que A_i, B_i e C_i são os fluxos em cada estágio da produção. Sabe-se, ainda que:

i) No reator a reação processa-se em condições tais que a quantidade de A após a reação é 0,487 da sua quantidade antes da reação, enquanto a de B é 0,266 e a de C é 4,675 de suas respectivas quantidades antes da reação.

ii) Baseado no fato do ponto de ebulição de C ser inferior ao de A e B, o filtro constitui-se de um destilador. Dessa forma o vapor dentro do filtro tem maior concentração de C do que A e B, e é continuamente retirado do filtro, sendo levado para um resfriador do qual obtemos o produto final. Enquanto isso a parte não vaporizada no destilador é levada de volta ao reator para ser reciclada. Tem-se a informação de que a quantidade de A em forma de vapor dentro do filtro é, em um determinado instante, 0,5854 da quantidade de A presente naquele instante na parte não vaporizada, enquanto que para B e C estas relações são 1,50 e 1,07 respectivamente.

Deseja-se saber qual é o grau de concentração de C no produto final se a unidade opera em condição estacionária (isto é, os fluxos de A, B e C não mudam com o tempo em cada estágio), sabendo que a concentração de C_1 na mistura que passa do reator para o filtro é de 68%.

2.6.1 Respostas

1. $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 5$

3. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $x = \frac{7}{16}, \quad y = -\frac{1}{16}, \quad z = \frac{17}{8}$

7. $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5$
$x_3 = 2 + x_5$
$x_4 = 3 + 2x_5$

9. *a*) Sejam x, y e z as quantidades de alimentos I, II e III respectivamente. Então

$x = -5 + 3z, \quad y = 8 - 3z \quad$ onde $\frac{5}{3} \leqslant z \leqslant \frac{8}{3}$

b) Sim. $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2$

11. $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z, \quad y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$
$p_a = 2 = p_c, \quad g.l. = 1$

13. $p_a = 2 = p_c, \quad g.l. = 1, \; x = 3z, \; y = 0$

15. $p_a = 3 = p_c, \quad g.l. = 0, \; x = y = z = 0$

19. *a*) $x_i = 0$ *b*) $k = 2$