Graduação em Matemática Industrial

Programação Linear - Parte 1

Prof. Thiago Alves de Queiroz
Departamento de Matemática - CAC/UFG

1/2014

Introdução

- Programação Linear: uso de técnicas matemáticas e computacionais para resolver problemas de otimização linear;
- A otimização refere-se ao estudo de problemas que buscam minimizar ou maximizar uma função através da escolha de valores para as suas variáveis, dado um domínio para estas variáveis;
- O objetivo é *lidar* com os problemas de programação/otimização linear;

O termo *lidar*, neste contexto, busca por:

- Entender o problema real: objetivos e restrições;
- Desenvolver um modelo de otimização: linear;
- Aplicar um método de resolução no modelo proposto;
- Processar a solução obtida e, então, tomar uma decisão acerca do problema inicial.

Breve Histórico

- O termo programação linear foi sugerido por Koopmans a George Dantzig;
- Dantzig, trabalhando no pentágono em 1947, desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para resolver problemas de programação linear;
- O matemático russo Leonid Kantorovich já havia introduzido muito da teoria da programação Linear, em 1939;
- A partir de então, vários trabalhos sobre o tema apareceram, incluindo novos métodos e problemas;

Modelagem

- A matemática tem grande importância na descrição de fenômenos, pois busca estabelecer leis que os regem;
- Essas leis, sendo descritas por relações matemáticas, dão origem aos modelos matemáticos;

O termo modelo, objeto abstrato:

- Imita as principais características de um objeto real com o intuito de representá-lo;
- É uma representação simplificada do problema real;
- Deve ser detalhado a ponto de captar os elementos essenciais do problema;
- Deve ser tratável por métodos de resolução.

O Processo de Modelagem

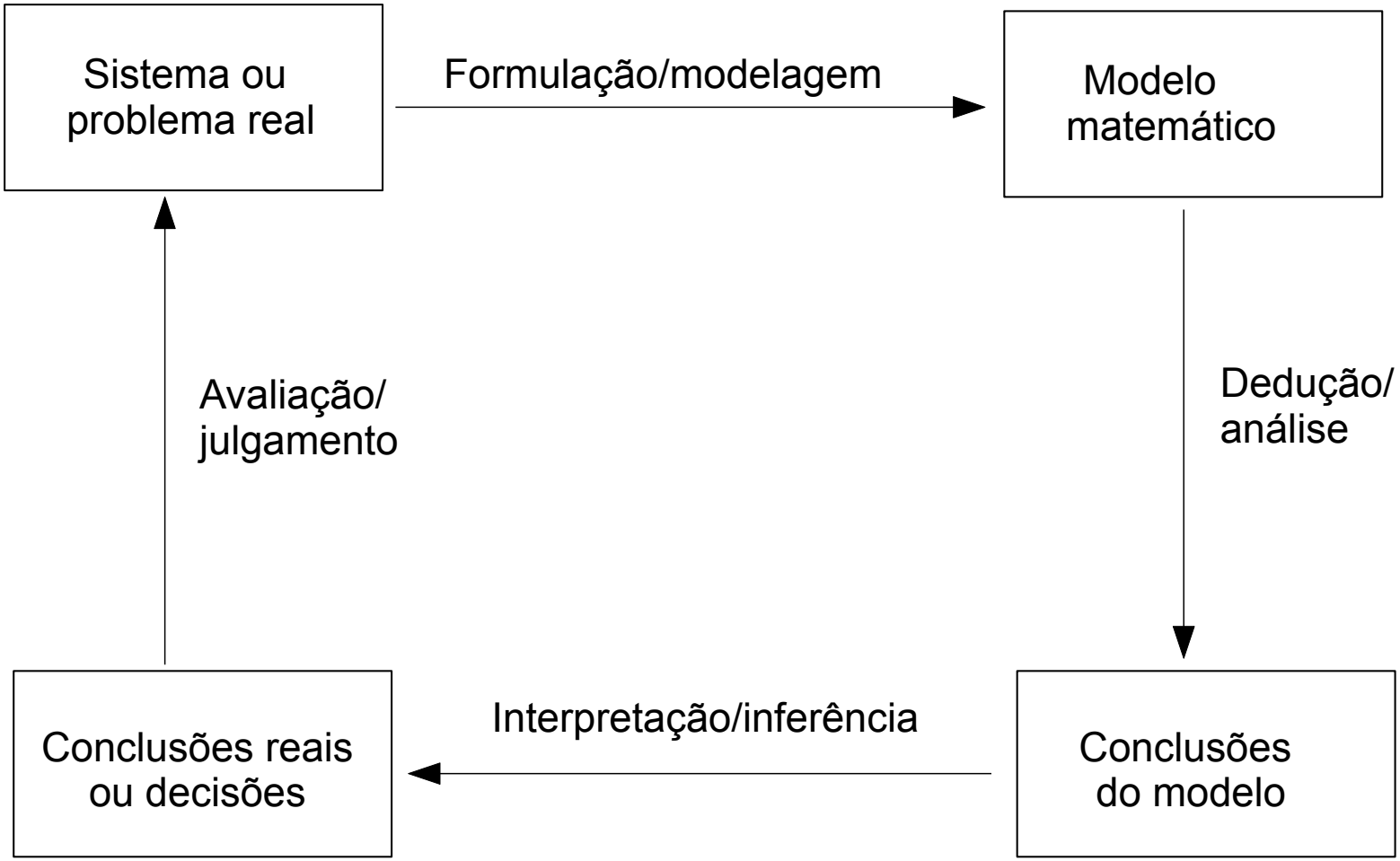

Figura : O processo de modelagem.

Os Modelos Matemáticos

- Formulação: define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento relevante do problema real;
- Dedução: aplica técnicas matemáticas e tecnologia para resolver o modelo e chegar em sua solução;
- Interpretação: argumenta se as conclusões retiradas do modelo têm significado suficiente para decisões sobre o problema real;
- Avaliação: mostra que as conclusões do modelo podem não ser adequadas para o problema real. Então, é preciso redefinir o problema e/ou refazer o modelo;

Modelos matemáticos incluem os de programação/otimização matemática, como:

- programação linear (otimização linear);
- programação linear inteira (otimização discreta);
- programação em redes (otimização em redes);
- programação não-linear (otimização não-linear).

A modelagem na Programação Linear

Envolve três aspectos fundamentais:

- Definição das *decisões* a serem tomadas;
- *Restrições* que limitam a escolha das decisões;
- *Objetivo* que determina a preferência na escolha das decisões.

- Quais decisões devem ser tomadas?
- Quais restrições afetam nestas decisões?
- O que faz uma decisão ser melhor do que a outra?
- Perguntas como estas (e suas respostas) permitem entender o que o problema quer.

O modelo genérico

$$\begin{array}{l} \textit{Otimizar } z = f(x) \qquad (i) \\ \textit{sujeito a} \begin{cases} Ax \geq B \qquad (ii) \\ x \geq 0. \qquad (iii) \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

- (i) representa a função objetivo, que busca maximizar ou minimizar z;
- (ii) representa as restrições, ou seja, a limitação no uso dos recursos;
- (iii) são as restrições que representam o domínio das variáveis: não-negativas (que é o caso), inteiras, binárias, etc;
- As variáveis são representadas pelo vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e representam as decisões a serem tomadas.

As soluções

- Solução viável (factível): é uma escolha para os valores das variáveis que satisfaz todas as restrições;
- Solução ótima: é uma solução viável que maximiza/minimiza a função objetivo;
- Método exato (ótimo): é aquele que gera uma solução ótima;
- Método heurístico (não-exato): é aquele que gera uma boa solução para o problema;
- Podem existir múltiplas soluções ótimas, porém todas com o mesmo valor da função objetivo;
- Para um modelo, determinar uma solução ótima em tempo computacional razoável pode ser difícil ou até impossível com as ferramentas e técnicas atuais.

Otimização Linear

- Modelos de otimização linear têm sido amplamente utilizados na prática;
- Os modelos de programação linear possuem todas as funções (objetivo e restrições) lineares, isto é,
  $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$;
- Algumas aplicações surgem na: agricultura, planejamento da produção industrial, logística, telecomunicações, finanças, etc;
- Um método que permite resolver tais modelos e retornar a solução ótima é o *simplex* e o *métodos dos pontos interiores*.

Problemas de Mistura

- Consiste em combinar materiais (matéria-prima) para gerar novos materiais;
- **Exemplo**. Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é envolve a mistura de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe, não sendo necessário usar todos na mistura. Cada um desses ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1 kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com certo custo unitário ($\$/kg$). Os dados do problemas são apresentados na tabela seguinte. Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com custo mínimo.

Problemas de Mistura

Tabela : Dados para o problema da ração.

Nutrientes	Ingredientes			Qtd. mínima na ração
	Osso	Soja	Peixe	
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($\$/kg$)	0,56	0,81	0,26	

Modelando o Problema da Mistura

- (i) Definir as variáveis de decisão: x_j indica a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser utilizado em uma unidade (1 kg) de ração;
- Para j = osso, soja, peixe, tem-se: $x_o, x_s e x_p$, respectivamente;
- (ii) A função objetivo busca minimizar o custo para produzir a ração.
- Minimizar z = $f(x_o, x_s, x_p) = 0,56x_o + 0,81x_s + 0,46x_p$.
- (iii) Existem restrições com relação a quantidade mínima de nutrientes na ração;
- Proteínas: $0,2x_o + 0,5x_s + 0,4x_p \geq 0,3$;
- Cálcio: $0,6x_o + 0,4x_s + 0,4x_p \geq 0,5$.

Modelando o Problema da Mistura

- (iii) Existe uma restrição que diz que a soma dos ingredientes resulta em uma unidade da mistura;
- Produção de 1 unidade da mistura: $x_o + x_s + x_p = 1$;
- (iii) Existem restrições com relação ao domínio das variáveis. Neste caso elas devem ser não-negativas;
- Quantidade de osso: $x_o \geq 0$;
- Quantidade de soja: $x_s \geq 0$;
- Quantidade de peixe: $x_p \geq 0$;

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar } z = 0,56x_o + 0,81x_s + 0,46x_p \\ &\textit{sujeito a}: \begin{cases} 0,2x_o + 0,5x_s + 0,4x_p \geq 0,3 \\ 0,6x_o + 0,4x_s + 0,4x_p \geq 0,5 \\ x_o + x_s + x_p = 1 \\ x_o \geq 0,\ x_s \geq 0,\ x_p \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Problemas de Transporte, Transbordo e Designação

- Referem-se ao transporte ou distribuição de produtos dos centros de produção (origem) aos mercados consumidores (destino);
- O transporte deve respeitar as limitações de oferta e atender à demanda requisita;
- Em alguns problemas, podem-se usar localidades intermediárias (ou de transbordo): depósitos ou centros de distribuição;
- No problema de transbordo, a quantidade que sai do centro intermediário deve ser igual à quantidade de produto que chega dos centros produtores;
- Modelos de transporte podem representar outras situações: existem n tarefas que precisam ser distribuídas a n pessoas (problema de designação).

Problemas de Transporte, Transbordo e Designação

- **Exemplo**. Uma companhia distribuidora de bebidas possui 2 centros de distribuição: Catalão e Ipameri, e 3 mercados consumidores: Brasília, Goiânia e Uberlândia. O custo unitário de se transportar uma unidade do produto de cada centro a cada mercado é dado na tabela abaixo. Nesta tabela também são apresentadas as demandas de cada mercado e a quantidade máxima disponível do produto em cada centro. Determine o modelo de modo que o custo total de transporte seja minimizado.

Tabela : Dados para o problema de transporte.

Centro de distribuição	Mercado consumidor			Qte. de Produto disponíveis
	Brasília	Goiânia	Uberlândia	
Catalão	4	2	5	1000
Ipameri	11	7	4	1200
Demanda do mercado	500	400	900	

Modelando o Problema de Transporte

- (i) Definir as variáveis de decisão: x_{ij} indica a quantidade (em unidade) de produtos enviados do centro de produção i ao mercado j;
- Para i=1 (Catalão), i=2 (Ipameri), j=1 (Brasília), j=2 (Goiânia) e j=3 (Uberlândia), tem-se as variáveis: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$;
- (ii) A função objetivo busca minimizar o custo total de transporte dos centros para os mercados;
- Minimizar z = $4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23}$;
- (iii) Existem restrições com relação a disponibilidade do produto no centro de produção;
- Catalão: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 800$;
- Ipameri: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000$.

Modelando o Problema de Transporte

- (iii) Existem restrições com relação à demanda do mercado, que deve ser exatamente atendida;
- Brasília: $x_{11} + x_{21} = 500$;
- Goiânia: $x_{12} + x_{22} = 400$;
- Uberlândia: $x_{13} + x_{23} = 900$;
- (iii) Existem restrições com relação ao domínio das variáveis. Neste caso elas devem ser não-negativas;
- $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0$;

$$\textit{Minimizar } z = 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23}$$

$$\textit{sujeito a}: \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 800 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000 \\ x_{11} + x_{21} = 500 \\ x_{12} + x_{22} = 400 \\ x_{13} + x_{23} = 900 \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Problemas de Planejamento da Produção

- Problema de *mix* de produção: envolve decidir quais produtos e quanto fabricar de cada produto em um período apenas, visando maximizar o lucro;
- Pode adicionar restrições de chance, que são baseadas em distribuição de probabilidade da demanda do produto;
- As restrições de chance permitem controlar o risco de superproduzir (produzir mais do que a demanda do mercado e incorrer em mais custos);
- Problema de dimensionamento de lotes: envolve decidir o quê e quanto produzir (dimensionar os lotes de produção) em cada período de um horizonte de planejamento;
- Na versão multiestágios do dimensionamento de lotes, um produto demandado requer a produção prévia ou concomitante de seus componentes

Problemas de Planejamento da Produção

- **Exemplo**. Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica. Uma pesquisa de mercado indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa dispõe de 25.000 homens-hora por mês e tem capacidade máxima de produção de 4.500 geladeiras por mês. Cada modelo luxo requer 10 homens-hora e cada modelo básico requer 8 homens-hora para serem montadas. O lucro unitário do modelo luxo é de R$ 100 e do modelo básico é de R$ 50. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

Modelando o Problema de *Mix* de Produção

- (i) Definir as variáveis de decisão: x_j indica a quantidade (em unidade) de geladeiras do tipo j a ser produzida no mês;
- Para j=b (geladeira Básica) e j=l (geladeira Luxo), tem-se as variáveis: x_b, x_l;
- (ii) A função objetivo busca maximizar o lucro da empresa;
- Maximizar z = $50x_b + 100x_l$;
- (iii) Existe uma restrição com relação à limitação da força de trabalho por mês;
- Força de trabalho: $8x_b + 10x_l \leq 25.000$;

Modelando o Problema de *Mix* de Produção

- (iii) Existe uma restrição com relação à capacidade máxima de produção por mês;
- Capacidade da fábrica: $x_b + x_l \leq 4.500$;
- (iii) Existem restrições com relação ao domínio das variáveis. Neste caso elas são limitadas inferiormente e superiormente;
- $0 \leq x_b \leq 6.000, 0 \leq x_l \leq 1.500$;

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar } z = 50x_b + 100x_l \\ &\textit{sujeito a}: \begin{cases} 8x_b + 10x_l \leq 25.000 \\ x_b + x_l \leq 4.500 \\ 0 \leq x_b \leq 6.000, 0 \leq x_l \leq 1.500. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Problemas de Programação de Projetos

- Busca determinar a ordem em que um conjunto de atividades é realizada, minimizando o tempo para conclusão;
- **Exemplo**. Uma empresa deseja construir pilares de uma edificação, tarefa constituída basicamente por oito atividades relacionadas na tabela abaixo. O projeto se inicia no instante 0.

Tabela : Dados das atividades do projeto.

Atividades	Descrição	Predecessor imediato	Duração (h)
A	Preparo da armadura	–	6
B	Preparo da forma	–	5
C	Lançamento da armadura	A	4
D	Lançamento da forma	B, C	2
E	Providências para concretagem	–	2
F	Aplicação do concreto	E, D	3
G	Cura do concreto	F	72
H	Desforma do Pilar	G	3

Modelando o Problema de Programação de Projetos

- (i) Definir as variáveis de decisão: x_i indica o instante mais cedo em que a atividade i pode ser iniciada;
- Para i=A, B, C, D, E, F, G, H, tem-se as variáveis: $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H$;
- (ii) A função objetivo busca determinar o menor tempo necessário para a conclusão do projeto;
- Minimizar z = $x_H + 3$;
- (iii) Existem restrições com relação as precedências de cada atividade;
- Atividade A: $x_A \geq 0$;
- Atividade B: $x_B \geq 0$;

Modelando o Problema de Programação de Projetos

- Atividade C: $x_C \geq x_A + 6$;
- Atividade D: $x_D \geq x_B + 5$;
- Atividade D: $x_D \geq x_C + 4$;
- Atividade E: $x_E \geq 0$;
- Atividade F: $x_F \geq x_E + 2$;
- Atividade F: $x_F \geq x_D + 2$;
- Atividade G: $x_G \geq x_F + 3$;
- Atividade H: $x_H \geq x_G + 72$;

Modelo do Problema de Programação de Projetos

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimizar } z = x_H + 3 \\
&\textit{sujeito a}: \begin{cases}
x_A \geq 0 \\
x_B \geq 0 \\
x_C \geq x_A + 6 \\
x_D \geq x_B + 5 \\
x_D \geq x_C + 4 \\
x_E \geq 0 \\
x_F \geq x_E + 2 \\
x_F \geq x_D + 2 \\
x_G \geq x_F + 3 \\
x_H \geq x_G + 72
\end{cases}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Problema envolvendo Processos Químicos

- **Exemplo**. A empresa Petro dispõe de duas fontes de petróleo bruto, denominadas de óleo A e óleo B, vendidos em barris. O óleo A custa $28,00/barril e o óleo B, $22/barril. As quantidades disponíveis para compra são de 10.000 barris/dia e 7.000 barris/dia, respectivamente. Esses óleos podem passar por dois processos sucessivos, sem perda de volume: primeiro uma destilação simples que agrupa os óleos em suas frações leves e pesadas, as quais podem ser vendidas ou processadas novamente. O segundo processo é um craqueamento que os transforma em dois produtos finais: gasolina e diesel. As tabelas abaixo indicam as proporções resultantes.

Tabela : porcentagem das frações por tipo de óleo.

Tipo de óleo	Frações leves	Frações pesadas
óleo A	25%	75%
óleo B	78%	22%

Problema envolvendo Processos Químicos

Tabela : porcentagem de gasolina e diesel por fração.

Tipo de fração	Gasolina	Diesel
Frações leves	80%	20%
Frações pesadas	35%	65%

- Sabe-se que as frações leves podem ser vendidas a \$20/barril e as pesadas, por \$27/barril. A gasolina é vendida por \$35/barril, enquanto o diesel é vendido a \$30/barril. Deseja-se determinar o planejamento de produção de maximiza o lucro líquido.

Modelando o Problema de Processos Químicos

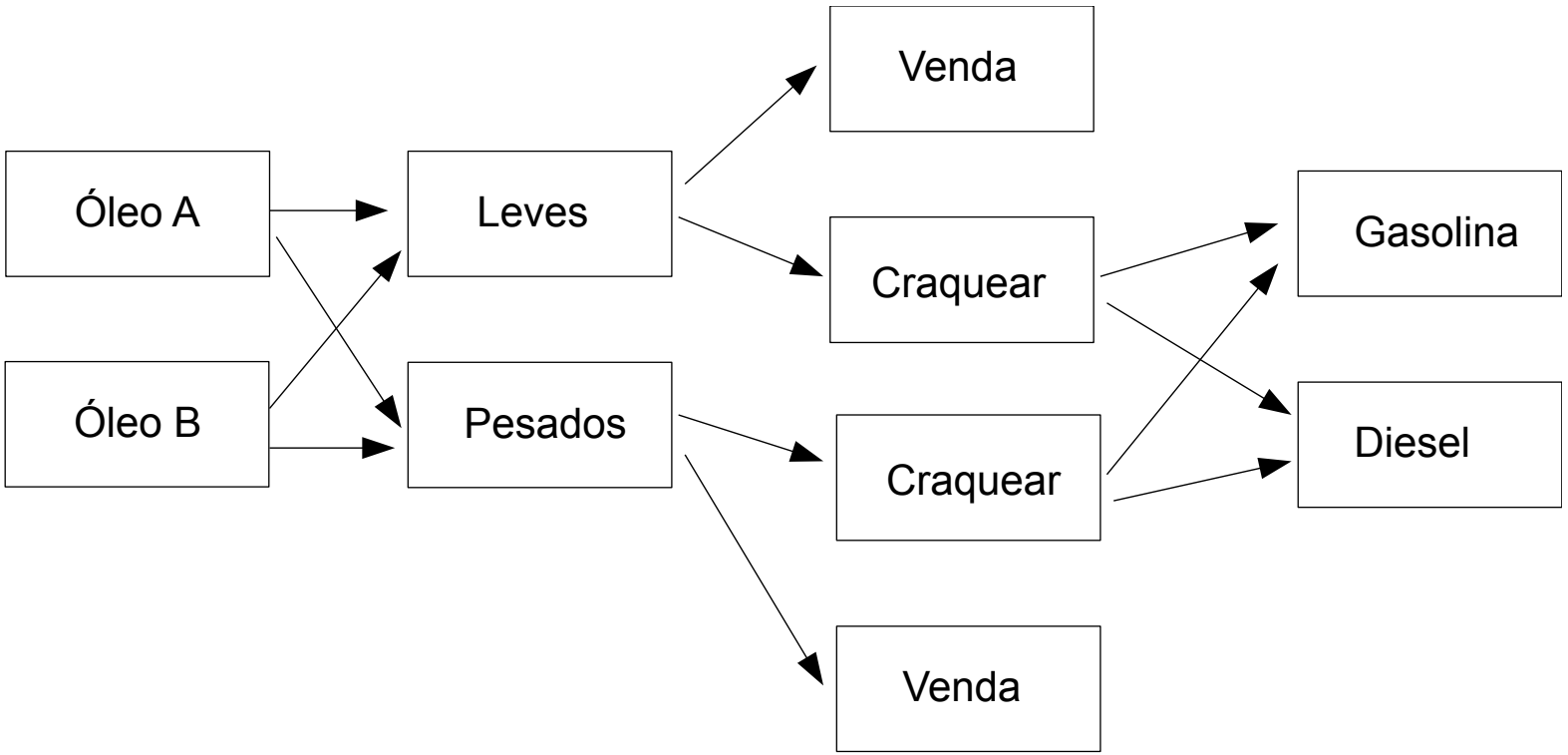

Figura : Fases da produção.

Modelando o Problema de Processos Químicos

- (i) Definir as variáveis de decisão, que envolvem o quanto foi comprado/produzido em cada fase;
- x_A indica a quantidade (em barris) do óleo A comprado;
- x_B indica a quantidade (em barris) do óleo B comprado;
- x_{FL} indica a quantidade (em barris) das Frações Leves produzidas;
- x_{FP} indica a quantidade (em barris) das Frações Pesadas produzidas;
- x_{LV} indica a quantidade (em barris) das frações Leves Vendidas;
- x_{PV} indica a quantidade (em barris) das frações Pesadas Vendidas;
- x_{LC} indica a quantidade (em barris) das frações Leves Craqueadas;
- x_{PC} indica a quantidade (em barris) das frações Pesadas Craqueadas;
- x_G indica a quantidade (em barris) de gasolina produzida;
- x_D indica a quantidade (em barris) de diesel produzido.

Modelando o Problema de Processos Químicos

- (ii) A função objetivo busca maximizar lucro líquido obtido com a venda dos produtos e considerando a compra da matéria-prima;
- Maximizar z = $20x_{LV} + 27x_{PV} + 35x_G + 30x_D - 28x_A - 22x_B$;
- (iii) Existem restrições com relação à quantidade de frações leves e pesadas produzidas que devem ser iguais à quantidade de óleos processados;
- Fração leve produzida: $x_{FL} = 0,25x_A + 0,78x_B$;
- Fração pesada produzida: $x_{FP} = 0,75x_A + 0,22x_B$;
- (iii) Existem restrições com relação à quantidade de frações leves e pesadas que são vendidas e craqueadas que devem ser iguais à quantidade de frações produzidas;
- Fração leve: $x_{FL} = x_{LV} + x_{LC}$;
- Fração pesada: $x_{FP} = x_{PV} + x_{PC}$;

Modelando o Problema de Processos Químicos

- (iii) Existem restrições com relação à quantidade de gasolina que é produzida que devem ser iguais à quantidade de frações craqueadas;
- Gasolina: $x_G = 0,8x_{LC} + 0,35x_{PC}$;
- Diesel: $x_D = 0,2x_{LC} + 0,65x_{PC}$;
- (iii) Existem restrições com relação à quantidade de óleo do tipo A e B que estão disponíveis por dia;
- óleo tipo A: $x_A \leq 10.000$;
- óleo tipo B: $x_B \leq 7.000$;
- (iii) Existem restrições com relação ao domínio das variáveis. Neste caso elas devem ser não-negativas;
- $x_i \geq 0$, para i = A, B, FL, FP, LV, PV, LC, PC, G, D.

Modelo do Problema de Processos Químicos

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maximizar } z = 20x_{LV} + 27x_{PV} + 35x_G + 30x_D - 28x_A - 22x_B \\
&\textit{sujeito a}: \begin{cases}
x_{FL} = 0,25x_A + 0,78x_B \\
x_{FP} = 0,75x_A + 0,22x_B \\
x_{FL} = x_{LV} + x_{LC} \\
x_{FP} = x_{PV} + x_{PC} \\
x_G = 0,8x_{LC} + 0,35x_{PC} \\
x_D = 0,2x_{LC} + 0,65x_{PC} \\
x_A \leq 10.000 \\
x_B \leq 7.000 \\
x_i \geq 0, \ \textit{para } i = A, B, FL, FP, LV, PV, LC, PC, G, D.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}
$$