

GEOMETRIA E ÁLGEBRA:

Uma Proposta de Ensino

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda,
é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

GEORGE POLYA

VANDA DOMINGOS VIEIRA

GEOMETRIA E ÁLGEBRA:

Uma Proposta de Ensino

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Educação Escolar Brasileira da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Magda Ivonete Montagnini

GOLÂNIA

1997

VANDA DOMINGOS VIEIRA

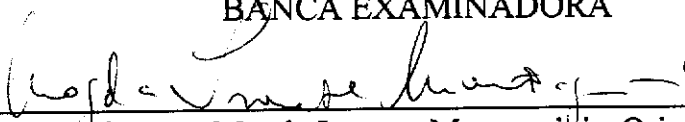
GEOMETRIA E ÁLGEBRA:

Uma Proposta de Ensino


Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Educação Escolar Brasileira da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre.

Aprovado em _____ de 1997

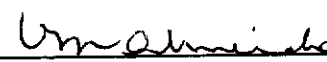
BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Magda Ivonete Montagnini - Orientadora
Universidade Federal de Goiás



Prof. Dr. Genésio Lima dos Reis
Universidade Federal de Goiás



Profa. Dra. Vera Maria de Moura Almeida
Universidade Federal de Goiás

À minha família: José Vieira, Janáina, Robson e
Janine, que me incentivaram e apoiaram, dedico este
trabalho com uma eterna gratidão.

Expresso os meus agradecimentos às pessoas e Instituições que de algum modo contribuíram para a realização deste estudo. E particularmente à Profa. Dra. Magda Ivonete Montagnini por seu interesse, por sua paciência em ler, discutir e apresentar sugestões que contribuíram significativamente para a realização deste estudo.

RESUMO

Após uma reflexão sobre a tão problemática aprendizagem dos princípios geométricos e a dificuldade na compreensão e resolução de problemas no Ensino Fundamental, buscou-se desenvolver uma proposta para a 7.^a série, em que o aluno, por si próprio, pudesse propor problemas e, depois, resolvê-los, sempre estabelecendo ligações com situações da vida prática. O ensino de matemática deveria integrar os conteúdos da geometria e da álgebra, haja vista que a desvinculação desses conteúdos tem contribuído para o fracasso do processo ensino-aprendizagem. Com base em referenciais teóricos, procurou-se delimitar os conteúdos a serem analisados, optando-se por “área de figuras planas”, em função da inter-relação entre a geometria e a álgebra. Conceituadas geometricamente as figuras planas (quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo), os alunos, após várias etapas, foram orientados a expressar algebricamente suas áreas. As 15 atividades propostas terminam com a possibilidade de aplicações práticas desse ensino integrado. Analisados os resultados obtidos com a nova proposta de ensino, comprovou-se que houve um maior aprofundamento dos diversos conteúdos e que a experiência permitiu uma maior compreensão da álgebra, considerada muito difícil pelos alunos. O espaço experimental desta pesquisa foi o Centro de Pesquisas Aplicadas à Educação (CEPAE), da Universidade Federal de Goiás, onde a autora desta dissertação leciona matemática há vários anos.

ABSTRACT

After thinking over the troublesome learning of the geometrical principles as well as the difficulty of understanding and solving problems in high school, we tried to present a proposal for the 7th grade. It emphasized that the student should make problems and, afterwards, solve them. These problems should base on everyday situations. The teaching of mathematics should involve the contents of geometry and algebrics, because the separation of these contents has contributed to the failure of the teaching and learning process. Basing on theorethical references, we chose a content to be analyzed – areas of plane figures –, due to the evident inter-relation between geometry and algebrics. After establishing the geometrical concepts of plane figures (square, rectangle, triangle, parallelogram), the students were taught to express the areas algebraically. The fifteen activities of the proposal reinforce the practical application of the integrated teaching. The results showed the efficacy of the proposal, because most of the students had a better understanding of algebrics. This proposal was experienced at Centro de Pesquisas Aplicadas à Educação (CEPAE), where we have taught mathematics for several years.

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS	10
CAPÍTULO I	17
1. O ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	18
CAPÍTULO II	44
2. PROGRAMA DE ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA: UMA PROPOSTA	45
2.1 – CONTEÚDOS DO PROGRAMA DE ENSINO INTEGRADO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA	47
2.1.1 – CONTEÚDOS DA GEOMETRIA	48
2.1.2 – CONTEÚDOS DA ÁLGEBRA	54
2.2 – METODOLOGIA DE ENSINO: ÊNFASE À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	55
2.2.1 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	59
CAPÍTULO III	86
RESULTADOS ALCANÇADOS	87
CONCLUSÃO	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dificuldades na aprendizagem dos princípios geométricos e na compreensão e resolução de problemas são constatações rotineiras nas salas de aula do Ensino Fundamental (5.^a a 8.^a séries). Como consequência observa-se um grande número de alunos desmotivados e um número espantoso de reprovações em matemática.

Estas preocupantes ocorrências foram os elementos norteadores deste trabalho, que tem como finalidade apresentar sugestões para o processo ensino-aprendizagem da matemática, valorizando as analogias, as combinações de procedimentos, a generalização de situações como elementos de importância fundamental.

Dentro desta proposta o aluno deve desenvolver por si próprio a capacidade de discutir conteúdos, propor problemas e resolvê-los, pois só assim a aprendizagem da matemática adquirirá um caráter formativo. Despertar a imaginação, exercitar o poder de abstrair e generalizar fazem da geometria um conteúdo matemático apropriado para ensinar a resolver problemas. Deve-se salientar que abstrair e generalizar em matemática envolvem uma constante simbologia, especialmente no ensino da álgebra.

Desde as séries iniciais o aluno deve aprender a interpretar problemas matematicamente para se preparar para construções de esquemas formais, equações ou sistema de equações que representam as relações entre os elementos reais a que o problema se refere.

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta para revisar conteúdos da geometria e a partir desta integrar o ensino dos conteúdos algébricos, contribuindo para um crescimento qualitativo no processo de ensino-aprendizagem dos mesmos. Para este estudo considerou-se a literatura publicada referente ao assunto, tais como os referenciais teóricos, que a seguir se apresentam.

Deguire (1994, p. 73) faz referência à geometria dizendo que “É possível citar muitas razões para que se estude geometria nas séries elementares e médias. Uma delas é a oportunidade que a geometria oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas.”

A geometria no Ensino Fundamental deve ser ensinada a partir da construção e do manuseio de figuras geométricas sólidas e planas, tendo em vista a construção de um pensamento geométrico, que pode ser reformulado à medida que novas situações surjam e contribuam para o desenvolvimento das habilidades de observar, perceber, construir, analisar e sintetizar.

Deguire (1994, p. 73) afirma que “materiais de manipulação fornecem oportunidades para raciocinar com objetos e, portanto, para ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas”.

Polya (1978, p. 82) diz que “figuras são não apenas o objeto dos problemas geométricos, como também um importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométrico na sua origem.” Assim, “se o nosso for um problema

geométrico, teremos que considerar uma figura, que pode estar em nossa imaginação ou ser desenhada no papel.”

O ensino de geometria deve levar o aluno à investigação, à descoberta de novos caminhos que lhe possibilitem a passagem do pensamento concreto para o abstrato quando ele chega às últimas séries do Ensino Fundamental, proporcionando-lhe o exercício de aprender e de aprender a pensar.

Perez (1991, p. 21) cita Pororélov que assim se expressa:

“Ao oferecer um curso de geometria, partimos de que a tarefa essencial consiste em ensinar o aluno a raciocinar logicamente, argumentar e demonstrar suas afirmações. Muito poucos dos egressos da escola serão matemáticos e muito menos geômetras. Também haverá os que não utilizarão nenhuma vez, em sua atividade prática, o Teorema de Pitágoras. Porém dificilmente se achará um só que não deva raciocinar, analisar ou demonstrar.”

Considerando o exposto pelos autores anteriormente citados e o apreendido nas demais revisões literárias realizadas, acredita-se que um dos caminhos para a melhoria da qualidade do ensino da matemática é o aprimoramento do ensino da geometria. A concretização de tal pensamento pressupõe que a forma de ensinar geometria deve estar inserida nos objetivos gerais do trabalho escolar. Em outras palavras, a definição dos objetivos do ensino de geometria e a sua melhor forma de apresentação aos alunos devem ser

feitas no planejamento escolar do ano letivo por toda equipe de educadores da área de matemática.

Executar o planejamento de ensino em conjunto se justifica por tornar viável: (a) a adequação da quantidade de conteúdos de cada série no transcorrer do ano letivo preservando a carga horária estabelecida para cada disciplina sem desconsiderar o papel social da escola; (b) a adoção ou não de determinado livro didático; (c) a definição também do replanejamento escolar que pode ocorrer durante ou no final de cada escala¹ com o objetivo de propor novas formas de ação no sentido de superar questões como dificuldades de aprendizagem que ocorrem devido à heterogeneidade da turma, às diferenças sociais dos alunos, à formação dos professores, à falta de motivação para o estudo, às dificuldades com a leitura e a interpretação de textos em matemática, ao preconceito com relação a determinadas disciplinas, etc.; (d) a realização do ensino integrado; (e) uma determinação mais precisa dos conteúdos matemáticos para uma possível interrelação, entre eles. E, no caso específico de nossa pesquisa a interrelação dos conteúdos da geometria e álgebra. Uma vez que o ensino de geometria é algo mais que conceituar triângulos, círculos, ângulos e sólidos, como afirmaram Deguire (1994), Polya (1978) e Perez (1991).

Considerando o proposto no item (e) tornou-se possível definir para quê e como ensinar geometria. A desvinculação dos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria tem

¹ Escala – divisão do ano letivo no CEPAE.

ocorrido freqüentemente, contribuindo para o fracasso do processo ensino-aprendizagem da matemática.

A geometria não tem sido ensinada nas séries do Ensino Fundamental das escolas públicas. Esta constatação foi feita ao se observar o ensino de matemática dessas escolas.

Nas escolas públicas, nas quais a autora desta pesquisa realizou observações, os conteúdos ensinados na quinta e sexta séries do Ensino fundamental eram os aritméticos e os algébricos. Para o estudo da geometria o tempo era escasso e esta ainda era considerada de pouca importância. Em algumas escolas, na sétima série iniciava-se o estudo de algum conteúdo da geometria, mas este acontecia baseado principalmente na utilização de fórmulas, sem que os alunos vivenciassem a experiência da formação de conceitos geométricos, fundamentais para a compreensão de outros conteúdos principalmente os da álgebra.

Segundo Vygotsky (1993, p. 70),

“(...) um conceito se forma não pela interação das associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica. Essa operação é dirigida pelo uso das palavras como o meio para centrar ativamente a atenção abstrair determinados traços, sintetizá-los e simbolizá-los por meio de um signo.”

E ainda:

“Os processos que levam à formação de conceitos evoluem ao longo de duas linhas principais. A primeira é a formação de complexos: a criança agrupa diversos objetos sob um *nome de família* comum. A segunda linha de desenvolvimento é a formação de *conceitos potenciais*, baseados no isolamento de certos atributos comuns.”

Nossas preocupações estavam voltadas para entender as possíveis causas das deficiências com os conteúdos matemáticos em séries mais avançadas. Também pretendíamos fazer um estudo em uma série do Ensino Fundamental (5.^a a 8.^a séries) sobre o ensino dos conteúdos de geometria.

Para tal estudo procuramos delimitar os conteúdos a serem analisados. A escolha recaiu no estudo dos conteúdos de “áreas de figuras planas”. Ela ocorreu pelo fato de a geometria estar sendo trabalhada como se não fizesse parte dos conteúdos matemáticos. No caso do estudo de áreas, era possível relacioná-las com a álgebra.

A falta de interrelação dos conceitos de geometria e álgebra muito freqüente nas escolas, justifica a necessidade de uma proposta de programa para um ensino integrado no que se refere a estes temas.

Ao desenvolver esta proposta de programa, a metodologia adequada ao nosso estudo foi a “resolução de problemas”, uma vez que os conteúdos têm grandes ligações com situações da vida prática. A opção metodológica enfatizou a questão da análise qualitativa dos resultados do programa de ensino integrado da geometria e da álgebra, proposto para

desenvolver a presente investigação, enquadrando-se, portanto, dentro da atual tendência na área da educação de se utilizar a pesquisa denominada qualitativa.

O espaço utilizado para desenvolver o presente estudo foi o Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE), escola de 1.º e 2.º graus, por ser este um centro educativo que prima pelo trabalho de pesquisar e por ser este o cotidiano profissional, vivenciado por esta autora desde 1986. Este trabalho se desenvolveu quando assumimos o ensino de matemática nas 7.ªs séries do Ensino Fundamental do CEPAE.

Através deste estudo pretendeu-se contribuir para as pesquisas em educação matemática, elaborando-se um projeto de trabalho destinado às 7.ªs séries do Ensino Fundamental, com os objetivos de: (a) apresentar uma proposta de programa de ensino de matemática que integre os conteúdos de geometria e álgebra; (b) enfatizar o processo de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas; (c) contribuir para o desenvolvimento do ensino da matemática.

CAPÍTULO I

O ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não é o teorema de Pitágoras que irá garantir o livre exercício da inteligência pessoal, mas é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração.

JEAN PIAGET

1. O ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Grande parte dos alunos do Ensino Fundamental tem dificuldade para aprender matemática e não demonstra motivação em ter domínio desse conhecimento, resultando em um grande número de reprovações. Para alguns pesquisadores da educação matemática (Paulos, 1994; Imenes, 1994; Lellis, 1994), uma das causas da reprovação é o currículo matemático.

No Brasil, segundo Imenes e Lellis (1994, p. 6), nossos alunos suportam um currículo de quase meio século. Esses teóricos afirmam que

“Ainda que variem as metodologias de ensino utilizadas pelos professores, os guias curriculares enunciados como modernistas ou tradicionalistas, os professores de matemática, na sua maioria, acabam sempre ensinando frações na quarta série, ensino este, repetido na mesma forma na quinta série, proporções na sexta e radicais na oitava”.

Verifica-se também que os professores procuram

“(...) aproximar-se o mais que podem das determinações desse currículo tradicional que, sendo tão antigo, surge a nossos olhos como se fosse uma planície ou um rio, algo tão natural que não se explica nem se questiona, apenas se atravessa ou se percorre”.

Os resultados dos estudos realizados pelos pesquisadores citados indicam também que os professores têm muitas dificuldades em proporcionar aos alunos condições de construir os conceitos matemáticos e, mais particularmente, os algébricos, sobretudo, na 7.^a série do Ensino Fundamental. Uma das causas detectadas está no fato de os professores trabalharem os conteúdos utilizando apenas técnicas de cálculo com letras.

Segundo Paulos (1994, p.78), “a matemática como ferramenta útil, ou como modo de pensar, ou como fonte de prazer é uma noção bastante alheia à maioria dos currículos do ensino elementar (até aqueles cujos livros didáticos são adequados).”

Uma outra questão apontada pelos pesquisadores como causa da deficiência do processo ensino–aprendizagem da matemática é a formação de professores. No texto “Por que mudar o ensino de matemática”, a pesquisadora Bertoni (1994, p. 15) afirma que

“(...) o professor não mudaria o ensino porque não foi preparado para isso, porque não sabe como mudá-lo. Entretanto, mesmo professores que aprendem e vivenciam novas concepções e metodologias em sua formação, em cursos de capacitação ou em congressos, quase não introduzem mudanças em sua prática na sala de aula”.

Como o objetivo básico da presente pesquisa é elaborar uma proposta de trabalho integrado com os conteúdos da geometria e da álgebra para a 7.^a série do Ensino Fundamental, através da utilização de uma metodologia de ensino cuja ênfase recaia na resolução de problemas, foram considerados os resultados dos estudos que envolvem as questões curriculares bem como a formação de professores.

Com relação à formação de professores da escola pública de Ensino Fundamental 5.^a a 8.^a séries, observou-se que grande parte deles não estão aptos para o ensino dos conteúdos de matemática. Encontramos muitas vezes professores de outras áreas (geografia, história, língua estrangeira, administração, engenharia, medicina, etc), completando sua carga horária semanal com aulas de matemática. Muitos destes profissionais podiam ter conhecimento dos conteúdos matemáticos, mas não tinham formação pedagógica nem o interesse para mudar o ensino de matemática. No entanto ser licenciado em Matemática não é o suficiente para melhorar este ensino, Souza et alli (1995, p. 46) diz que a formação do professor deve ser repensada “a partir dos fundamentos do que sejam o ato de ensinar e o ato de aprender.” Afirma ser necessário que “o futuro professor e o profissional que já está em atuação na rede de 1.^o e 2.^o graus interajam nas disciplinas da Licenciatura, trocando experiências de toda ordem” (relativas a conteúdos específicos e a estratégias de ensino destes conteúdos).

Para Domenico (1995, p. 70)

“A mudança de atitude perante o processo educativo é que dita a qualidade de ensino, uma vez que o professor não fica prisioneiro de métodos mirabolantes ou de receitas infalíveis. Ele descobre sua faceta questionadora, perspicaz e curiosa. Percebe que é autônomo e que pode e sabe criar. E o importante é que ao se descobrir capaz, ao produzir e ao sentir a satisfação do aprender do aluno, se sente motivado por si só, fazer pesquisas, frequentar cursos, ler, tentar.”

Com base no exposto nas fontes pesquisadas e na experiência de magistério da autora desta dissertação, considerou-se que, ao fazer uma proposta para trabalhar os conteúdos de geometria e de álgebra de forma integrada, devia-se levar em conta a resolução de problemas no plano teórico e no plano das aplicações dos conceitos a diferentes vivências do sujeito.

Segundo Paulos (1994, p. 83), “se a matemática é importante (e certamente o é), então o ensino de matemática é igualmente importante”. Esse autor comenta que a melhor época para despertar no aluno o interesse pela aprendizagem da matemática é a do Ensino Fundamental, pois após ingressarem no 3.º grau é tarde demais para aqueles que carecem de fundamentos de álgebra e geometria.

As leituras realizadas sobre o tema da presente pesquisa reforçam o entendimento de que o processo de ensino–aprendizagem da geometria é fundamental para apoiar a construção de conceitos matemáticos científicos. E mais, destacam também que o ensino dos conteúdos de geometria, aritmética e álgebra devem estar entrelaçados, advindo daí o

interesse por elaborar um programa voltado para o ensino inter-relacionado dos conteúdos de geometria e álgebra.

Através de observações realizadas em escolas públicas, constatou-se a ausência dos conteúdos de geometria na 5.^a e na 6.^a série do Ensino Fundamental, devido, sobretudo, ao desconhecimento de sua importância por parte dos professores. Por outro lado, as expressões aritméticas nestas séries foram supervalorizadas e, conseqüentemente, grande parte das aulas de matemática se referiam a este tema.

Não tendo sido trabalhados os conteúdos de geometria na 5.^a e na 6.^a série, ao ingressar na 7.^a série o aluno devia iniciar a sua aprendizagem observando, percebendo, recriando o mundo geométrico, comprovando, internalizando e formalizando numa integração com os conteúdos da álgebra. Mas, também nessa série, a ênfase recaiu no ensino dos conteúdos da álgebra, cabendo à geometria somente o pouco tempo excedente.

Constatou-se também que a geometria é considerada pelos próprios professores – em sua maioria sem licenciatura em matemática – como muito difícil, confirmando-se, assim, os resultados demonstrados pelos pesquisadores em educação matemática.

Fazer uma proposta de ensino que integre os conteúdos de geometria e álgebra parece só ter sentido através da resolução de problemas. A geometria, que esteve quase totalmente afastada dos programas escolares, está sendo redescoberta como possuidora de conteúdos que possibilitam a investigação, a descoberta, a criatividade e a intuição que caracterizam o caminho para a resolução de problemas.

Quanto à álgebra, para que seu ensino não recaia num formulismo vazio, é preciso lembrar que o seu caráter de abstração e generalidade lhe dá uma importância formativa, preparando o aluno para outros tópicos da álgebra, da geometria e de outras partes da matemática, fundamentais para desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Segundo Toranzos (1959, p. 340), “el objetivo último de la enseñanza del Álgebra no es aprendizaje de mecanismos operatórios, éstos constituyen únicamente um medio para llegar al verdadero punto de interés que es ejercitar al alumno para encarar y resolver problemas”.

Vega (1986, p. 15) afirma que “la frase 'la geometria es el arte de bien razonar con figuras mal hechas' es bastante expresiva a cerca de la virtualidad de esta rama de la matemática para representar situaciones y razonar sobre ellas”. Vega (1986) afirma ainda que os objetivos do ensino da matemática são: (1) a iniciação ao pensamento formal; (2) a utilização de representações geométricas para interpretar situações, levantar hipóteses e resolver problemas; (3) a iniciação do estudo das estruturas algébricas e topológicas; (4) o desenvolvimento da intuição espacial; (5) a matematização do espaço.

A partir das afirmações de Toranzos (1959) e Vega (1986) pode-se concluir que é relevante o ensino simultâneo dos conteúdos de álgebra e da geometria, porque dessa forma permite ao sujeito o desenvolvimento da capacidade de criar situações-problema e resolvê-las.

Outro autor que ressalta a importância do processo ensino–aprendizagem da matemática através da resolução de problemas é Ibarra (s.d., p. 53). Apesar de se referir à geometria, ele afirma que

“Su riqueza de situaciones ofrece al alumno la posibilidad de ejercitarse en el desarrollo de su intuición creadora y en la formulación de conjeturas plausibles, así como, en un estudio más avanzado, en la adquisición de hábitos correctos de pensar y en la comprobación de validez de un razonamiento deductivo”.

Resolver problemas matemáticos tem sido para os alunos uma dificuldade a ser vencida, das séries iniciais do Ensino Fundamental aos cursos de graduação superior. Seja em aritmética, geometria, álgebra ou em outros conteúdos matemáticos, resolver problemas implica formar cadeias de raciocínios, cuja consistência lógica desempenha um papel predominante. O modelo de ensino da matemática presente em um número elevado de escolas pode ser uma das causas que contribuem para que, em grande parte, os alunos não tenham conseguido formar tais cadeias de raciocínio. Assim, os alunos apresentam dificuldades ao elaborar e resolver problemas, além de demonstrarem grande insatisfação quando se defrontam com questões que estão associadas a um raciocínio lógico como os presentes na matemática.

Ainda sobre o processo de ensino–aprendizagem Piaget afirma em uma entrevista concedida a Bringuier, (1978, p. 55) que

“A aprendizagem é um processo construtivo interno. Aprender não é uma simples cópia que um sujeito passivo faz dos dados apresentados a ele. Este participa ativamente na construção da sua aprendizagem ao assimilar os estímulos ambientais e acomodar os conhecimentos que tinha previamente aos novos dados recentemente adquiridos.”

No dia-a-dia os sujeitos enfrentam as mais variadas situações-problema e conseguem resolver grande parte delas. No entanto, na sala de aula, muitos alunos se tornam estáticos diante dos problemas apresentados.

As análises aqui realizadas, aliadas à prática pedagógica e aos estudos de pesquisadores como Freire (1977), Lopes et al. (1994), permitem enumerar algumas causas prováveis para as dificuldades na resolução de problemas:

1- Dificuldade de compreensão na leitura do texto matemático

Saber ler um problema é fundamental para o estudo e a aprendizagem da matemática. O professor pode até mesmo avaliar os conteúdos aprendidos pelo aluno, qualitativa e quantitativamente, através da análise da capacidade de compreensão da leitura de uma questão matemática.

Segundo Freire (1977, p.12), “(...) ler, como ato de estudar, não é um simples passatempo, mas uma tarefa séria, em que os leitores procuram clarificar as dimensões opacas de seu estudo”. Afirmar ainda que “estudar não é um ato de consumir idéias, mas de

criá-las e recriá-las. Dessa forma, ler é reescrever e não memorizar os conteúdos da leitura” (1977, p. 87).

No magistério, tanto a experiência quanto os resultados de pesquisas² evidenciam que, ao concluir o Ensino Fundamental, grande quantidade de alunos ainda não superou as dificuldades com a leitura e a escrita, que são processos interativos.

A leitura e a escrita na resolução de problemas serão produtivas à medida que os alunos compreenderem o significado do que lêem e do que escrevem, sejam eles próprios, seja o professor, ou sejam os autores de livros didáticos os formuladores de questões matemáticas.

2- Dificuldade para coletar e fazer uso dos dados oferecidos para resolver um problema proposto

Muitos alunos, ao ler um problema, não conseguem detalhar as informações passadas pelo texto, mesmo quando este é elaborado de forma simples. É muito comum em sala de aula os alunos solicitarem ao professor que faça a leitura do texto para que possam descobrir as operações necessárias para as possíveis soluções. Para decodificar os problemas faz-se necessário transformar a linguagem do texto em linguagem matemática, o que para

2 Pesquisa exhibe quadro “desastroso”. *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 5 mai. 1996. Educação, p.10.

muitos alunos é um processo difícil, em função, principalmente, da desvinculação entre linguagem, pensamento e realidade, entre outras causas.

Sobre esta questão, Freire (1977, p.24) afirma que:

“o aprendizado da leitura e da escrita (...) só é válido quando, simultaneamente com o domínio do mecanismo da formação vocabular, o educando vai percebendo o profundo sentido da linguagem (e) a solidariedade que há entre a linguagem-pensamento e realidade, cuja transformação coloca também a necessidade de novas formas de expressão”.

3 – Dificuldade para analisar a solução encontrada mediante as informações e os dados presentes no problema

Além da leitura e da compreensão dos textos, os alunos têm também dificuldade em construir esquemas para propor a solução de um problema. Mas se não têm um ponto de partida e de chegada, como então solucionar um problema? Muitos arriscam uma solução, no entanto, poucos sabem justificar o caminho percorrido, da leitura até a conclusão.

O que se observa frequentemente é que os alunos não têm a curiosidade de rever os dados retirados do texto, as perguntas a ele referentes e nem mesmo fazem uma análise da solução para constatar se esta é verdadeira ou falsa.

Ao fazer uma análise da solução encontrada, o aluno tem a oportunidade de perceber e formar outros esquemas para resolver o mesmo problema. Repassando os esquemas e reconstruindo detalhadamente a solução, o aluno, além de ampliar e reforçar o conhecimento, aprimora as suas habilidades para resolver problemas.

4- Dificuldade para propor problemas e resolvê-los

Formular uma proposta de ensino de matemática, inter-relacionando conteúdos de geometria e álgebra através da resolução de problemas, tem o propósito de desenvolver nos alunos o espírito crítico e criativo no sentido de aprimorar cada vez mais o entendimento e a utilidade dos conhecimentos matemáticos, sejam eles práticos ou científicos.

Ensinar conteúdos matemáticos é criar condições para os alunos interagirem com eles, questionando-os e expressando suas idéias.

Os conteúdos de geometria são riquíssimos em situações que contribuem para desenvolver o pensamento e, conseqüentemente, uma infinidade de idéias. Os alunos podem também adquirir e aperfeiçoar seus conhecimentos através da formulação de problemas. Como neste trabalho pretende-se utilizar os conteúdos de geometria para melhor compreender e explorar os da álgebra (e também a álgebra com forma de explicar e compreender as soluções geométricas), um número elevado de aplicações pode surgir, contribuindo para que o aluno proponha uma infinidade de situações-problema.

Sabemos pela história da matemática que a geometria e a álgebra em antigas civilizações (egípcias, babilônias) estiveram unidas para solucionar problemas da vida prática. Resolver problemas faz parte do conteúdo e aprendizado da matemática.

Ao acompanhar o desenvolvimento da matemática, encontram-se fortes razões para pensar que o conhecimento matemático foi sendo aprimorado a partir do momento em que o homem, ao procurar meios para melhorar sua forma de viver, encontrou na matemática um aliado. O despertar das idéias fez do homem um pesquisador, trazendo consigo um forte desejo de aumentar seus conhecimentos. Pensando assim, para resolver problemas é preciso inicialmente ter idéias, levantar e comprovar hipóteses, criar conflitos e coletar dados.

Alves (1982, p. 42) constata que “os dados estabelecem um problema que, para ser resolvido, exige um pulo mental do observador. Ele deve, pela imaginação, construir mentalmente coisas que nunca viu para explicar aquelas que vê”.

Para propor e resolver problemas é preciso ainda que o aluno tenha acumulado um certo conjunto de conhecimentos. Um problema matemático bem formulado deve mostrar claramente seus objetivos; os dados devem ser claros e de utilidade para determinar uma solução. Os conceitos presentes devem contribuir na organização do pensamento, clarear idéias, estabelecendo ligações entre os conteúdos atuais com os anteriormente adquiridos, seja na mesma série ou nas antecedentes. A aprendizagem dos conteúdos deve estar no pensamento de forma organizada, possibilitando ao aluno desenvolver suas habilidades para formular e resolver problemas.

Pesquisadores como Perez (1991), Polya (1996), Deguire (1994) e outros pensam no processo ensino–aprendizagem da geometria como um dos caminhos para desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas.

Deguire (1974, p. 73), afirma que “uma das razões para que se estude geometria é a oportunidade que esta oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas”. E esclarece que

“ensinar a resolver problemas ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; ensinar para resolver problemas envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizado”.

Os educadores reconhecem que o gosto pela matemática não está presente da mesma forma em todos os alunos de uma sala de aula devido, entre outras causas, às diferenças individuais, à forma pela qual a matemática foi ensinada desde as séries iniciais e à herança cultural que cada um traz dentro de si.

Desta forma, pode-se considerar que inúmeras são as dificuldades de se trabalhar com o livro didático que propõe um conteúdo e logo após um conjunto de exercícios com a finalidade de fixar a aprendizagem de forma mecânica, desconsiderando a reflexão, a resolução de problemas e as diversas aplicações dos conteúdos aprendidos na vida prática.

Sabe-se que através do ensino mecanicista o aluno procura determinar a solução dos problemas propostos somente através de modelos conhecidos.

Quando é proposto um problema fora dos padrões e com informações variadas, os alunos têm dificuldades para organizá-las e apresentar uma resolução. Muitas vezes conseguem até opinar sobre o resultado, mas não conseguem percorrer um caminho para chegar até o final.

Baseando-se em experiência no campo do magistério, é bastante significativo incentivar e criar condições para que os alunos, antes de resolverem problemas propostos por outros, passem por uma etapa na qual eles próprios proponham e resolvam problemas relacionados aos conteúdos estudados, com a finalidade de fazer observações, coletar dados, levantar hipóteses, suposições e problematizar situações.

Koch (s.d., p. 85) afirma que: “(...) a matemática não se constrói só na escola. O cotidiano de cada um fornece elementos que dão sentido a esta matemática e permitem sua construção pelo sujeito”. E ainda que

“Assim como o sujeito estrutura seu pensamento ao longo de sua vida, cada conhecimento que constrói depende desta estruturação, das experiências que tem, no dia-a-dia, com este conhecimento, dos problemas que busca resolver nesta construção – e no caso do ensino de Matemática – das intervenções do professor”.

Ao problematizar uma situação, o aluno tem a oportunidade de revisar e aprimorar os conhecimentos matemáticos adquiridos individualmente, aplicar estratégias conhecidas de resolução de problemas e descobrir outras na interação entre eles. E, nas intervenções do professor, os alunos podem descobrir formas de aproveitar melhor as informações, a fim de coletar dados e utilizá-los nas soluções das situações-problema propostas, levando em conta que, ao solucionar um problema em matemática, deve-se incentivar os alunos a resolver as situações-problema envolvidas na sua vida e no mundo em geral.

Koch (s.d., p. 86) diz que “ensinar Matemática é planejar a intervenção, realizá-la e refletir sobre ela, de maneira que o aluno aprenda construindo seu próprio conhecimento, não sozinho, mas na interação com seus iguais”. E ainda que

“(...) aprende-se resolvendo. Não o problema usado no ensino de Matemática, como um gênero de texto. Aqui o problema tem a conotação de desafio, de multiplicidade de dados, de situações, de elementos e de questões que nos fazem utilizar como instrumento o que já sabemos e o que não sabemos, para construir novos conhecimentos”.

Trocar informações, argumentar com colegas e com o professor é fundamental na resolução de problemas. A partir desta interação os alunos podem generalizar os pontos comuns a diversas situações-problema.

O trabalho com resolução de problemas deve ser iniciado com enunciado simples, ao qual todo grupo tenha acesso, para depois acrescentar algo diferente como fatos ou

solução nova. São elementos muito importantes o raciocínio, a análise das informações dadas e da solução encontrada, além, é claro, do caminho percorrido para resolver o problema. Na sua formulação deve-se levar em conta o modo de propor questões, pois elas poderão limitar ou insinuar uma estratégia para a resolução.

A resolução de problemas, na aprendizagem dos conteúdos de geometria e de álgebra, deve contribuir de forma significativa para o processo ensino–aprendizagem da matemática. Assim, este trabalho propõe que a resolução de problemas deve ser inserida em atividades de sala de aula nos mais diversos conteúdos, como forma de despertar o interesse, a curiosidade, o raciocínio, o pensamento crítico e o gosto pela aprendizagem da matemática.

Um problema proposto aos alunos deve ser apresentado de forma a possibilitar que quase todos – senão todos os elementos do grupo – cheguem a uma solução. O professor deve selecionar problemas, graduando os níveis de dificuldades com a finalidade de permitir aos alunos ampliar o grau de compreensão.

Farrel (1994, p. 294) observa que

“De um ponto de vista piagetiano, a instrução suscetível de promover uma aprendizagem significativa para todos os alunos deveria ter as seguintes características: uso de modelos concretos, ênfase no raciocínio indutivo e estratégias que favoreçam a interação dos alunos com o professor e dos alunos entre si”.

É importante ressaltar que, para os alunos terem sucesso na resolução de problemas, estes devem iniciar por conteúdos já vistos, dando àqueles a oportunidade de uma nova aprendizagem, recordando, aplicando e reforçando seus conhecimentos, pois mesmo os problemas mais simples podem apresentar dificuldades para os alunos devido à quantidade e à qualidade dos conteúdos já adquiridos.

Com liberdade para pensar e experimentar idéias pode-se, através da resolução de problemas, incentivar os alunos a escrever conceitos, definições e a fazer demonstrações simples.

Segundo Piaget (1975, p. 334),

“O conceito é adquirido através da ‘ação sobre o objeto’, pois a linguagem ajuda na formação do sistema de comunicação, mais, sozinha é insuficiente. O pensamento surge das ações, daí a necessidade de ‘fazer’, mas, é claro que as ações isoladas não terão nenhum valor.”

Nesta pesquisa pôde-se observar que, de um modo geral, grande parte dos alunos se sentem fracassados em relação à resolução de problemas, visto que ao fazerem tentativas não são estimulados para chegar a uma solução. Sabe-se bem que um dos modos de aprender é trabalhar sobre os erros, refazendo o conteúdo e produzindo uma aprendizagem, dessa forma, mais significativa.

Ainda quanto a formação de conceitos, Vygotsky (1993, p. 72) afirma que “o desenvolvimento de conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica; abstração capacidade para comparar e diferenciar”. E este mesmo autor (1993, p. 71) acrescenta que

“Um conceito é mais do que a soma de certas conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental; é um ato real e complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança, já tiver atingido o nível necessário. Em qualquer idade, um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização.”

Koch (s.d., p. 86) afirma que

“ensinar não é explicar e depois propor problemas, mas é fazer com que um aluno, ao tentar resolver um problema novo, ponha em ação o seu saber, tente novas soluções, que ainda não conhece (mas que podem ser socializadas e discutidas no grupo) e produzir um movimento em direção ao novo. Esta incompletude de falta de saber dá sentido ao novo conhecimento que o professor pretende ensinar e possibilitar o aprender”.

Salienta-se que a resolução de problemas é aqui apresentada como uma das dificuldades encontradas no processo ensino–aprendizagem da matemática, que mereceram as seguintes reflexões de Perez (1991, p. 291):

“– Um melhor ensino–aprendizagem implica alunos motivados para estudo da Matemática (e em particular da geometria), possibilitando como consequência menor número de reprovados, assim como de alunos que evadem da escola;

– Alunos motivados se interessam por inovações e assim a Resolução de Problemas pode ser trabalhada intensamente com estes indivíduos;

– Motivados por descobrir caminhos, para resolver seus problemas, os alunos passam a desenvolver a sua criatividade e raciocínio, que são dois elementos que os professores, do 1.º e 2.º graus, enfatizam como de grande importância e que podem ser obtidos através do Ensino da Geometria”.

A pesquisa de Perez (1991) vem reforçar este trabalho ao afirmar que um dos caminhos para aprimorar qualitativa e quantitativamente o processo ensino–aprendizagem da matemática é a resolução de problemas, sendo a geometria um conteúdo apropriado para esse trabalho.

Perez (1991) identifica nas pesquisas de Guazire (1988) sobre a resolução de problemas três perspectivas na prática educativa: como um novo conteúdo, como aplicação de conteúdos e como um meio de ensinar matemática.

Ainda segundo as pesquisas de Perez (1991), na primeira perspectiva o aluno é levado a conhecer diferentes técnicas e estratégias para resolver problemas, desenvolvendo suas habilidades de resolução independente do conteúdo. Na segunda o aluno aprende os

conteúdos através da resolução de problemas. E na terceira, o pensamento é de que a matemática é melhor ensinada se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado por um problema-desafio, levando o aluno à construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.

“Como resolver um problema”, de Polya (1978), também reforça este posicionamento. Na sua forma de pensar, ao procurar a solução de um problema, o ponto de vista aqui defendido passa por variações do movimento da leitura até próximo de ser encontrada a solução. Para ele a princípio a concepção do problema é incompleta, e esta vai se tornando diferente à medida que se percorre um caminho para chegar à solução. Assim, para resolver um problema, o trabalho é dividido em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

A primeira fase explicita que “o aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo”. Dessa forma ao se proporem problemas para os alunos, estes devem ser bem escolhidos, com grau médio de dificuldade (nem muito fáceis, nem muito difíceis), além de serem naturais e interessantes.

Polya (1978) subdivide ainda a compreensão de um problema em dois estágios: a familiarização e o aperfeiçoamento da compreensão.

No primeiro deles o aluno deve começar pelo enunciado, visualizando todo o problema, procurando torná-lo o mais claro possível, pois é preciso familiarizar-se com ele

e ter em mente seu objetivo. A atenção dispensada ao solucionar um problema poderá estimular a memória fazendo com que pontos relevantes possam ser recordados.

O segundo estágio parte também do enunciado do problema procurando a clareza do texto e a sua compreensão profunda. As partes principais do problema também devem ser isoladas.

Na segunda fase, ter um plano significa conhecer, pelo menos de um modo geral, as contas, os cálculos ou os desenhos necessários para obter a incógnita. Na resolução de problemas a concepção da idéia de um plano é o ponto mais relevante. Isto porque ter idéias significa ter experiências passadas, ter conhecimento prévio e atualizado sobre o conteúdo do problema. Em matemática, como os conteúdos vão sendo acumulados e aprimorados em cada série, é preciso ter conhecimento de certos pontos relevantes como problemas resolvidos e demonstrações de teoremas anteriormente estudados.

O professor pode auxiliar o aluno com explicações, questionamentos e sugestões de conteúdos que o conduzam a uma idéia luminosa. Em matemática resolve-se uma infinidade de problemas. Assim, o aluno, ao resolver um problema, pode iniciar procurando um problema correlato. Desta forma ele pode descobrir que existem muitos problemas que, de algum modo, estão relacionados com aquele que se pretende resolver. A dificuldade de escolha pode ser vencida ao se encontrar um problema conhecido com a mesma incógnita. Assim, o aluno pode começar a formar o conjunto de idéias que o levará à solução do seu problema. Caso não consiga, é preciso rever o seu problema, procurar outros pontos de apoio

e, atentamente, examinar outra vez os diferentes aspectos, procurando algum significado novo em cada detalhe ou uma compreensão nova do conjunto. Toda essa pesquisa para resolver um problema pode levar a diferentes caminhos. Por isso é preciso ter cuidado para não perder o problema de vista, estando sempre atento aos dados e à condicionante. No entanto, se não se conseguir resolver o problema, deve-se procurar resolver antes um outro parecido.

Executar o plano é a terceira fase da resolução de problemas. É considerada bem mais fácil que elaborar o plano, pois aqui o importante é a paciência. O aluno, através do plano elaborado, tem um roteiro geral. Ao segui-lo, o aluno deve estar atento aos detalhes nele inseridos. Nesta fase, as anotações, os esquemas formulados pelo aluno são de grande importância, uma vez que podem ser utilizados para executar o plano. A cada passo o aluno deve retomar as anotações e esquemas, com a finalidade de ele próprio acompanhar suas idéias e, com satisfação, chegar a um resultado final. Nessa fase o aluno passa por um trabalho mental em que o raciocínio e a memória são aprimorados.

Por último, fazer um retrospecto do problema é fundamental. Para isto o aluno deve considerar a resolução por diferentes pontos de vista e encontrar pontos comuns com seus conhecimentos adquiridos. O aluno deve rever a resolução, levando em consideração os detalhes e procurando torná-los tão simples quanto possível; examinar as partes mais amplas e tentar abreviá-las; procurar perceber toda solução num só ato. Para finalizar o aluno deve pesquisar a possibilidade de utilizar o método aplicado e os resultados obtidos para

solucionar outros problemas. Revendo dessa forma a resolução de um problema, o aluno aprende e forma hábitos de verificar e examinar a solução encontrada. Assim, ele aprende a organizar seus conhecimentos, contribuindo para mais um momento de aprendizagem e aperfeiçoando sua capacidade para resolver problemas.

Considerando as quatro fases da resolução de problemas sugeridas por Polya (1978), defende-se aqui neste trabalho que, para resolver um problema, é preciso ter interesse, dominar com profundidade os conteúdos nele envolvidos, observar a prática de outros para resolver problemas e, enfim, fazer a sua própria prática. Polya (1978, p. V) explica que o professor de matemática tem na resolução de problemas sua grande oportunidade para ensinar:

“Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo”.

Perez (1991, p. 298) acredita que a “resolução de problemas surge como um meio para ensinar Matemática”, já que nessa “abordagem em vista de se crer que, se todo conteúdo

a ser aprendido for iniciado por um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido”.

Nesses estudos podemos observar que o professor é um orientador. Assim, sua função é fazer com que os alunos busquem nos conhecimentos adquiridos o conteúdo matemático necessário para resolver situações-problema; analisar com os alunos as soluções encontradas; incentivá-los a obter soluções por outros caminhos; verificar com os alunos quais as melhores soluções; dialogar com os alunos para que adquiram o máximo de experiência por meio do trabalho independente.

Perez (1991, p. 299) afirma que “a aquisição do conhecimento matemático baseia-se, dessa forma, na própria ação desenvolvida pelo aluno que, com orientação do professor, organiza e sistematiza o conteúdo matemático envolvido no problema”. Assim, esse pesquisador acredita que para essa prática pedagógica ocorrer é necessário que o ensino de matemática dê aos alunos liberdade à imaginação, liberdade de expressão, descoberta, iniciativa, originalidade, crítica e que a criatividade e a tomada de decisões sejam utilizadas para “transformar experiências de sua vida pessoal que envolvem conceitos matemáticos em conhecimento matemático, ou seja, na Matemática ensinada no sistema educacional formal”.

De acordo com Polya (1978), os problemas matemáticos se apresentam como problemas de demonstração e problemas de determinação.

Num problema de demonstração as partes principais são a hipótese e a conclusão do teorema que se quer provar ou refutar. Assim o que se pretende é mostrar conclusivamente se uma afirmativa é verdadeira ou falsa.

Observa-se que as dificuldades para ensinar matemática no primeiro e segundo graus têm afastado da sala de aula o estudo referente às demonstrações, ficando estas reduzidas apenas ao terceiro grau.

A idéia de demonstração foi transmitida à humanidade por Euclides através de sua obra *Os Elementos*. As demonstrações normalmente têm um caráter bem rigoroso, mas o que se pretende no Ensino Fundamental é que os alunos sejam estimulados a demonstrações intuitivas e ao raciocínio lógico, reservando um espaço para demonstrações geométricas. Segundo Polya (1978, p. 116),

“Se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não houver familiarizado com as demonstrações geométricas terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir idéia de um raciocínio rigoroso. Sem esta idéia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana”.

Com este pensamento parece clara a função da geometria, como um dos caminhos indicados para ensinar matemática através da resolução de problemas.

Os problemas de determinação são os que têm maior destaque na matemática do Ensino Fundamental. Segundo este pesquisador, eles podem ser teóricos ou práticos, concretos ou abstratos, problemas sérios ou simples enigmas. Em um problema de determinação, as partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante. A incógnita é aquilo que se deseja obter; os dados são as informações encontradas no texto do problema apresentado e a condicionante faz a ligação entre a incógnita e os dados fornecidos pelo problema. Num problema de determinação o objetivo a ser alcançado é o de encontrar a incógnita, sendo, por isso, conveniente examinar detalhadamente o problema, através de questões tais como: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

Dessa forma para resolver um problema de determinação é preciso identificar bem suas partes principais, considerando ainda problemas anteriormente resolvidos que tenham a mesma incógnita, o que constitui um surpreendente recurso. Além disso, o professor pode contar com as experiências extraclasse trazidas pelos alunos que, motivados, as transformam em conhecimento matemático. O professor, como orientador e coordenador das atividades desenvolvidas pelos alunos, deve esforçar-se no sentido de motivá-los para o processo ensino-aprendizagem dos conteúdos da matemática com uma atenção especial para os conteúdos da geometria.

CAPÍTULO II

PROGRAMA DE ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E DA ÁLGBRA

- UMA PROPOSTA

2. PROGRAMA DE ENSINO INTEGRADO DA GEOMETRIA E ÁLGEBRA – UMA PROPOSTA

A análise dos princípios gerais que norteiam o ensino de primeiro grau, as observações dos tipos de processos de ensino–aprendizagem da matemática realizadas em escolas públicas pela autora deste trabalho, a análise crítica dos estudos publicados por pesquisadores em Educação Matemática destacados neste trabalho evidenciam que é fundamental considerar o papel do professor na definição do currículo escolar e os objetivos educacionais e científicos da educação escolar, consideração esta compatível com o determinado pela Lei de n.º 5692/71:

“(…) é indispensável assegurar ao aluno que conclui o 1.º grau um mínimo de conhecimentos e conceitos, os quais permitirão ao educando formar valores, desenvolver atitudes e adquirir habilidades, conhecimentos e conceitos, que devem guardar estreita relação com o currículo de 1.º Grau” (p. 80, 1979).

E que:

“O ‘conteúdo’, de acordo com a concepção que o Parecer n.º 853/71 delineia, deve ser encarado como o conjunto de diferentes operações que levam à aquisição do conhecimen-

to. Ele é formado por duas linhas paralelas. O próprio conhecimento – a informação – e as operações lógicas necessárias à manipulação do conhecimento” (p. 75, 1979).

O ensino de matemática, desde as séries iniciais, deve proporcionar aos alunos a iniciação do pensamento científico, isto é, deve possibilitar-lhes a capacidade de pensar e agir de forma crítica, criativa e consciente. Desta forma os alunos poderão vencer as dificuldades de aprendizagem da geometria, de compreensão e resolução de problemas matemáticos e preparar-se para resolver questões do dia-a-dia, utilizando o raciocínio lógico, isto é, elaborando argumentações, análises e demonstrações de suas afirmações.

Favorável à perspectiva de que uma das funções básicas do professor é definir o currículo escolar, os objetivos instrucionais, educacionais e científicos da Educação, planejou-se, desenvolveu-se e avaliou-se um estudo sobre a proposta de um programa referente ao ensino integrado de geometria e álgebra para as 7.^{as} séries do Ensino Fundamental, cujos objetivos foram: (a) fazer um estudo para uma proposta de programa de ensino de matemática que integre os conteúdos de geometria e álgebra; (b) enfatizar o processo de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas; c (c) contribuir para o desenvolvimento do ensino da matemática.

Os diferentes conteúdos matemáticos devem mostrar o conhecimento matemático como uma unidade. A opção pela 7.^a série do Ensino Fundamental ocorreu devido ao conhecimento matemático prévio dos conteúdos de geometria e de álgebra adquiridos nas séries anteriores. Acreditou-se na possibilidade de que na 7.^a série os alunos pudessem

perceber a riqueza de situações-problemas permeadas na integração de conteúdos matemáticos.

A 7.ª série na qual se desenvolveu a presente pesquisa era constituída por 60 alunos divididos igualmente nas turmas A e B. As principais características apresentadas pelos alunos das turmas foram: (1) desnível de conteúdos; (2) falta de interesse dos alunos pelo ensino–aprendizagem da matemática; (3) parte dos alunos consideravam a matemática difícil; (4) alunos repetentes.

A opção metodológica privilegiou a questão da qualidade do processo de ensino–aprendizagem que visou ao interrelacionamento de conteúdos programáticos, no caso conteúdos de geometria e da álgebra, através de atividades didáticas elaboradas de forma a incentivar a resolução de problemas.

2.1 – CONTEÚDOS DO PROGRAMA DE ENSINO INTEGRADO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA

Os conteúdos definidos, organizados e ensinados pelos professores de Matemática do CEPAE para as 7.ªs séries do Ensino Fundamental, se referem aos seguintes temas: Numeros Reais, Problemas de Contagem, Introdução à Estatística, Matemática Financeira, Álgebra, Geometria e Medidas. Cada um desses temas foi dividido em unidades.

Para desenvolver a presente investigação, optou-se por delimitar conteúdos para um ensino inter-relacionado da geometria e da álgebra. A investigação foi feita estudando os conteúdos da geometria para, a partir destes, constituir conceitos algébricos (monômios, polinômios, expressões algébricas, etc).

Tal ênfase se deve ao fato de que nos últimos anos a prática pedagógica da autora deste estudo se realizou no Ensino Fundamental (5.^{as} a 8.^{as} séries) e no Ensino de 3.º grau (1.º e 2.º períodos) em cursos de Geometria Analítica.

Através desta prática pode-se observar que a deficiência no processo de ensino-aprendizagem da geometria é uma realidade. Pode-se evidenciar que a maior parte das dificuldades de aprendizagem diagnosticadas em classes do 3.º grau com relação a conteúdos de geometria relacionam-se também a conteúdos algébricos, tais como: (1) reconhecer figuras geométricas planas e sólidas; (2) reconhecer propriedades das figuras geométricas planas e sólidas; (3) escrever expressões que representem perímetros, áreas e volumes, dentre outros. Tais dificuldades surgiram decorrentes da falta da construção de conceitos sobre tais conteúdos, ainda que eles estivessem presentes, até nos programas do Ensino Fundamental (5.^a a 8.^a séries).

2.1.1 - CONTEÚDOS DA GEOMETRIA

Dentre as muitas unidades do programa de ensino da geometria no CEPAE – 7.^a série, optou-se pelo ensino da unidade relativa a áreas de Figuras Planas, por ser trabalhada

com base na compreensão e na interiorização de fórmulas, por sua riqueza em situações-problema e por se relacionar com temas de outras unidades (7.^a série e séries anteriores).

Durante todo ano letivo em que se desenvolveu o presente estudo, procurou-se desenvolver cada tema dividindo a carga horária anual proporcionalmente, levando em conta os subtemas de cada tema apresentado. O estudo de cada tema era apresentado ou aprofundado em relação a estudos anteriores.

A unidade Área de Figuras Planas foi subdividida nas seguintes subunidades: (1) medida de áreas; (2) figuras planas; (3) área de figuras planas; (4) conclusões que contribuem para a aplicação destes conteúdos na compreensão de outros, como os da álgebra, e em aplicações da vida prática tais como construir uma muralha, pavimentar uma área utilizando qualquer tipo de padrão geométrico composto de figuras planas como: retângulos, triângulos, trapézios, dentre outras.

Uma vez que os conteúdos da unidade Área de Figuras Planas foram apresentados aos alunos desde a 5.^a série, a meta principal deste estudo na sétima série foi fazer um aproveitamento qualitativo e quantitativo da aprendizagem elaborada pelos alunos e, simultaneamente, possibilitar-lhes aprofundar os conteúdos ao desenvolver atividades e realizar exercícios que envolveriam a resolução de problemas elaborados de forma a permitir a descoberta do significado algébrico destes conteúdos concretizando um dos nossos objetivos iniciais, que foi a integração dos conteúdos de geometria e álgebra.

O intuito principal, ao estudar os temas referentes à subunidade Área de Figuras Planas, foi orientar o aluno, por meio de situações-problema, a elaborar conceitos a partir de atividades que envolviam medir a parte do plano ocupado por uma figura plana. Para isso foi importante ressaltar a importância do conceito de área de uma figura plana e a especificação de uma unidade padrão de medidas no plano.

A fim de haver maior compreensão deste conceito, o aluno vivenciou situações que lhe permitiam concluir sobre as propriedades das áreas para figuras congruentes e para figuras semelhantes. E ao realizar tais conclusões, se destacou a importância dos conteúdos algébricos na resolução de situações-problema referentes à geometria e o significado desta para a compreensão da álgebra.

Em cada subunidade trabalhada os alunos foram envolvidos ativamente para aprenderem o conteúdo proposto ao construírem conceitos e descobrirem propriedades a serem generalizadas. Pelo menos duas situações-problema propostas pelo professor e/ou pelos alunos foram analisadas quando se estudou cada tema do programa proposto. Durante o desenvolvimento de cada unidade, sempre que possível, houve um espaço para as discussões, analisando o ponto-de-vista dos alunos e levando-os a concluírem sobre o aprendido.

Na subunidade Medidas de Áreas o aluno foi incentivado a desenvolver o conceito de medição e medida.

No ensino da matemática, entende-se por medição “o processo por meio do qual associamos um número ou uma propriedade física de algum objeto ou conjunto de objetos com o propósito de comparação” e por medida, “o número de unidades da propriedade estudada”.

Em matemática estudamos propriedade físicas como a área, o volume, o peso, a temperatura e a densidade.

Para os alunos construírem os conceitos de medição e medida, a professora os incentivou a observar propriedades, a verificar as possíveis formas de medir para concluir que é preciso selecionar uma unidade de medida apropriada e para descobrirem um número exato ou aproximado que represente a área de uma região ou figura geométrica plana.

No estudo de medidas os alunos deveriam concluir no mínimo que: (1) a medida do conjunto deve ser igual à soma das medidas de todas as suas partes; (2) a medida de uma parte do conjunto é menor que a medida do todo.

A subunidade Figuras Planas foi revisada proporcionando um novo momento de aprendizagem. Foram explorados os conceitos de quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo losango, trapézio. Também se ressaltaram as propriedades e as noções de cálculo de áreas conhecidas por eles, tal como “Como conceituar uma figura plana quadrada?”

No CEPAE, considerada como uma Escola Experimental, é possível trabalhar diversos programas, desde que sejam preservados a carga horária e os conteúdos previstos para cada série. O planejamento é discutido por toda subárea, mas a metodologia fica sob a

responsabilidade de cada professor da área. Há uma reunião semanal em cada subárea onde se discutem as propostas de trabalho. Dela participam os professores de matemática e física.

O replanejamento de cada disciplina é realizado por cada professor, levando em conta a participação dos estagiários envolvidos no desenvolvimento do programa de cada série. Portanto, só é realizado se houver necessidade e, neste caso, apresentado para os participantes da subárea.

Muito se tem dito sobre interdisciplinaridade, mas temos observado que a prática é muito diferente da teoria. Dentro do ensino de matemática temos procurado ressaltar sua utilidade nos conteúdos de geografia, biologia, química. Temos também procurado relacionar os estudos de história com a história da matemática, mostrando que em todas as épocas o homem foi sempre um pesquisador.

Quanto ao livro didático, sua escolha é feita no final de cada ano letivo quando, em reunião de subárea, são discutidos os pontos positivos e negativos observados no decorrer do desenvolvimento do programa, levando em conta os objetivos gerais propostos pela área:

- (1) Contribuir para a integração do aluno na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos básicos de teoria e prática da matemática e da física.
- (2) Estimular a curiosidade mental, o interesse, a criatividade do aluno para que ele explore novas idéias e descubra novos caminhos na aplicação dos conceitos apreendidos na resolução de problemas.

- (3) Desenvolver o nível cultural do educando, contribuindo para um melhor e mais rápido aprendizado em qualquer outra matéria.
- (4) Desenvolver no educando hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, cooperação, crítica, discussão e uso correto da linguagem.
- (5) Desenvolver no educando sua capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, experimentar, deduzir, provar e julgar.
- (6) Possibilitar ao educando o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da matemática, da física e destas com as demais áreas do conhecimento.

Uma quantidade significativa de livros didáticos, como os de Iezzi (1991), Giovanni e Giovanni Jr. (1990), Bianchini (1991), Castrucci (1985) e outros, concentram o estudo de álgebra previsto para o primeiro grau na 7.^a série, deixando-o praticamente esgotado. Esse mesmo fato pode ser observado no desenvolvimento dos programas do ensino de matemática em outras escolas públicas e também particulares, havendo inclusive uma carga horária específica para cada conteúdo (geometria e álgebra).

Nossa experiência mostra que o aluno nas séries posteriores 'aprendeu' tudo e nada sabe. A autora desta pesquisa acredita que a imensa quantidade de propriedades e fórmulas passadas ao aluno sem um significado prático tem provocado uma visível dificuldade na assimilação dos conteúdos propostos para as 7.^{as} séries e para as séries seguintes.

2.1.2 – CONTEÚDOS DA ÁLGEBRA

No CEPAE, o tema álgebra também vem sendo apresentado aos alunos desde a 5.^a série nas expressões de cálculos de perímetros, áreas e volumes. Portanto, a 7.^a série tornou-se um momento importante para revisar, integrar e aprofundar conteúdos algébricos. Este tema teve como subunidades: (1) cálculo algébrico; (2) equações do 1.^o grau; (3) inequações do primeiro grau; (4) sistemas e equações do 1.^o grau.

Essas subunidades foram estudadas e/ou revisadas na subunidade áreas de figuras planas, uma vez que se observava a integração de conteúdos geométricos, sempre considerando a possibilidade de apresentar atividades didáticas com conteúdos algébricos relacionados às experiências cotidianas dos alunos.

Considerando que o CEPAE é uma escola experimental e que o objetivo final do estudo de cada conteúdo é o aprendizado, foi possível a adaptação do programa para estudar conteúdos geométricos e através destes, os algébricos. Assim, os conteúdos da 7.^a série tornaram-se mais ricos em situações-problema, próximas do cotidiano dos alunos, a serem pesquisadas.

Este programa experimental enfatizou inicialmente conceitos e propriedades geométricas dos triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos ... e círculos. A este estudo foram integrados os conteúdos algébricos: cálculo algébrico (estudo dos polinômios), equações do 1.^o grau, inequações do primeiro grau e sistemas de equações do 1.^o grau. No

entanto, nosso estudo ficou restrito ao envolvimento da geometria e álgebra no cálculo de áreas de algumas figuras planas citadas anteriormente.

2.2 – METODOLOGIA DE ENSINO: ÊNFASE À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para o planejamento e desenvolvimento do programa de ensino que fundamentou o presente estudo, considerou-se o conjunto de dificuldades próprias do ensino da matemática apresentadas pela autora no Capítulo I desta dissertação. Observaram-se ainda os objetivos a serem alcançados. Portanto, durante o desenvolvimento do programa se manteve atento à formação de habilidades como: 1) ler e interpretar textos matemáticos; 2) pesquisar conhecimentos teóricos e aplicações relacionadas aos temas de geometria e álgebra; 3) representar, por meio de figuras ou esquemas, a situação-problema proposta; 4) estabelecer relações entre os conteúdos da 7.^a série e os das anteriores; 5) analisar e aplicar as informações encontradas para a resolução de problemas; 6) demonstrar situações consideradas simples com argumentação; 7) transpor os conhecimentos adquiridos numa situação-problema para outras; 8) generalizar, sempre que possível, propriedades, conceitos, presentes em diversas situações-problema.

Quanto à metodologia de ensino, considerou-se que ainda na 7.^a série grande parte dos alunos necessita realizar experiências com jogos, dobraduras e outros materiais pedagógicos a fim de assimilarem determinados conceitos.

Desta forma, o processo de ensino–aprendizagem pode ser mais interessante e motivador contribuindo para o desenvolvimento das habilidades propostas. Considerou-se

também que a aprendizagem proposta na escola deve ser uma continuação daquela que os alunos aprendem na vida. Os problemas de aplicações práticas sempre despertaram maior interesse dos alunos do primeiro, segundo ou terceiro graus. E ainda, os problemas devem ser apresentados de modo que os conhecimentos adquiridos teoricamente conduzam os alunos a descobrirem aplicações práticas.

A aprendizagem da matemática não deve consistir em decorar fórmulas, mas em construir conceitos e descobrir princípios matemáticos. Este pensamento concretizou-se ao assumir como princípios básicos da metodologia de ensino a elaboração e resolução de problemas por parte dos alunos.

Constatou-se que a orientação de estudo que o professor oferece ao aluno à medida que ele pesquisa um determinado conceito é fundamental, pois os conteúdos em cada série ganham novas dimensões. Observou-se que a forma utilizada para a solução de uma mesma situação-problema passa por modificações de uma série para outra, devido, principalmente, ao amadurecimento intelectual dos alunos e ao aprofundamento dos conteúdos. Este processo pode ser explicado, pautando-se em Piaget (1987, p. 63) ao afirmar que

“ao se aproximar dos doze anos, o pensamento da criança passa por transformações que marcam o fim das operações construídas no decorrer da segunda infância ou seja, inicia a passagem do pensamento concreto para o formal. Para ele, após onze ou doze anos, o pensamento formal torna-se possível, isto é, as operações lógicas começam a ser transportadas do plano de manipulação concreta para o das idéias, expressas em

linguagem qualquer (linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos, etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença”.

Nas atividades que implicam a resolução de problemas o professor deve encorajar ao máximo seus alunos para novas tentativas. E, sempre que possível, aplicar as descobertas construídas e assimiladas ao solucionar um problema nas soluções de outros problemas matemáticos apresentados posteriormente.

É nessa atividade cognitiva que o aluno tem a oportunidade de decidir sobre as soluções mais adequadas ao problema matemático que lhe é apresentado.

Toda subunidade do tema geometria foi considerada como um ponto importante na compreensão da álgebra. No estudo de cada unidade considerou-se que são importantes as representações geométricas, o cálculo algébrico e a utilização da linguagem matemática.

No estudo da geometria as representações geométricas conduzem o aluno a um pensamento lógico e organizado que é fundamental na solução de uma situação-problema. E interligando os conteúdos geométricos e algébricos é possível retirar propriedades que podem ser utilizadas nas mais variadas situações da vida prática. Desta forma, os alunos podiam classificar, sintetizar suas idéias e transmiti-las, fazendo o uso da linguagem matemática. A organização do conteúdo (geometria e álgebra) tinha o propósito de estimular os alunos a praticarem leituras, interpretações e escrita em linguagem matemática.

A partir dos estudos teóricos realizados (ver Capítulo I) observou-se que a visão e a percepção da figura contribuem de forma significativa para a resolução de problemas e que

“Os aspectos visuais de muitos problemas geométricos ajudam sua capacidade de lidar com raciocínio dedutivo formal” (Deguire, 1994, p. 82).

Assim, para apresentar os conceitos a serem construídos recorreu-se às construções geométricas. As construções geométricas constituíram uma forma de representar figura, de apresentar e acompanhar um pensamento geométrico e de solucionar problemas. A partir da geometria os alunos puderam construir e expressar algebricamente um pensamento e vice-versa.

Ao final de cada estudo os alunos puderam perceber a importância da leitura e a compreensão de textos matemáticos no estudo de situações-problema; estabelecer relações entre os conteúdos; aplicar os conhecimentos adquiridos; e fazer generalizações. Para isso foi necessário que as situações-problema apresentadas fossem interessantes, que despertassem a curiosidade, que não fossem repetitivas, que tivessem sempre algo novo, que criassem situações de conflitos cognitivos e que contribuíssem para a construção de um pensamento geométrico e algébrico.

A álgebra pode ser útil também quando não pode resolver o problema completamente: ela pode resolver uma parte do problema e a solução daquela parte pode facilitar o trabalho restante.

POLYA

2.2.1 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

a – Livro-texto

Para participar das aulas de matemática os alunos foram informados de que deveriam ter um caderno para anotações e resolução de exercícios, material para construções geométricas (régua, compasso, jogo de esquadros, transferidor) e o auxílio de um livro didático enviado pela Fundação de Assistência Educacional (FAE), presente na biblioteca do CEPAE.

Muitos professores questionam a utilização de um livro didático e, no CEPAE, isto não é diferente. Tanto que nesta escola, existem professores que trabalham com o livro didático, enquanto outros preferem elaborar seus exercícios ou até mesmo textos. Em reunião de subárea os professores de matemática do CEPAE optaram por adotar um livro didático.

A autora deste estudo acredita que trabalhar com um livro didático tem seus pontos positivos e negativos. Por isso, tinha consciência de que o livro didático adotado atenderia somente alguns dos objetivos propostos ao se desenvolver a presente pesquisa.

Destacaram-se como pontos positivos da utilização do livro didático: (1) a disponibilidade de material para pesquisa; (2) a apresentação de textos para leitura e compreensão dos exercícios propostos; (3) o elenco de problemas propostos.

Revelaram-se pontos negativos: (1) exercícios repetitivos; (2) qualidade dos exercícios, que muitas vezes não contribuem para os objetivos do ensino–aprendizagem da matemática (presentes neste capítulo).

O aluno do Ensino Fundamental (5.^a a 8.^a séries) precisa de uma certa organização dos conteúdos para avançar na compreensão dos conceitos a serem construídos e aprofundados, para, assim, construir o seu próprio conhecimento. Nessa construção do conhecimento o trabalho do professor é fundamental. Por isso, sem abandonar o livro didático, elaborou-se uma proposta de ensino-aprendizagem, visando à construção do conhecimento pelo aluno ao apresentar-lhe exercícios e atividades programadas que exigiam do professor: (1) experiência; (2) metodologia apropriada; (3) domínio de conteúdo; (4) desenvolvimento do programa previsto partindo de atividades práticas para, através destas, possibilitar ao aluno construir o pensamento formal.

b) Aulas expositivas

As aulas expositivas foram proferidas nos momentos em que se fez necessário utilizar este procedimento didático, sem deixar, durante as mesmas, de se estimular a participação dos alunos. A apresentação de cada conteúdo foi feita com o auxílio de fatos relacionados com a história da matemática e também com o estudo dos conceitos e definições apresentadas pelos autores do livro de matemática, relacionando-os com os conceitos e definições vistos em séries anteriores. Após a leitura e análise dos textos matemáticos passava-se para as atividades práticas. Em outros momentos, o trabalho pedagógico foi iniciado por atividades práticas visando à construção e ao aprofundamento de conceitos geométricos, com o propósito de encaminhar o raciocínio do aluno à descoberta de uma linguagem algébrica.

c) Trabalho em grupo

O trabalho em sala de aula foi realizado em pequenos grupos (2, 3 ou 4 alunos) ou individualmente, observando-se atitudes e socialização, participação, interesse, criatividade e, conseqüentemente, a aprendizagem. Assim, todos os alunos tinham várias oportunidades de participar das atividades pedagógicas: (1) na apresentação de uma solução para a atividade proposta; (2) na explicação de conteúdos e solução de problemas; (3) na elaboração de conceitos; (4) na correção de exercícios e atividades individuais, entre outras.

d) Alunos estagiários do curso de Graduação em Matemática

Pelo fato de o CEPAE ser um dos campos de trabalho dos estagiários da Universidade Federal de Goiás, teve-se a oportunidade de contar com o trabalho de estagiários do 4.º ano de Licenciatura em Matemática, o que deu oportunidade ao professor de matemática para atuar ora como professor, ora como observador.

Como professor, desenvolveu um trabalho tendo por finalidades básicas a aprendizagem dos alunos das 7.ªs séries e a colaboração na formação de futuros professores (estagiários).

Havia uma reunião semanal com os estagiários a fim de trocar idéias, discutir metodologias preparando o aluno-estagiário para assumir o trabalho pedagógico por uma escala (período correspondente a 36 horas-aulas), embora a participação deste se iniciasse e terminasse com o ano letivo.

Como observadora, a autora deste estudo participava, analisava e refletia sobre a prática pedagógica no Ensino Fundamental. Assim, contribuía para a prática pedagógica dos futuros professores (estagiários) apresentando-lhes sugestões metodológicas e de conteúdos.

Além dos encontros semanais com os alunos das 7.^{as} séries, previstos para o ensino–aprendizagem da matemática dentro da grade curricular, tínhamos os atendimentos previstos ao esclarecimento de dúvidas dos alunos, individualmente ou em pequenos grupos. Para o atendimento dos alunos tínhamos plantão de dúvidas, do qual participavam todos os professores da área de matemática, um monitor e estagiários-pesquisadores (estagiários bolsistas). Desta forma o aluno podia esclarecer suas dúvidas no dia e horário de sua preferência.

e) Atividades didáticas específicas do programa de ensino–aprendizagem da geometria e da álgebra de forma integrada

1) Material utilizado

Para o desenvolvimento das atividades propostas é necessário lápis, borracha, régua graduada, compasso, jogo de esquadros, transferidor e tesoura. Este material é utilizado nas medições e construções geométricas, tendo como objetivo despertar o aluno para a compreensão da origem do conhecimento a ser construído, no caso o estudo de áreas de figuras planas. À medida que as idéias sobre medição vão sendo desenvolvidas, os alunos utilizam também materiais como papel quadriculado e milimetrado.

2) Conteúdos presentes nas atividades

Nas atividades propostas, o aluno precisa ter um conhecimento prévio de conteúdos da geometria tais como: estudo de triângulos e quadriláteros. Desta forma a ordem dos conteúdos previstos para a 7.ª série do Ensino Fundamental foi alterada. Os alunos fizeram inicialmente o estudo dos conteúdos geométricos e a partir destes iniciaram a construção do conhecimento algébrico.

a) Estudo de triângulos

Neste estudo é discutido com os alunos: o que é um triângulo e a condição de sua existência; classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos; soma dos ângulos internos de um triângulo; congruência de triângulos; semelhança de triângulos; medianas, mediatrizes, bissetrizes, alturas e pontos notáveis do triângulo (incentro, baricentro, ortocentro). Vale esclarecer que para este estudo os alunos devem ter o domínio dos conceitos de ângulos, paralelismo e perpendicularismo de retas.

b) Estudo de quadriláteros

A partir do estudo de triângulos os alunos podem descobrir o que é um quadrilátero, observando figuras e relacionando as diferenças. Através das diferenças podem ter idéias sobre o que é um retângulo, um paralelogramo, um losango, um trapézio e suas propriedades.

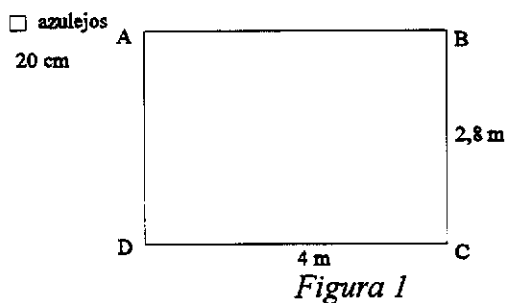
Para mostrar as propriedades é bastante explorado o conteúdo de congruência de triângulos que surge em muitas atividades propostas do estudo de quadriláteros.

Algumas atividades desenvolvidas: Áreas de Regiões Planas

Atividade 1 – Medir a área de uma região plana

Para medir a área de uma região plana (é o interior de qualquer curva plana fechada simples conjuntamente com a própria curva) foi escolhida uma unidade de medida suficientemente pequena que pudesse se adaptar à região a qual se quer medir. No dia-a-dia encontram-se diversas situações nas quais se emprega a idéia ou o conceito de medição.

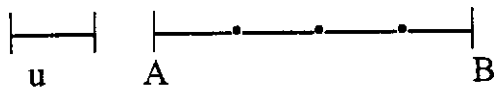
Foi solicitado aos alunos que resolvessem o seguinte problema: Quantos azulejos quadrados são necessários para cobrir uma parede retangular?



A idéia inicial era fazer com que o aluno chegasse à solução sem utilizar as fórmulas conhecidas por eles.

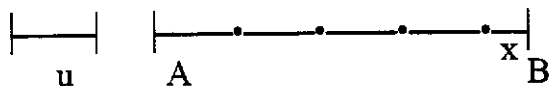
O trabalho deve ser iniciado recordando o princípio para marcar pontos sobre uma reta tendo uma medida padrão.

1.º O segmento pode ser dividido em partes iguais para uma determinada medida padrão.



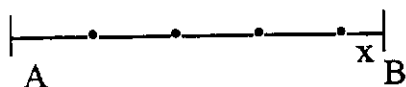
Neste caso, o segmento AB é exatamente $4u$.

2.º O segmento não tem uma medida exata para uma determinada medida padrão.



Neste caso, o segmento $AB = 4u + x$.

O tamanho x deve ser discutido com os alunos para conseguir um valor aproximado em relação à medida padrão adotada. Por exemplo:



Neste caso particular o segmento $AB = 4\text{cm} + x$.

Discutindo com os alunos e fazendo medições pode-se chegar a um valor aproximado para $x = 0,4\text{cm}$, concluindo que o segmento AB tem como medida um valor aproximado de $4,4\text{cm}$.

Esta idéia é ampliada para a medição sobre figuras geométricas planas.

Para isto, inicialmente deve-se trabalhar com figuras bem simples que têm lados com medidas exatas quando se utiliza uma determinada medida padrão, justificando, portanto, a escolha do retângulo para desenvolver a atividade 1.

Construir uma malha quadriculada sobre a figura utilizada exige do aluno habilidade com o material (régua, compasso, etc.) e conhecimento sobre transformações de medidas e operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Deve-se observar que na atividade 1 a medida do comprimento do azulejo é dada em centímetros (cm) e o comprimento dos lados é medido em metros (m).

O problema deve ser discutido com os alunos, pois estes devem aos poucos ir construindo o seu próprio conhecimento.

Nesta situação-problema os alunos devem perceber a relação existente entre o centímetro e o metro ($1\text{m} = 100\text{cm}$, $1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{m}$) para concluírem que $4\text{m} = 4.100\text{cm} = 400\text{cm}$ e $2,8\text{m} = 2,8.100\text{cm} = 280\text{cm}$. A partir destas conclusões eles descobrem quantos pedaços podem ser colocados sobre cada lado (20 e 14 pedaços).

Após descobrirem o número de unidades de comprimento possíveis de serem colocadas sobre cada lado, inicia-se a construção da malha quadriculada.

Deve-se escolher um ponto de partida que pode ser qualquer um dos vértices. Tomando o vértice D como ponto de partida, marca-se a unidade escolhida sobre os lados

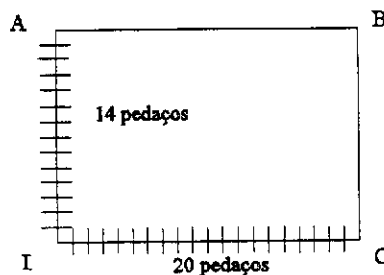
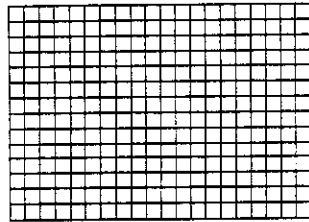


Figura 2

Utilizando-se da régua e do esquadro pelos pontos marcados sobre DC traça-se paralelas ao lado DA e, em seguida, pelos pontos marcados sobre DA traçam-se paralelas a DC, construindo desta forma uma malha quadriculada.



20
Figura 3

Neste ponto recorda-se com os alunos o problema: Quantos azulejos de 20cm de lado são necessários para cobrir uma parede retangular de 4m comprimento por 2,8m de altura?

Ao propor o problema, nosso intuito foi auxiliar os alunos na compreensão da matemática envolvida nas soluções de questões do dia-a-dia, para isso construiu-se um azulejo padrão com forma de um quadrado de 20cm de lado.

Para construir um quadrado, os alunos podiam utilizar construções geométricas ou dobraduras (trabalho realizado durante o estudo da geometria). Após a construção deste, os alunos podem construir outros da mesma medida, utilizando-se de papel colorido e dobraduras.

A malha será coberta colando sobre cada quadradinho um azulejo.

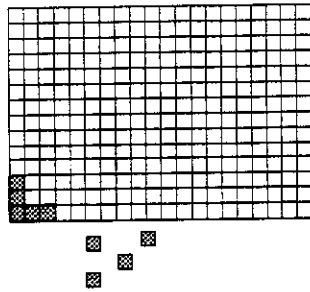


Figura 4

Ao final desta atividade encontra-se quantos azulejos são necessários para cobrir toda a parede fazendo uma contagem ou resolvendo a multiplicação: $20 \cdot 14 = 280$ azulejos, resolvendo assim o problema.

No dia-a-dia nem sempre se encontram regiões planas como o exemplo citado anteriormente. No entanto, pode-se incentivar os alunos a descobrirem caminhos com o auxílio das principais figuras planas já conhecidas por eles. Por exemplo:

Para cobrir com azulejos quadrados uma parede não retangular como a da figura abaixo, quantos azulejos foram necessários?

Azulejo: \square 0,15m

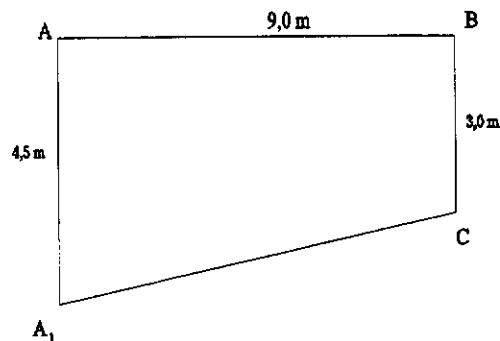
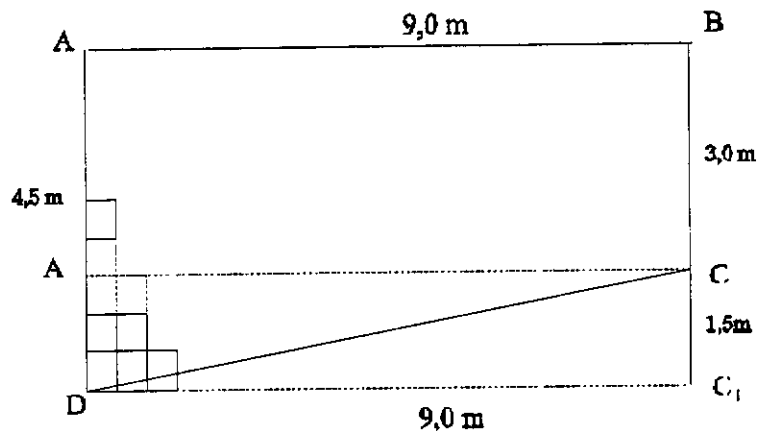


Figura 5

Ao realizar esta atividade, o primeiro momento é reservado para discussões com os alunos. São propostos questionamentos, tais como: (1) A figura geométrica plana é conhecida? (2) Qual é a figura geométrica? (3) Para cobrir de azulejos esta parede, todos serão inteiros? (4) Quantos azulejos são inteiros?



Após identificar a figura e rever a atividade 1 o aluno deve perceber que ao cobrir uma parede de azulejos, muitas vezes não é possível colocar todas as unidades inteiras. Assim, foi preciso dividir a figura dada em um retângulo de 9m de comprimento por 3,0m de altura ($ABCA_1$) e um triângulo retângulo A_1CD que tem por base o comprimento de 9m (A_1C) e altura de 1,5m.

Os alunos são levados a descobrirem que sobre o retângulo $ABCA_1$ seria possível colocar 1.200 azulejos e restaria descobrir a quantidade de azulejos necessários para cobrir o triângulo retângulo (aquele que tem um ângulo de 90°) A_1CD . A partir de A_1CD seria possível completar a figura A_1CC_1D prolongando o lado BC e construindo pelo vértice D uma paralela a A_1C até encontrar o prolongamento de BC. A figura A_1CC_1D é um retângulo.

Ao recordar os conteúdos de geometria, torna-se fácil perceber que o segmento DC é a diagonal do retângulo A_1CC_1D . Logo, ele é dividido em dois triângulos retângulos congruentes e, assim, os alunos podem concluir que a quantidade de azulejos necessários é um número aproximadamente igual à metade da quantidade gasta para cobrir todo retângulo A_1CC_1D . Assim, o número de azulejos necessários para cobrir A_1CD seria aproximadamente 300. Logo, para cobrir ABCD seriam necessários aproximadamente 1.500 azulejos.

Define-se que determinar a área de uma região é saber quantas vezes a unidade escolhida pode ser colocada sobre a região a ser medida. A área é medida em unidades quadradas.

Na 7.^a série do Ensino Fundamental é possível que muitos alunos, mas não todos, tenham conhecimento das medidas de comprimento e de áreas. Entre aqueles que conhecem, muitos utilizam um formulário proposto para calcular a área das principais figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e outras.

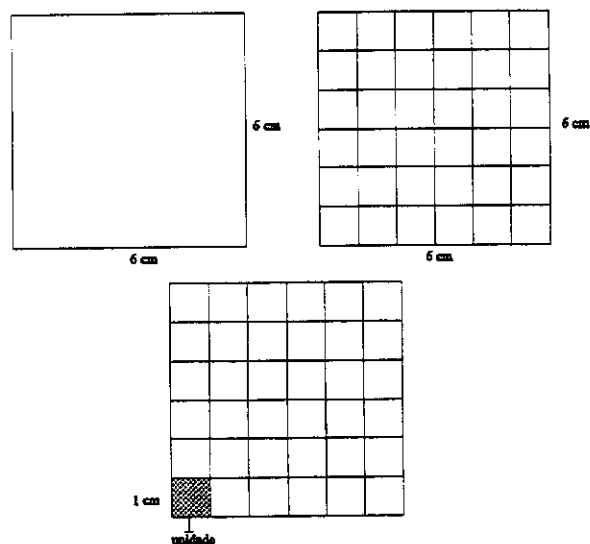
Ao rever os conteúdos sobre áreas de figuras planas os exercícios apresentados foram elaborados de forma a proporcionar ao aluno um novo conhecimento ou um aprofundamento das idéias apresentadas em séries anteriores.

Os alunos foram estimulados a recordar que, ao estudar as medidas de áreas, estas eram apresentadas com base numa unidade padrão chamada metro quadrado (m^2). E que, dependendo da região a ser medida, esta unidade poderia variar de milímetros a quilômetros quadrados, uma vez que sempre podemos relacionar outras medidas quadradas com o metro

quadrado (unidade padrão). Assim, ao calcular a área de regiões planas, conhecidas ou não, deve-se pensar na unidade quadrada a ser utilizada.

Atividade 2 - Área de um quadrado de 6 cm de lado

O primeiro passo foi conceituar a figura geométrica *quadrado* (quadrilátero que tem 4 lados iguais e os 4 ângulos de 90°) com auxílio dos alunos. Mas, se as áreas são medidas em unidades quadradas, escolheu-se uma unidade apropriada para este caso. Os alunos puderam concluir que, dividindo os lados deste quadrado em pedaços de 1 centímetro cada um, poderiam construir uma malha quadriculada onde cada quadradinho tem 1cm de lado



Figuras 7, 8 e 9

Os alunos concluíram que a área de um quadrado de 6 cm de lado é 36 cm².

Neste caso a unidade adaptou-se facilmente porque ela era quadrada e nossa figura tinha números inteiros como medida dos lados.

Atividade 3 - Área de um paralelogramo que tem como base 9cm e altura 3cm

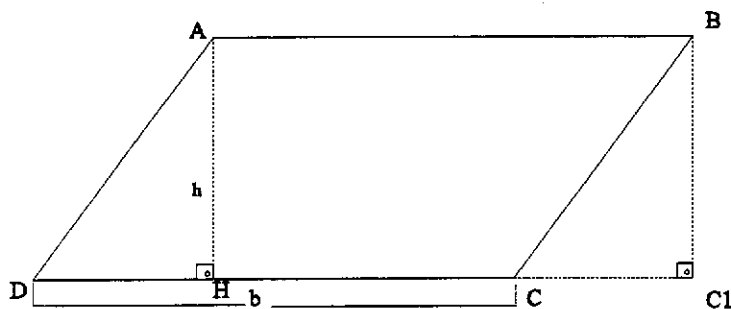


Figura 10

Da geometria, os alunos conseguiram identificar a figura geométrica paralelogramo como quadrilátero que tem os lados opostos (AD e BE, AB e DC) iguais e paralelos e h como sendo a sua altura (linha perpendicular ao lado DC partindo da A).

Para determinar a área do paralelogramo ABCD foi prolongada o lado DC até encontrar BC₁ que é paralelo a h. Assim, os triângulos ADH e BC₁C são congruentes, portanto $\overline{DH} = \overline{CC_1}$.

Os alunos observaram que $\overline{AB} = \overline{HC_1}$, $\overline{AH} = \overline{BC_1}$ e que os quatro ângulos da

figura AHC₁B são de 90°, portanto ela é um retângulo (ver atividade 1).

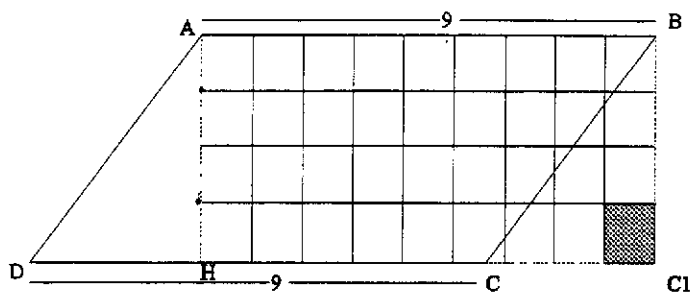


Figura 11

A área do retângulo ABC_1H é igual a $9\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 27\text{cm}^2$.

A área do paralelogramo $ABCD$ é igual a $9\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 27\text{cm}^2$

Para compreender melhor os resultados foi analisado através da figura que: a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a área do trapézio $ABCH$ somada com a área do triângulo AHD ; a área do retângulo ABC_1H é igual a área do trapézio $ABCH$ somada a área do triângulo BC_1C . Como os triângulos AHD e BC_1C são congruentes, suas áreas são iguais. Logo, a área do paralelogramo $ABCD$ é igual à área do retângulo ABC_1H . Portanto, da atividade 1, pode-se concluir que para cobrir o paralelogramo são necessárias 27 unidades quadradas.

Atividade 4 – Área de um triângulo que tem como base 8cm e altura 4cm

Inicialmente conceituou-se a figura geométrica plana triângulo (figura geométrica plana que tem três lados).

Surgem então dúvidas para obter a área de um triângulo. Fazendo-se uma revisão de conteúdos vistos anteriormente encontrou-se uma saída através da área de paralelogramo. A partir do triângulo ABC, construiu-se um paralelogramo ABCD.

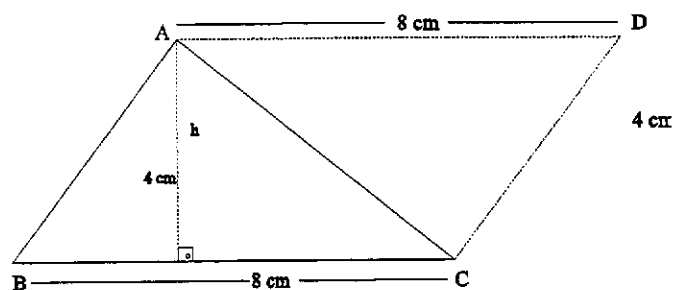


Figura 12

Recordando conteúdos da geometria os alunos perceberam (observando a figura 12) que a altura do triângulo era também a do paralelogramo. A partir desta informação questões foram surgindo:

- *A área do triângulo é igual à área do paralelogramo?
- *A área do triângulo é maior ou menor que a área do paralelogramo?
- *Como determinar a área do triângulo?

Repensando a atividade 3 e fazendo novamente um estudo sobre como encontrar a área, quando a figura geométrica é um paralelogramo, surgiram sugestões para prolongar o lado BC e traçar por D uma linha paralela a h, obtendo o retângulo ADEH.

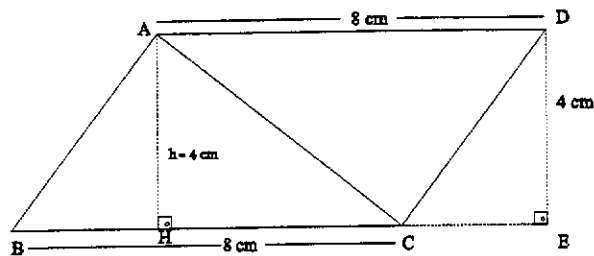


Figura 13

Construiu-se sobre o retângulo ADEH uma malha quadriculada (ver atividade 1).

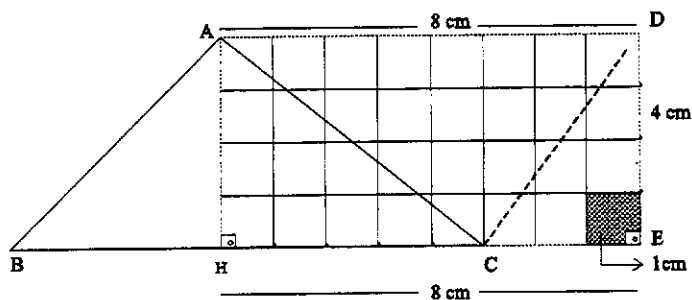


Figura 14

Os alunos, através de uma contagem ou de uma multiplicação $8\text{cm} \cdot 4\text{cm}$, concluíram que a área do retângulo ADEH é igual a 32cm^2 .

Revisando a atividade 3 recordaram que a área do paralelogramo ADCB é igual a área do retângulo ADEH portanto igual a 32cm^2 .

Dos conteúdos estudados na geometria, revisaram que o triângulo ABC é congruente com o triângulo ACD. Se estes triângulos são congruentes, a razão de semelhança é igual a 1.

1) Portanto, a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo ACD e que:

$$A_{ABC} + A_{ACD} = A_{ADCB}$$

$$2. A_{ABC} = A_{ADCB}$$

$$\text{como: } A_{ABC} = A_{ACD}$$

$$\text{então: } A_{ABC} = \frac{1}{2} A_{ADCB}$$

$$\text{Logo: } A_{ABC} = \frac{1}{2} 32\text{cm}^2 = 16\text{cm}^2$$

Ao final deste estudo os alunos concluíram que área de um triângulo de base b e altura h é $A = b \times h / 2$.

Atividade 5 – Como chegar à área total das figuras

a) Área da figura ABCD

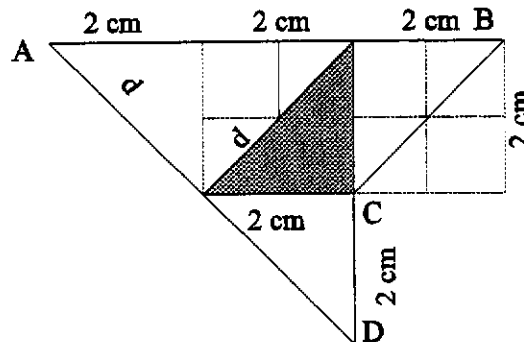


Figura 15

Os alunos foram encorajados a perceberem que a área total da figura podia ser calculada em função da área do triângulo colorido.

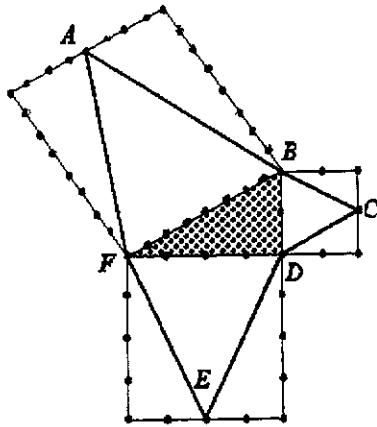


Figura 16

b) Área da figura ABCDEF

Em seguida, determinaram a área de cada figura geométrica e relacionaram com a área colorida, observando a existência ou não de uma proporcionalidade.

Atividade 6 – Áreas aproximadas

Observe a figura ao lado. É possível encontrar por cálculos aproximados a área da figura A?

1) Cobrir a figura A com uma malha quadriculada, formando o retângulo $A_1B_1C_1D_1$.

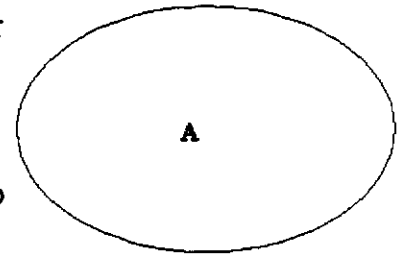


Figura 17

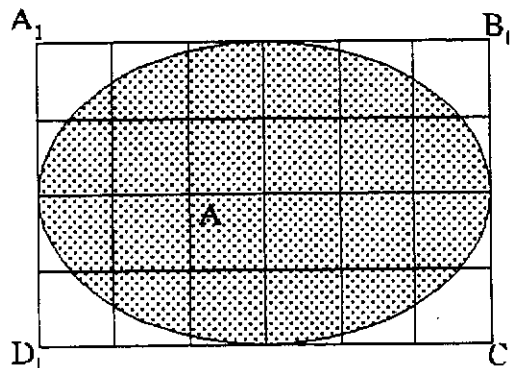


Figura 18

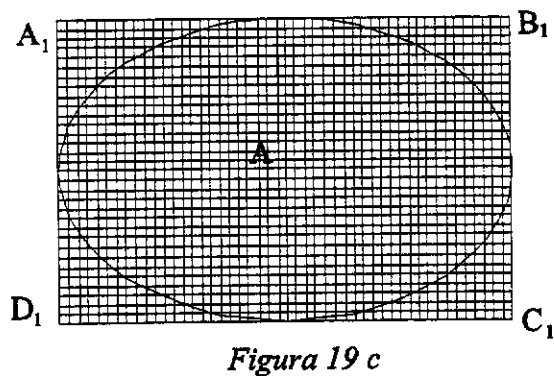
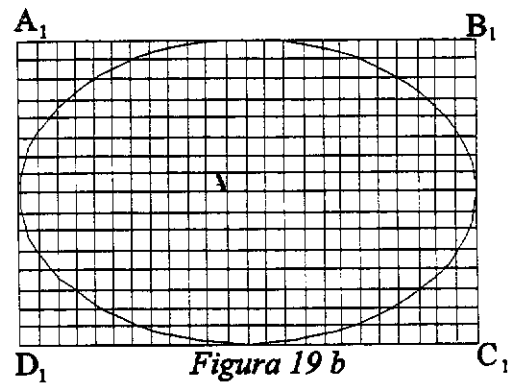
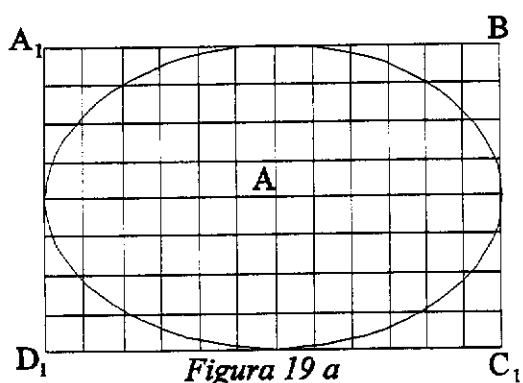
Nesta atividade os alunos procuram descobrir a área da figura A comparando-a com a área do retângulo $A_1B_1C_1D_1$. Para expressar a área do retângulo procedeu-se como na

atividade 1, construindo uma malha quadriculada onde cada unidade quadrada tinha um centímetro de lado. Desta forma, para cobrir o retângulo são necessárias 24 unidades quadradas.

2) Em seguida os alunos verificam quantas unidades quadradas são necessárias para cobrir a figura A.

- Todas unidades são inteiras?
- Quantas unidades inteiras estão sobre A?
- A área da figura A será obtida por um número inteiro?

3) E se tomarmos medidas quadradas menores?

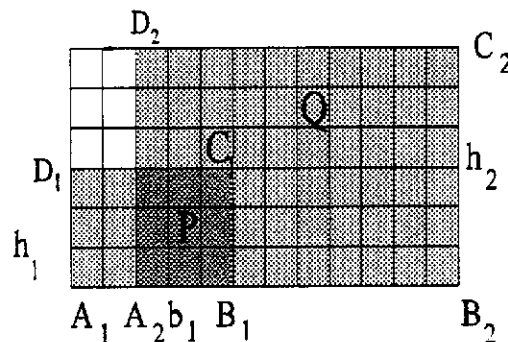


- a) A área da figura A é igual à área do retângulo $A_1B_1C_1D_1$?
- b) A área da figura A é maior que a área do retângulo $A_1B_1C_1D_1$?
- c) A área da figura A é menor que área do retângulo $A_1B_1C_1D_1$?
- d) Para descobrir a área de A podemos desprezar alguns quadradinhos?
- e) Qual seria o melhor valor para expressar a área da figura A?

4) A figura poderá ser coberta por retângulos?

Atividades 7 e 8 – Figuras semelhantes

Veja as figuras abaixo. O que podemos afirmar a respeito de suas áreas?



- Qual é a área de P em unidades quadradas? (P quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$)
- Qual é a área de Q em unidades quadradas? (Q quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$)
- Qual é a razão entre as áreas das figuras P e Q?

$$A_p = 15 u$$

$$A_q = 60 u$$

$$\frac{Ap}{Aq} = \frac{15}{60}$$

$$\frac{Ap}{Aq} = \frac{1}{4}$$

Atividade 9

$$Af = 8 \text{ u}$$

$$Ag = 32 \text{ u}$$

$$\frac{Af}{Ag} = \frac{15}{60}$$

$$\frac{Af}{Ag} = \frac{1}{4}$$

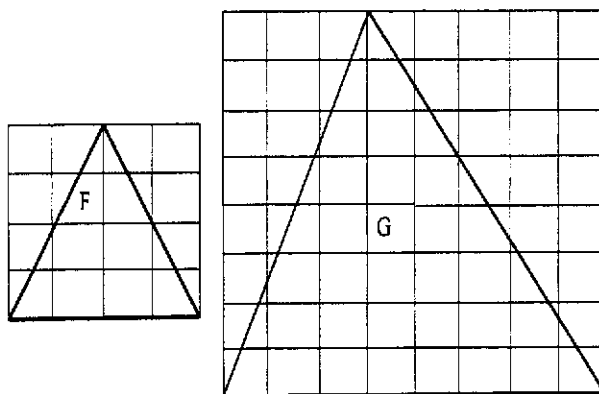


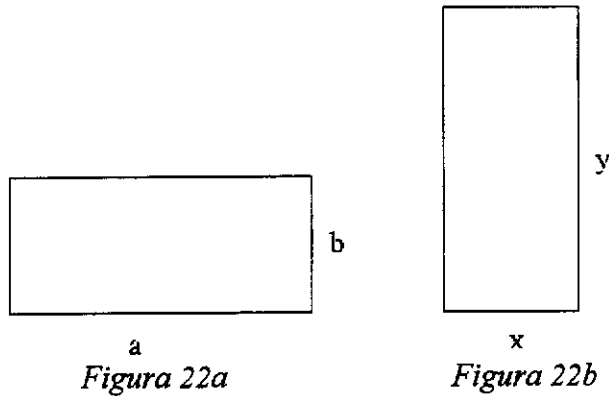
Figura 21

O aluno era orientado a concluir que:

- 1) Duas figuras congruentes possuem a mesma área, logo, sua razão de semelhança é 1.
- 2) As áreas de duas figuras semelhantes e não congruentes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

Depois de explorado o conceito de área foi necessário mostrar sua ligação com os conceitos algébricos. Ao iniciar o estudo de áreas os alunos não tinham nenhuma noção do significado da expressão $b.h$ (base multiplicada pela altura) dentro do cálculo algébrico. Para eles era apenas uma expressão mágica que lhes permitia calcular a área de um retângulo.

Atividade 10 – Área do retângulo



Com base no conceito construído a partir da atividade 1, os alunos puderam escrever que a expressão da área de um retângulo é:

$$a \cdot b \quad \text{e} \quad x \cdot y$$

Atividade 11 – Expressão da área do paralelogramo

A partir da área do retângulo A_1B_1CD , os alunos foram orientados para perceber que a área da figura $ABCD$ era igual à figura A_1B_1CD (ver atividade 3).

Observando que:

- a) a figura $ABCD$ tem a mesma base (DC) e altura (h) que a figura A_1B_1CD ;
- b) os triângulos A_1AD , ADG e B_1BC são triângulos retângulos congruentes;

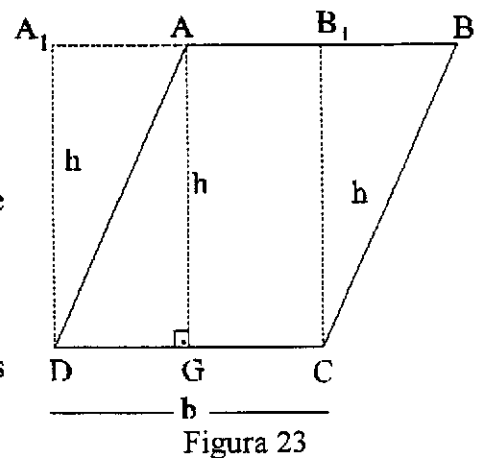


Figura 23

c) os triângulos A_1AD , ADG e B_1BC possuem a mesma área (cada área vale a metade da área do retângulo A_1AGD)

d) $A_{ABCD} = A_{ABCG} + A_{AGD}$ e $A_{A_1B_1C'D} = A_{AB_1C'D} + A_{A_1A'D}$ como: $A_{AGD} = A_{A_1AD}$

Conclui-se, então, que: $A_{ABCD} = A_{A_1B_1C'D} = b.h$

Atividade 12 – Expressão da área do triângulo

Os alunos observaram a figura ABC e, a partir desta, tiveram uma orientação para completar a figura e obter outra ADBC. E, ao recordar os conteúdos anteriores, concluíram que:

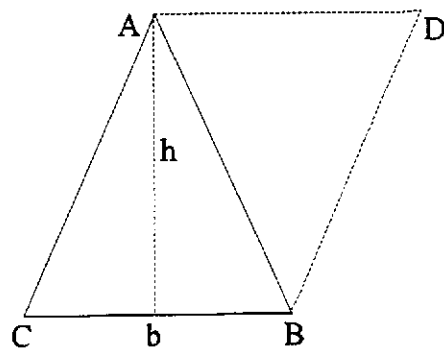


Figura 24

ADBC é um paralelogramo e ABC é um triângulo, congruente com ADB.

$$\text{Área}_{ABDC} = \text{Área}_{ABC} + \text{Área}_{ADB}$$

como $\text{Área}_{ABC} = \text{Área}_{ADB}$ conseqüentemente:

$$\text{Área}_{ADBC} = 2 \text{Área}_{ABC}$$

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} \text{Área}_{ADBC}$$

logo, a expressão da área do triângulo ABC é $\frac{b \cdot h}{2}$

Atividade 13 – Expressão da área de um trapézio

A partir das expressões que dão as áreas do retângulo e do triângulo podemos obter outras expressões que representam as áreas:

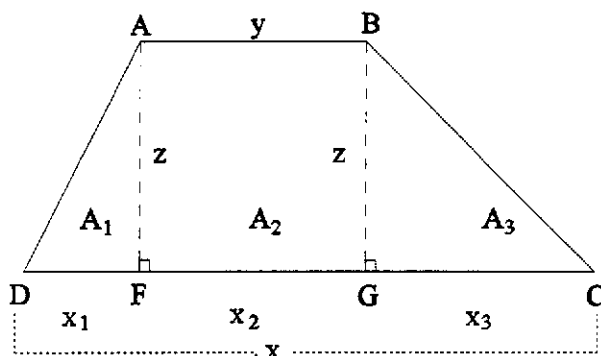


Figura 25

Qual é a expressão da área da figura ABCD se $x \parallel y$ e $x = x_1 + x_2 + x_3$?

Como a área de ABCD = área (A_1) + área (A_2) + área (A_3), temos:

A_1 representa a área do triângulo ADF e da atividade anterior que é dada pela expressão

$$\frac{x_1 \cdot z}{2}$$

A_2 representa a área do retângulo ABGF, cuja expressão é $x_2 \cdot z$

A_3 representa a área do triângulo BCG e é dada pela expressão: $\frac{x_3 \cdot z}{2}$

Logo, temos que a área de ABCD é dada pela expressão:

$$\frac{x_1 \cdot z}{2} + x_2 \cdot z + \frac{x_3 \cdot z}{2} = \frac{x_1 \cdot z + 2x_2 \cdot z + x_3 \cdot z}{2} = \frac{x_1 \cdot z + x_2 \cdot z + x_3 \cdot z + x_2 \cdot z}{2}$$

A expressão ainda pode ser escrita

$$\frac{x_1.z+x_2.z+x_3.z+x_2.z}{2} = \frac{(x_1+x_2+x_3+x_2).z}{2} = \frac{(x+x_2)z}{2} = \frac{(x+y)z}{2}$$

lembrando que $x_1+x_2+x_3 = x$ e $x_2 = y$ (informações do problema)

Atividade 14 – Aplicações práticas

Mário mora em uma chácara. Para criar galinhas foi preciso construir um galinheiro. Observando o espaço disponível, resolveu utilizar 84m de tela e uma parede já construída, como na figura abaixo.

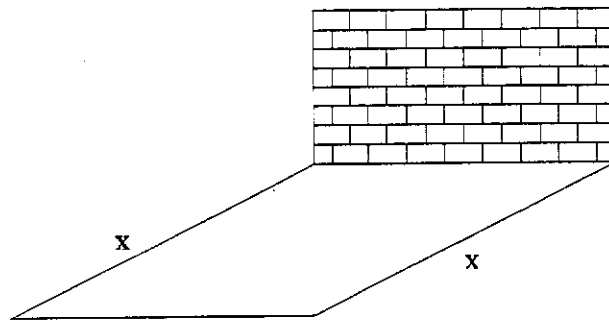


Figura 26

- Escreva uma expressão algébrica que represente a área
- Para obter a maior área, que valor você escolheria para x ?

$$x=21 \text{ m } x = 25 \text{ m ou } x = 15 \text{ m}$$

Atividade 15 – Aplicações práticas

Observe a montagem de uma caixa retangular:

- inicialmente temos o recorte de papel de forma retangular

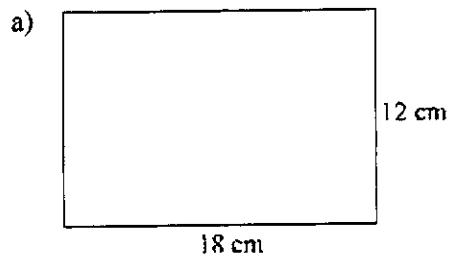


Figura 27a

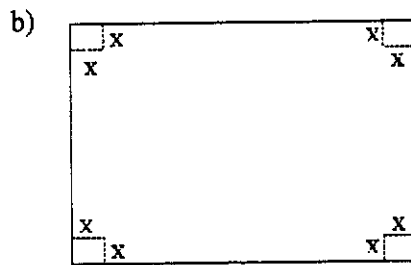


Figura 27b

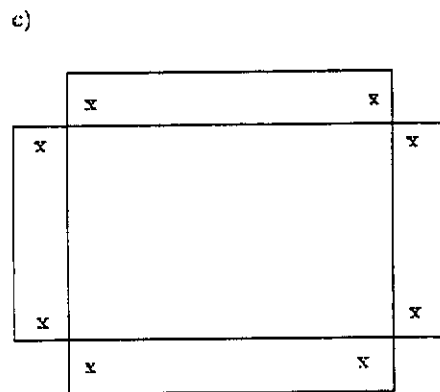


Figura 27c

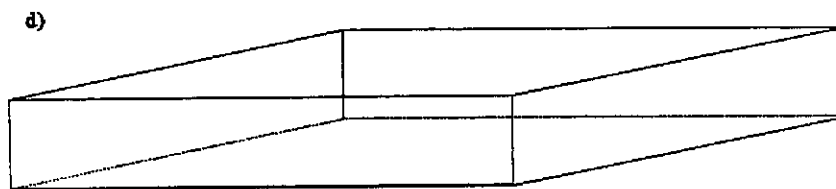


Figura 27d

Escrever um polinômio que expresse a área da base.

O polinômio encontrado: $P(x) = (18 - 2x) \cdot (12 - 2x)$

CAPÍTULO III

RESULTADOS ALCANÇADOS A PARTIR DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA

DE ENSINO INTEGRADO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA

RESULTADOS ALCANÇADOS A PARTIR DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO INTEGRADO DE GEOMETRIA E ÁLGEBRA

Neste capítulo se apresentam e se analisam os resultados obtidos a partir da aplicação das atividades didáticas propostas para desenvolver o programa de ensino integrado de geometria e álgebra, nas 7.^{as} séries do Ensino Fundamental no CEPAE, análise esta direcionada para reflexões sobre a proposta em questão. A análise se refere ao processo de desenvolvimento dos alunos em relação à compreensão de textos matemáticos, à formação de conceitos, à aplicação dos conteúdos aprendidos na resolução de problemas. Para esta análise foram considerados também os princípios do sistema de avaliação do CEPAE (Regimento CEPAE, p. 18).

- “Art. 107 – A avaliação deve ser entendida como um processo contínuo de obtenção de dados e informações, análise e interpretação dos resultados da ação educativa, visando:
- a) diagnosticar a situação de aprendizagem do aluno, possibilitando-lhe tomar consciência dos seus avanços e dificuldades em função do trabalho realizado, bem como mudar seus objetivos, seus métodos e técnicas de estudo, se necessário;
 - b) fornecer ao professor e ao CEPAE elementos de reflexão sobre o trabalho realizado, a fim de estabelecer os objetivos que nortearão o replanejamento, se necessário, dos

planos de ensino, dos programas e atividades, ou do próprio currículo, na perspectiva do aprimoramento do processo educativo.

- c) embasar a tomada de decisão quanto à promoção de aluno.”

Ao aplicar as atividades didáticas nas 7.^{as} séries do CEPAE, aplicações estas sob responsabilidade da autora deste estudo já que a mesma era a professora de matemática destas séries, pode-se constatar que havia:

a) QUANTO À MATEMÁTICA:

- a.1) Heterogeneidade de domínio de conteúdos.
- a.2) Falta de base dos alunos, seja na leitura e compreensão de textos seja nos conteúdos específicos de matemática.
- a.3) Dificuldades no processo de generalização e abstração de conhecimentos matemáticos.

b) QUANTO À METODOLOGIA DE ENSINO:

- b.1) Desinteresse dos alunos pelo atendimento em pequenos grupos, ou de forma individualizada.
- b.2) Interesse pela aprendizagem por parte dos alunos com problemas emocionais.
- b.3) Integração insatisfatória da escola/família;

c) Quanto as possíveis contribuições do ensino-aprendizagem do conteúdo áreas de figuras planas para o ensino-aprendizagem de outros conteúdos matemáticos específicos do ensino de segundo e terceiro graus.

a) QUANTO À MATEMÁTICA

a.1) Heterogeneidade de domínio de conteúdo

Ao analisar o desempenho dos alunos na Atividade 1 apresentada no capítulo anterior verificou-se que a heterogeneidade de domínio de conteúdo da turma constituiu uma grande dificuldade em alguns momentos do processo de ensino-aprendizagem. Tentou-se minimizar esta dificuldade ao acatar situações-problema propostas pelos alunos, tais como colocar ladrilhos no piso da sala de aula, revestir com azulejos a piscina do centro esportivo e trabalhar os problemas presentes no livro-texto, cujos conteúdos faziam referência ao dia-a-dia dos alunos. Exemplos:

Atividades presentes no livro-didático

1) Calcule a área das superfícies sombreadas:

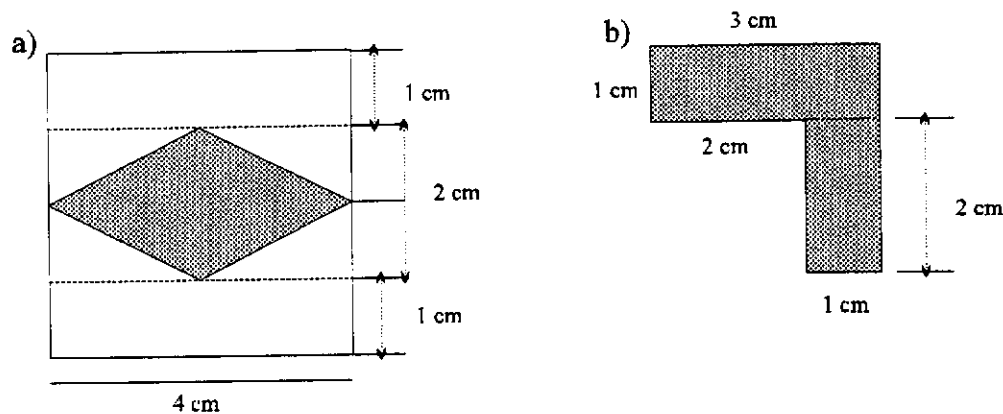


Figura 28

Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos obedeceram as seguintes etapas de um plano, que se iniciava com uma observação meticulosa das figuras, seguida por respostas às seguintes perguntas:

- Quais as figuras geométricas presentes?
- Todas são conhecidas?
- É preciso decompor alguma delas em figuras conhecidas (retângulos, quadrados, triângulos, etc.)?
- Quais as propriedades das figuras envolvidas.
- O que fazer para calcular a área de um retângulo?
- O que fazer para calcular a área de um losango?
- Qual a área da figura sombreada em (a)?
- Qual a área da figura sombreada em (b)?

Após o desenvolvimento da atividade, os alunos percebem a importância de fazer um plano para solucionar uma situação-problema.

2) – Um banheiro retangular com 4,5 m de largura, 9 m de comprimento e 2,7 m de altura vai ser reformado. Quantos azulejos quadrados de 15 cm de lado serão necessários para forrar as paredes, considerando que a porta e a janela ocupam 4,5 m² de área?

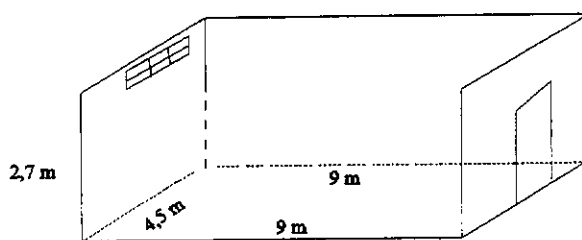


Figura 29

• Representar geometricamente a idéia deste banheiro

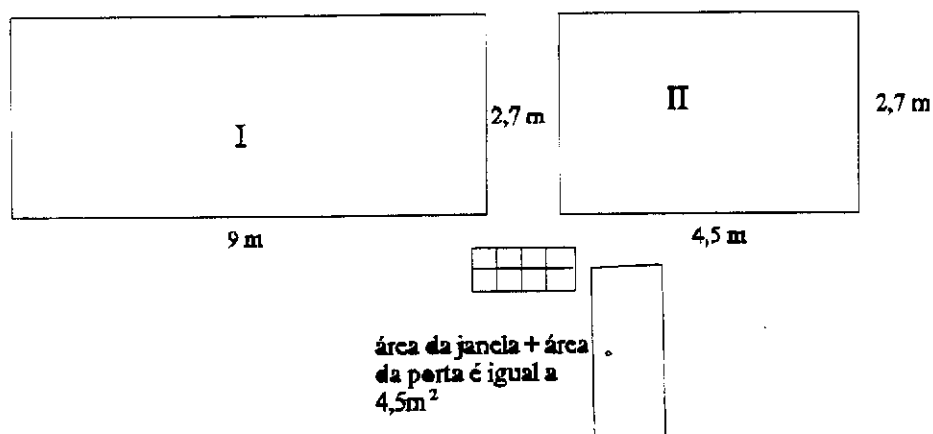


Figura 30

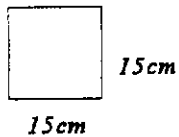
• Calcular as áreas I e II;

$$A_1 = 9\text{m} \cdot 2,7\text{m} = 24,3\text{m}^2$$

$$A_{II} = 4,5\text{m} \cdot 2,7\text{m} = 12,15\text{m}^2$$

$$A_T = 2A_I + 2A_{II} - 4,5\text{m}^2 = 68,4\text{m}^2$$

- Calcular a área do azulejo;



$$A_a = 15\text{cm} \cdot 15\text{cm} = 225\text{cm}^2$$

- Verificar as unidades de áreas e relacioná-las;

a área total do banheiro está em m^2 e a área do azulejo está em cm^2

mas: $1\text{m}^2 = 10000\text{cm}^2$

$$A_T = 68,4\text{m}^2 = 68,4 \cdot 10000\text{cm}^2 = 684000\text{cm}^2$$

- Calcular a quantidade de azulejos para a área total.

$$Q_a = \frac{A_T}{A_a} \quad \text{onde } Q_a \text{ é a quantidade necessária de azulejos para todo banheiro.}$$

$$Q_a = 3040 \text{ azulejos}$$

As idéias presentes nesta atividade, devem ser ampliadas, propondo uma outra atividade em que o piso tenha uma inclinação de 3cm.

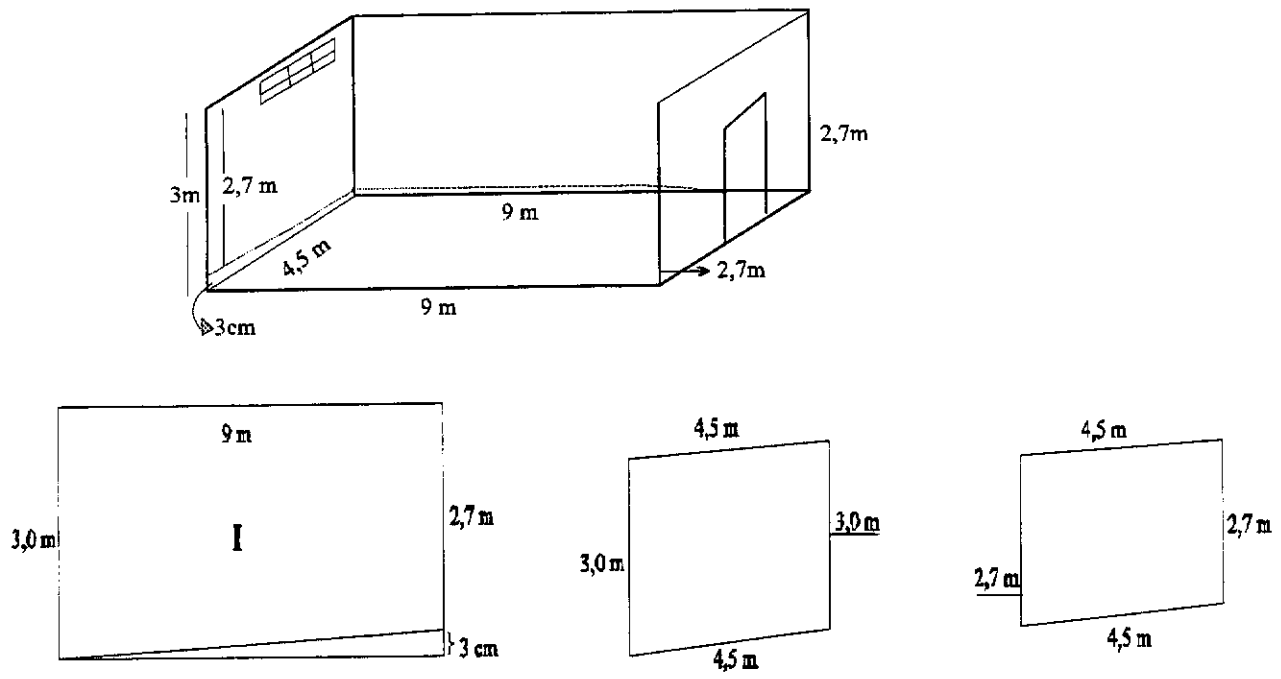


Figura 32

3) Um terreno quadrangular vai ser dividido em dois lotes iguais, como mostra a figura 33. Escreva o polinômio que expressa a área, em metros quadrados, reservada para a rua e para a área de lazer e determine essa área para os seguintes valores de x :

- a) 10 b) 15

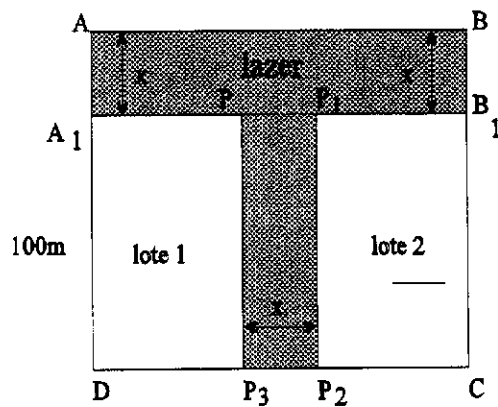
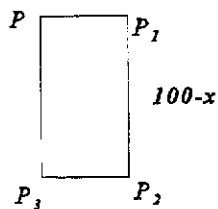
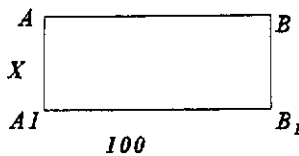


Figura 33

- 1) Identificar a figura geométrica de forma quadrangular.
- 2) Definir o que é um polinômio.
- 3) Identificar as figuras geométricas formadas com a decomposição da figura ABCD.
- 4) A figura $PP_1P_2P_3$ é um retângulo de largura x e altura $100-x$.
- 5) Acompanhando o desenvolvimento da atividade os alunos vão perceber que:



$$A_{PP_1P_2P_3} = x(100-x) = 100x - x^2$$



$$A_{ABB_1A_1} = 100 \cdot x$$

A área utilizada para a rua e para o lazer será dada pela soma:

$$P(x) = A_{ABB_1A_1} + A_{PP_1P_2P_3}$$

$$P(x) = (100x - x^2) + 100x$$

$$P(x) = 100x - x^2 + 100x$$

$$P(x) = 200x - x^2 \quad (P(x) \text{ é o polinômio procurado})$$

Nestas atividades os alunos revisaram conteúdos geométricos, tais como quadrado e retângulo; e os algébricos, soma de termos algébricos e polinômios.

Outro aspecto que merece ser destacado é que atividades como a de n.º 1 permitiram aos alunos revisar os conteúdos já vistos e, simultaneamente, estudar novos conceitos. Assim, durante o desenvolvimento desta atividade, os alunos revisaram os conceitos de algumas figuras geométricas planas. Quando, por exemplo, foi feito no quadro giz o levantamento de dados sobre a figura geométrica plana quadrado, propôs-se a seguinte questão: O que é um quadrado?

Ao se observar a figura:

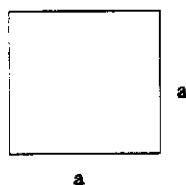


Figura 34

Percebe-se que é uma figura geométrica com as seguintes características:

- a) Possui 4 lados, por isso pertence ao grupo dos quadriláteros;
- b) os 4 lados são iguais;
- c) possui 4 ângulos;
- d) os 4 ângulos são de 90° , portanto iguais;
- e) as diagonais são iguais;
- f) as diagonais se dividem ao meio;
- g) a figura geométrica quadrado é um retângulo.

Verificou-se que, ao trabalhar com a figura geométrica quadrado, revisaram-se os conceitos de ângulo e diagonal; aprofundou-se o conceito de um retângulo; e, como conceito novo, foi apresentado o do próprio quadrado pelos alunos, que tinham conhecimento da figura, mas não conseguiam conceituá-la. Ainda na Atividade 1, os alunos tiveram a oportunidade de compreender e aplicar o processo de medição que, para quase todos, era uma novidade.

Como foi dito no capítulo anterior, o ensino de geometria no CEPAE acontece desde a 5ª série do Ensino Fundamental. Inicialmente os alunos concluíram que se os lados e os ângulos são iguais, o quadrado é uma figura geométrica regular e que sua área é a^2 . No entanto, a explicação do porquê de a área ser a^2 , só foi possível após o trabalho sobre o conceito de área e o estudo de expressões algébricas.

Para avaliar os resultados foram observadas as etapas:

(1) a identificação de figuras geométricas (quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos, etc.); (2) a composição e a decomposição de diferentes figuras geométricas (em quadrados, retângulos, triângulos, etc.); (3) a aplicação dos conhecimentos geométricos adquiridos para solucionar situações-problema de geometria ou de outros conteúdos (como os algébricos).

As atividades foram organizadas para que os alunos pudessem adquirir ou aprimorar os conceitos de medição e de área e ao estudar áreas pudessem construir expressões algébricas.

Aplicando as primeiras atividades encontrou-se dificuldades para despertar o interesse dos alunos para a construção dos conceitos de medição e de área, devido ao conhecimento memorizado das fórmulas que eles já haviam incorporados. Observou-se que o desinteresse maior ocorreu entre os alunos mais velhos. Assim, ao analisar os primeiros resultados, constatou-se que 80% dos alunos venceram as etapas (1) e (2) descritas anteriormente, 40% venceram as etapas (1), (2) e (3) e que apenas 20% conseguiram passar por todas as etapas.

Os primeiros resultados foram levados ao conhecimento dos alunos, iniciando um novo momento de estudo, quando foi mostrada a importância do conhecimento matemático para solucionar problemas (são apresentadas aos alunos novas atividades onde a memorização de uma fórmula matemática não é o suficiente para solucionar um problema).

E ainda, os resultados acima apresentados serviram de indícios nos quais a pesquisadora responsável por esta investigação se baseou para definir quais os conteúdos que os alunos não dominavam, conteúdos estes pré-requisitos para o desenvolvimento das atividades matemáticas propostas para as 7.^{as} séries do Ensino Fundamental. Em razão disto planejou-se as atividades de ensino de forma a considerar tal fato (Piaget, 1975, Vygotsky, 1993, Kock, s. d.; Polya, 1978).

- a.2) A falta de base dos alunos, quer seja na leitura e compreensão de textos quer seja nos conteúdos específicos da Matemática

Saber ler com compreensão significa que cada palavra percebida pelos alunos, na leitura de um texto matemático, deve ter um sentido claro para eles em uma determinada situação-problema apresentada. Observou-se que os alunos, amostra da presente pesquisa, não formaram o hábito da leitura em Matemática e que, em muitas situações-problema apresentadas, não foram capazes de separar os dados, a incógnita e, por isto, não puderam resolver a questão.

Segundo Polya (1978, p. 4),

“O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

No processo ensino-aprendizagem da matemática a aquisição do conhecimento acontece, assim como ocorre nas outras disciplinas, de forma gradativa de uma série para outra, considerando as habilidades específicas de cada aluno. É preciso que a cada etapa vencida o trabalho dos professores seja visto de forma continuada não deixando que existam lacunas na apresentação e revisão de conteúdos.

Constatou-se, através dos resultados do presente estudo, que os alunos consideram a Matemática difícil e muitas vezes enfadonha. Têm dificuldades para compreender os

problemas propostos porque muitas vezes não sabem o que é pedido. Acreditam que, quando o professor faz a leitura de um problema, 'tudo' fica muito claro.

Observou-se que os alunos sentem grande prazer em resolver situações que envolvem aplicações, tal como ocorre nas apresentadas no capítulo anterior. A partir destas conseguem mostrar outras situações.

A falta de base dos alunos pode ser vencida se o professor for habilidoso e preparar atividades onde os conteúdos das séries anteriores puderem ser revistos e os novos surgirem a partir de uma situação-problema apresentada. O professor não pode esperar que todos os alunos da classe tenham o mesmo rendimento, mas deve respeitar o crescimento individual de cada um, incentivando-os a se tornarem cada vez mais hábeis na construção de um pensamento lógico, na argumentação, na análise ou demonstração de situações da vida prática.

a.3) Dificuldades nos processos de abstração e generalização de conhecimentos matemáticos

A construção do conhecimento matemático se tornou um avanço à medida que os alunos conseguiram abstrair e generalizar determinados conteúdos.

Ao introduzirmos o conceito de área, o aluno trabalhava apenas com dados numéricos. Depois de um certo tempo no estudo de área conseguimos expressar as idéias representadas em valores numéricos para letras. Foi preciso bastante cuidado, pois no estudo

da álgebra considera-se importante que o aluno consiga traduzir com significado uma linguagem algébrica e generalizar situações. Podemos citar o caso da área de um retângulo. Para fazer uma generalização para o cálculo de sua área foi preciso fazer o estudo colocando o retângulo em diferentes posições, para deste modo mostrar que sua área, apesar da posição, ainda seria $A = b \cdot h$ (área é igual a base multiplicada pela altura ou o comprimento multiplicado pela largura). O trabalho foi apresentado em diferentes etapas, por exemplo:

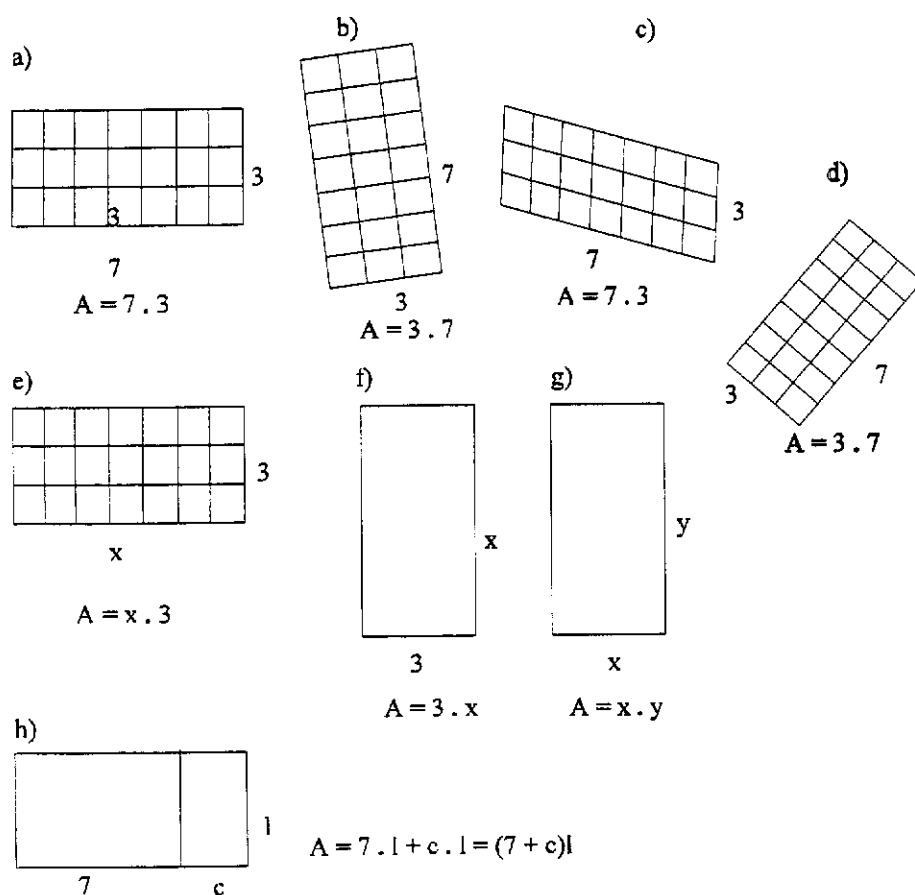


Figura 35

As atividades 1, 2, 3, 4, 5 e 6 apresentadas no capítulo anterior, exigiram do aluno a formação dos conceitos de medidas e de áreas. Através destes conseguiram resolver problemas apresentados em valores numéricos. A partir de atividades como estas os alunos puderam avaliar e concluir que toda figura que tiver uma forma quadrangular, retangular ou triangular passa pelo mesmo raciocínio lógico. Esta conclusão foi fundamental para a compreensão de que quando se pode subdividir uma figura geométrica plana em quadrados, retângulos ou triângulos é possível obter um número para expressar a sua área.

O estudo de áreas aconteceu numa forma ordenada, de tal modo que cada atividade fosse um problema auxiliar para a atividade seguinte e as outras demais.

Segundo Polya (1978, p. 72),

“Os professores e autores de livros didáticos não devem esquecer que o estudante inteligente e o leitor inteligente não se satisfazem em verificar que os passos do raciocínio estão corretos, mas desejam também conhecer a motivação e a finalidade dos vários passos. (...) A matemática é interessante na medida em que ocupa nossas faculdades de raciocínio e de invenção. Mas nada se aprenderá sobre raciocínio ou invenção se a motivação e a finalidade do passo mais notável permanecer incompreensível.”

Ao desenvolver a atividade 6, apresentada no capítulo anterior, o aluno teve a oportunidade de verificar que em determinadas situações o conteúdo internalizado por eles permitiu apenas o cálculo de um valor aproximado para expressar a área por falta ou por excesso.

A partir das atividades 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os alunos conseguiram perceber que todo retângulo e todo paralelogramo têm como área o comprimento multiplicado pela largura ou a base multiplicada pela altura. Depois desta compreensão o próximo passo foi equacionar a área:

$$A = c \cdot l, \quad A = b \cdot h \quad \text{ou} \quad A = x \cdot y.$$

Para uma figura triangular a expressão algébrica é:

$$A = \frac{c \cdot l}{2}, \quad A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x \cdot y}{2}$$

Para Polya (1978, p. 73), “Equacionar significa expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas.”

Embora o trabalho com o cálculo de áreas tenha sido revisado em diferentes momentos de nossa programação anual, ainda foi possível observar a grande dificuldade dos alunos na passagem do cálculo aritmético para o cálculo algébrico. Este fato comprovou a existência de deficiências de aprendizagem nos conteúdos aritméticos, uma vez que os conteúdos algébricos são considerados uma generalização daqueles. Com a pretensão de amenizar tais dificuldades, os alunos foram orientados no sentido de compreenderem que operações e propriedades do cálculo aritmético estavam presentes nos diversos conteúdos do cálculo algébrico, isto é, procurou-se encaminhar o raciocínio dos alunos para descobrir que havia ligações entre os mesmos.

A princípio foi possível mostrar as técnicas de operações elementares ao juntar áreas de diversas figuras geométricas, onde os conteúdos como expressões algébricas, polinômios, fatoração e produtos notáveis estavam presentes. Foi possível ampliar os conteúdos de equações, inequações e sistemas de equações do 1.º grau.

b – QUANTO À METODOLOGIA DE ENSINO

b.1) Desinteresse dos alunos pelo atendimento em pequenos grupos ou de forma individualizada

Como foi dito no capítulo II, no CEPAE, de segunda a sexta-feira, existe um programa de atendimento aos alunos, realizado pelos diversos professores da área de Matemática. Como este não é um atendimento obrigatório, os alunos geralmente só o procuram às vésperas de alguma avaliação programada. Desta forma detectou-se que no Ensino Fundamental, até mesmo após obterem conceitos insuficientes, isto não têm sido um motivo para uma maior frequência dos alunos a tais atendimentos. Outro procedimento utilizado no CEPAE por alguns professores é a formação de grupos de estudo sob sua coordenação, com a finalidade de favorecer o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, procurando alcançar o nivelamento dos alunos. Para que os alunos das 7.^{as} séries comparecessem à Escola para os atendimentos que têm por finalidade a recuperação de conteúdo foram constituídos grupos de estudo. No entanto, o trabalho ficou comprometido devido ao número elevado de faltas dos alunos, o que dificultou o nivelamento das turmas.

Por essas razões, pode-se concluir que as aulas de matemática nas 7.^{as} séries através do ensino integrado de geometria e da álgebra não foi um fator de estimulação dos alunos no que se refere à participação nos eventos referidos anteriormente.

No início da aplicação das atividades do programa de ensino integrado da geometria e da álgebra detectou-se que existiam alunos repetentes e que alunos com conflitos familiares manifestavam desinteresse pelo estudo.

Os alunos repetentes constituíam um pequeno grupo (8,3%). No desenvolvimento das atividades observou-se que desse grupo alguns alunos passaram a participar ativamente do processo de ensino–aprendizagem, tentando recuperar os conteúdos que os levaram à reprovação no ano anterior. Somente um destes alunos considerou a sua reprovação injusta no ano anterior e fez da sala de aula um momento de recreação. Nenhuma atividade despertou a atenção desse aluno.

b.2) Interesse pela aprendizagem por parte dos alunos com problemas emocionais

Os conflitos familiares foram considerados pela pesquisadora como um problema que esteve presente em todos os momentos de sua prática pedagógica. Além de trabalhar com uma metodologia de ensino, que visava a estimular o interesse pela aprendizagem, a pesquisadora explorou as discussões realizadas sobre os alunos nos Conselhos de Classe e as consultas feitas ao Serviço de Psicologia (levantamento de dados coletados em séries anteriores), a fim de favorecer o processo de aprendizagem dos alunos portadores de conflitos

familiares. Os dados comprovaram que 86,4% foram aprovados em matemática através de integração da geometria e da álgebra.

Também Atividades como as de número 1 a 6 (vide Capítulo II), que exigiam habilidades manuais, percepção e criatividade, conduziram os alunos a desenvolver o gosto pelo trabalho individualizado, constituindo momentos de tranquilidade e prazer. Atividades como estas fizeram com que parte dos alunos descobrisse o gosto de aprender matemática deixando de lado os problemas vivenciados fora da sala de aula.

b.3) Integração insatisfatória da escola-família

No começo do ano letivo, fizemos, inicialmente, exercícios envolvendo os vários conteúdos que foram apresentados aos alunos em séries anteriores. Este trabalho teve como objetivo conhecer as dificuldades dos alunos em conteúdos já trabalhados, a fim de discutir e analisar o programa proposto para a 7ª série do Ensino Fundamental.

A expectativa inicial era contar com o apoio familiar para a organização do trabalho escolar.

Após o primeiro Conselho de Classe foi sugerida uma reunião com os pais para discutir as metas traçadas pelos professores da 7.ª série com a finalidade de melhorar o ensino-aprendizagem nas turmas. Para a reunião compareceram em torno de 30% do total de pais dos alunos. Constatou-se também que a maioria dos pais, cujos filhos apresentavam um desempenho insatisfatório, esteve ausente.

Na reunião, um dos assuntos trabalhados foi o horário de atendimento aos alunos por parte dos professores, estagiários e monitores em todas as disciplinas, bem como o horário de atendimento aos pais ou responsáveis, e a forma do desenvolvimento do trabalho pedagógico durante o ano letivo.

No trabalho pedagógico da 7.^a série em matemática, contou-se com o trabalho de estagiários do 4.º ano de Licenciatura em matemática, de um monitor e de todo grupo de professores de matemática, para esclarecimento de dúvidas.

Durante todo o ano letivo, estabeleceu-se também um horário para o atendimento aos pais.

Ao final do ano escolar observou-se que o horário disponível para os pais e alunos foi pouco aproveitado. A presença dos pais foi bastante solicitada através de correspondência, mas com pouco retorno. Observou-se durante o ano letivo que os pais compareceram muito pouco à Escola e os alunos deixaram de aproveitar os atendimentos e o trabalho proposto nos grupos de estudo.

Pode-se constatar que a família tem lugar de destaque no trabalho pedagógico.

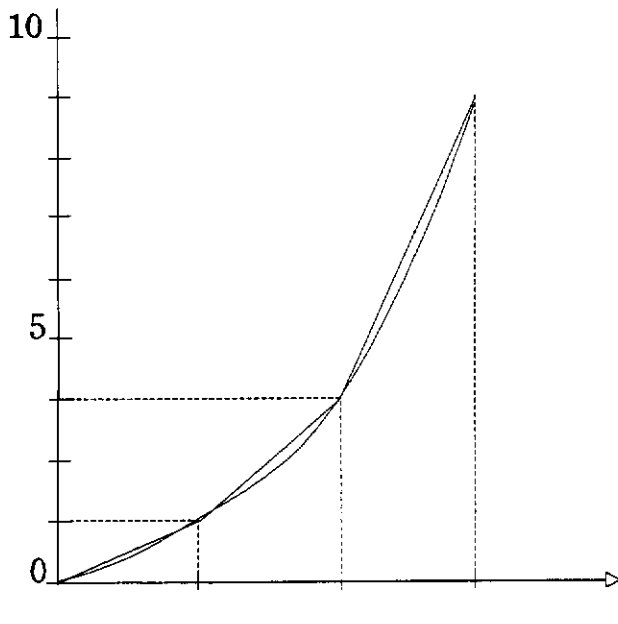
O papel da família é, conjuntamente com a escola, o de incentivar os alunos a participarem de todas as atividades programadas pela escola, além de valorizar o ensino-aprendizagem como construção da cidadania. O incentivo familiar deveria contribuir para a participação dos alunos nos atendimentos extraclasse, conduzindo-os para o trabalho independente, buscando a escola como um dos locais onde é possível adquirir conhecimento.

Portanto, pode-se concluir que o programa de ensino integrado de geometria e álgebra poderia ter obtido resultados mais significativos do ponto de vista educacional e da aprendizagem, caso houvesse uma maior integração escola-família.

c) QUANTO ÀS POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO ÁREAS DE FIGURAS PLANAS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE OUTROS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS ESPECÍFICOS DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS

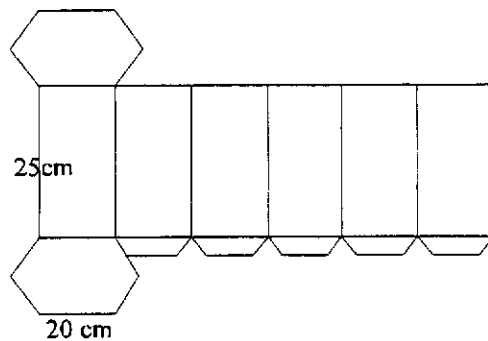
O conteúdo Área de Figuras Planas está presente em outras séries além da 7.^a, como, por exemplo, na 8.^a série do Ensino Fundamental. Este conteúdo se apresenta como aprofundamento de estudos realizados em séries anteriores e também no estudo de outras áreas de figuras planas tais como: círculo, pentágono, hexágono, dentre outras.

A partir do primeiro ano do Ensino Médio aplicações que envolvem áreas de figuras planas são frequentes. 1.^o exemplo: Ao fazer o estudo de gráficos e funções poderíamos propor aplicações como esta. Observe a figura:



- a) Faça uma estimativa da área sob a curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 3$, somando as áreas dos dois trapézios e do triângulo mostrados.
- b) Faça uma estimativa da área sob a curva, usando meias unidades e somando as áreas de cinco trapézios e um triângulo.
- c) Como se poderia obter uma estimativa melhor?

2.o exemplo: Ao estudar também no Ensino Médio as figuras tridimensionais, deve-se propor questões relacionadas com situações da vida prática: Marcos deseja presentear uma amiga. Construiu uma caixa de papelão na forma de um prisma hexagonal com tampa para colocar o presente. Qual a quantidade de papelão necessária para confeccionar esta caixa se a aresta da base mede 20 centímetros e a aresta lateral 25 cm?



Uma atividade como esta, exigirá do aluno uma enorme sensibilidade para a assimilação do objeto a ser estudado. O aluno, agora, deve compreender o todo e também as partes, pois o objetivo é saber calcular a área total da figura.

No terceiro grau a matemática continua presente em quase todos os cursos. Assim, se encontram conteúdos referentes à subunidade Áreas de Figuras Planas inicialmente nos cursos de geometria e cálculo. O aluno, que acompanhou o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos nos Ensinos Fundamental e Médio e sentiu o valor da integração entre os mesmos, concluirá com tranqüilidade um curso de terceiro grau.

O aluno vai perceber que muitos problemas para serem resolvidos necessitam de um pensamento lógico como os desenvolvidos nas atividades apresentadas no Capítulo 2 deste trabalho. Porém, grande parte dos alunos não consegue fazer a ligação dos conteúdos das disciplinas do terceiro grau com as dos Ensinos Fundamental e Médio.

Estudos realizados (Bolomenos et al., 1994, Barbosa et al., 1995) contribuem para análise do tema proposto no item b.4, anteriormente apresentado, no momento em que sugere a ampliação do papel da geometria nos Ensinos Fundamental e Médio. Isto se justifica pela importância da geometria no desenvolvimento da visualização espacial e na preparação do aluno desde o Ensino Fundamental para as idéias desenvolvidas nos cursos de cálculo.

As aplicações do cálculo irão proporcionar ao aluno a oportunidade de presenciar num único exercício diferentes conteúdos (áreas, perímetros, volumes, etc) estudados nos

Ensinos Fundamental e Médio, contribuindo de forma significativa para solução de problemas no terceiro grau.

O conceito de integral definida torna-se simples, se nos Ensinos Fundamental e Médio o aluno tiver percebido a importância das atividades 1, 2, 3, 5 e 6 apresentadas no Capítulo 2 e os exemplos (1.º) e (2.º) deste Capítulo para determinar a área de uma figura plana. Assim a melhoria da compreensão dos conteúdos matemáticos nos cursos do terceiro grau, que apresentem geometria e cálculo, depende em parte da melhora qualitativa do ensino da matemática nos Ensinos Fundamental e Médio.

Para a pesquisadora Franchi (1995, p. 39),

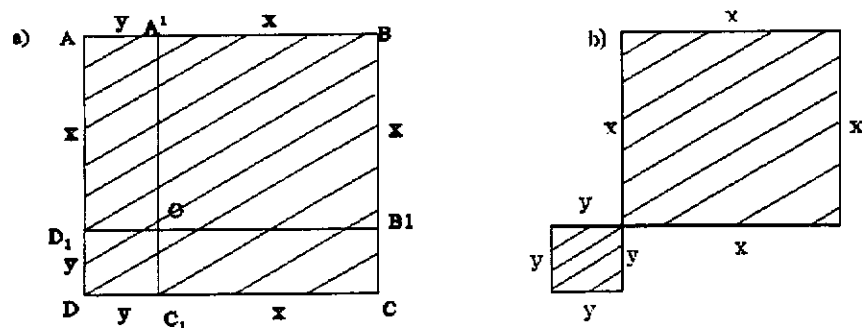
“O processo de aquisição de conhecimento matemático (assim como o conhecimento humano de maneira geral) tem várias etapas. O aluno percorre estas etapas iniciando pelo aspecto afetivo (onde ele deve sentir a matemática presente e ter dela uma compreensão prévia), passando pela interpretação e busca de significado, pela compreensão e chegando até a comunicação (que é a manifestação da compreensão).”

As questões levantadas nesta pesquisa tiveram como finalidade mostrar a complexidade do ensino-aprendizagem da Matemática desde o Ensino Fundamental. A aquisição do conhecimento matemático acontece à medida que se faz, de uma série para outra, um aprofundamento dos conteúdos estudados ao mesmo tempo que se fazem ligações com outros conteúdos. É preciso mostrar aos alunos a importância da geometria, quanto à sua contribuição de forma significativa para a solução de situações-problema da vida prática.

A álgebra foi considerada pelos alunos inicialmente como sendo muito difícil, pois, se com a aritmética podiam obter respostas numéricas particulares, na álgebra era preciso estabelecer procedimentos, relações e expressá-las numa forma simplificada.

Envolvendo a geometria e a resolução de problemas foi possível a compreensão de conteúdos algébricos, de forma que os alunos percebessem o uso da notação em álgebra, o significado das letras e das variáveis. Observe as figuras:

3.º exemplo: Indique a área das figuras sombreadas por uma expressão algébrica (figuras a e b)



Na figura (a):

$$A = y \cdot y + x \cdot y + y \cdot x + x \cdot x$$

$$A = y^2 + 2xy + y^2 \quad \text{ou}$$

$$A = (y+x) \cdot (y+x) = (y+x)^2 \quad \text{logo:}$$

$$E_1 = y^2 + 2xy + y^2$$

$$E_2 = (y+x)^2$$

logo: $E_1 = E_2$ representam a mesma área.

Na figura (b)

$$A = y.y + x.x$$

$$A = y^2 + x^2$$

4.o exemplo: Considere dois números reais quaisquer, x e y . Dê uma expressão algébrica que indique:

a) a soma dos quadrados dos números reais x e y :

$$E_1 = x^2 + y^2$$

b) o quadrado da soma dos números reais x e y :

$$E_2 = (x + y)^2$$

Os alunos observaram que as expressões algébricas encontradas no 3.º exemplo são as mesmas do 4.º exemplo, no entanto o exercício apresentado no 4.º exemplo foi de difícil entendimento para os alunos. Eles não compreendiam o que o exercício pedia e como se escrevia a expressão algébrica. Mas, no 3.º exemplo, no momento em que perceberam a figura, conseguiram escrever a expressão algébrica. Isto propiciou à pesquisadora responsável pela presente pesquisa momentos de reflexão sobre os tipos de atividades que proporcionaram aos alunos maior desenvolvimento na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Durante o desenvolvimento do estudo notou-se que as maiores dificuldades começaram a surgir a partir da atividade 10 (Capítulo 2). Pois a cada figura estudada, procurava-se escrever a expressão algébrica que indicava a área. Nas atividades 10, 11, 12 e 13 a expressão da área foi obtida considerando-se o conhecimento das expressões que representavam áreas de figuras geométricas mais simples, observando-se o pensamento de Polya (1978): “se não conseguir resolver o problema, procure antes resolver um problema correlato.”

Trabalhar área como cálculo aritmético e, em seguida, escrevê-la numa forma algébrica $9 \cdot (-5)$ como $x \cdot (-y)$ exigia do aluno saber traduzir uma linguagem e generalizar uma idéia. Por isso consideraram as atividades 10 a 13 (ver capítulo II), como sendo as mais difíceis.

As atividades práticas 14 e 15 (ver Capítulo II) foram consideradas pelos alunos como as mais interessantes.

Para finalizar, a análise dos resultados obtidos permite afirmar que:

1. Através desta experiência comprovou-se que ao trabalhar a geometria conjuntamente com a álgebra houve maior compreensão dos conteúdos de álgebra.
2. O trabalho tal como foi proposto permitiu aos alunos uma revisão e aprofundamento de diversos conteúdos, pois sempre existiu um espaço para a recuperação de conteúdos defasados.

3. A partir deste estudo pode-se aprofundar e ampliar a compreensão do significado do ensino integrado da geometria e da álgebra para as demais séries do Ensino Fundamental.

CONCLUSÃO

CONCLUSÃO

1) Sobre a eficácia geral da proposta de programa de ensino integrado de geometria e álgebra

Pode-se constatar, através dos resultados da pesquisa que fundamentou o desenvolvimento da presente dissertação de mestrado, que os alunos das 7.^{as} séries, nas quais se aplicou o programa de ensino integrado da geometria e da álgebra, verificaram que estes conteúdos se inter-relacionavam. Assim, por exemplo: (1) nas atividades 10, 11, 12 e 13 do Capítulo 2, os alunos constataram que as expressões das áreas do retângulo, paralelogramo e do triângulo recebem o nome de monômios (expressão algébrica de um único termo), e, na Atividade 13, a expressão da área de um trapézio é um polinômio (expressão algébrica constituída de vários monômios agrupados pelos sinais de + e -); (2) nas atividades 14 e 15, também do Capítulo 3, puderam constatar que os conteúdos de geometria e álgebra de forma integrada solucionam problemas da vida prática.

Ao desenvolver o estudo proposto, observou-se que ao operar a partir das dificuldades encontradas (quanto à matemática e à metodologia de ensino) houve um crescimento em relação à compreensão de leitura e interpretação de textos matemáticos e, segundo os alunos, “estudar geometria e álgebra da forma apresentada foi muito bom”.

Com relação às avaliações, houve um crescimento considerável nos conceitos, nas três últimas escalas.

E, ao final do ano acadêmico, apenas 11,7% dos sessenta alunos que participaram deste estudo foram reprovados em matemática. Estas reprovações aconteceram também a pedido do grupo de professores da 7.^a série.

Portanto, através dos resultados obtidos, pode-se constatar a eficácia geral do programa de ensino integrado de geometria e álgebra.

A importância de se ampliar este estudo se justifica por considerar que poucos pesquisadores nos dias atuais estão preocupados com a eficácia de um programa de ensino desta natureza.

2) Eficácia do programa de ensino integrado de geometria e álgebra a partir da resolução de problemas

Os resultados obtidos permitem considerar que expressar sobre geometria e álgebra como disciplinas interdependentes ao realizar atividades propostas pela professora e/ou pelos alunos, através da resolução de problemas, foi realmente um procedimento metodológico de significativa importância. Levou-se em conta que o interesse não era somente ensinar conteúdos, mas também, estimular o aluno a pensar sobre o conteúdo que lhe era proposto a partir de atividades didáticas. Como bem afirma Vega (1986), os objetivos do ensino da

matemática visualizam o início do pensamento formal e a compreensão dos conteúdos, a fim de desenvolver no aluno a capacidade interpretar situações, levantar hipóteses e generalizar a aprendizagem de um contexto para outro.

Pôde-se constatar através dos resultados que os alunos cumpriram estes objetivos ao observar que na atividade 1, Capítulo II, eles compreenderam a relação entre medidas (metro e centímetro), ao construir uma malha quadriculada para resolver o problema proposto, relacionando a parte com o todo, recuperando conteúdos sobre medidas e geometria.

Nas atividades 2, 3, 4, 5 e 6 cada problema foi solucionado com o auxílio do problema anterior. Portanto, o aluno estava com o conteúdo atualizado de uma atividade para outra, o que permitiu em diversos momentos a abstração e a generalização de conteúdos.

Na atividade 6, ao resolver os problemas propostos, constatamos que o envolvimento dos alunos proporcionou momentos de reflexão e análise a respeito dos resultados (por serem estes valores aproximados) encontrados. No entanto, as atividades 7 e 8 causaram surpresa quanto à solução encontrada, levantando questões, tais como: “Acontece para todas figuras semelhantes?”, mostrando que a organização e a compreensão dos conteúdos matemáticos os tornam interessantes. Consideradas pelos alunos como as mais interessantes, as atividades 14 e 15 proporcionaram aos alunos um momento de integração não só dos conteúdos de geometria e álgebra, mas de solução de problemas matemáticos com problemas vivenciados no dia-a-dia.

Desta forma, cabe acrescentar que a metodologia de ensino adequada deve ser aquela que mais aproxima o aluno da realidade vivenciada por ele. Por isso, a resolução de problemas é um procedimento adequado, pois, em todos os momentos vividos, os alunos estão sempre resolvendo problemas, sejam eles práticos ou não.

As questões levantadas nesta pesquisa tiveram como finalidade mostrar a complexidade do ensino-aprendizagem da matemática desde o Ensino Fundamental e que a aquisição do conhecimento matemático acontece à medida que se faz de uma série para outra um aprofundamento dos conteúdos estudados e ao mesmo tempo em que se fazem ligações com outros conteúdos. É preciso mostrar aos alunos a importância da geometria, quanto à sua contribuição de forma significativa para a solução de situações-problema da vida prática. Isto propiciou à pesquisadora, responsável pela presente pesquisa, momentos de reflexão sobre os tipos de atividades que proporcionaram aos alunos maior desenvolvimento na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Para finalizar, retornou-se as idéias de Polya (1978) e Perez (p. 32, 1991) principais geradoras de todo projeto que aqui se apresentou:

Perez, (1991, p. 291):

“– Um melhor ensino-aprendizagem implica alunos motivados para estudo da matemática (e em particular da geometria), possibilitando como consequência menor número de reprovados, assim como de alunos que evadem da escola;

– Alunos motivados se interessam por inovações e assim a Resolução de Problemas pode ser trabalhada intensamente com estes indivíduos;

– Motivados por descobrir caminhos, para resolver seus problemas, os alunos passam a desenvolver a sua criatividade e raciocínio, que são dois elementos que os professores, do 1.º e 2.º graus, enfatizam como de grande importância e que podem ser obtidos através do Ensino da Geometria.”

Para Polya (1978, p. 114),

“Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela idéia essencial e a concentrar todo seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital.”

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, Rubens. *Filosofia da ciência*. São Paulo: Brasiliense, 1992.
- ANAIS do II Congresso Íbero-Americano de Educação Matemática. Blumenau, jul. 1994.
- AZEVEDO, Gilka Vicentini Ferreira de. Do ensino de 1.º grau; legislação e pareceres, Brasília, Ministério da Educação e Cultura. Departamento de Documentação e Divulgação, 1979.
- BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plan*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrendo padrões em moisacos*. São Paulo: Atual, 1973.
- _____. *Descobrendo padrões pitagóricos*. São Paulo: Atual, 1993.
- BAUMGART, John K. *História da álgebra*. São Paulo: Atual, 1993. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, v. 4)
- BOYER, Carl; B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BRINGUIER, Jean Claude. *Conversando com Jean Piaget*, Rio de Janeiro: Difel, 1978.
- CARRAHER, Terezinha Nunes. *Aprender pensando*. Petrópolis: Vozes, 1986.
- COXFORD, Arthur F. et al. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994 (The National Council of Teacher of Mathematics).
- EVES, Howard. *História da geometria*. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, v. 3)

- FALCÃO, Daniela. Avaliação do 2.º grau é trágica, diz MEC. *Folha de São Paulo*, São Paulo: 26 de novembro, 1996. Cotidiano, p. 1.
- FETISSOV, A. I. *A demonstração em geometria*. São Paulo: Atual, 1994. (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).
- FLAVELL, John Hurley. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Pioneira, 1975.
- FLORIANI, José Waldir. *Professor e pesquisador*. Blumenau: Ed. Da FURB, 1994.
- FREIRE, Paulo. *Ação cultural para a liberdade*. 2. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977.
- GARDNER, Howard. *Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.
- GERDES, Paulus. *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.
- IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras. Vivendo a matemática*. São Paulo: Editora Scipione, 1991. 3. ed.
- KOCH, Maria Celeste Madrado. *Afinal, pode-se ensinar matemática?* Porto Alegre: GEEMPa - Grupo de estudos sobre educação, metodologia de pesquisa e lição.
- LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em geometria*. Rio de Janeiro: S. B. M., 1991. (Coleção do Professor de Matemática).
- LINDQUIST, Mary Montgomery et al. *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1991.

- LUDKE, Menga; André, Marli, E.D.A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1982.
- MAILLO, Adolfo et al. *La enseñanza de las matemáticas*. Aguilar, S. A. De Ediciones, 1963.
- MARCONDES, Carlos. *Como encontrar a medida certa*. São Paulo: Atual, 1992. (Série: A descoberta da matemática).
- PAULOS, John Allen. *Analfabetismo em matemática e suas conseqüências*. Tradução Maria Luiza. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1994, 146p.
- PEREZ, Geraldo. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*. São Paulo, 1991. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas.
- PIAGET, Jean. *Para onde vai a educação?* Trad. Ivete Braga, 7. ed. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio, 1980. 80p.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 196 p.
- PUTNOKI, José Carlos. *Desenho geométrico*. v. 2, São Paulo: Scipione, 1989.
- RAMOS, Luzia Faraco. *Encontros de primeiro grau: descoberta da Matemática*. São Paulo: Ática, 1993.
- REIS, Genésio Lima dos. et al. *Geometria analítica*. 1. ed. (4. Reimp.). Rio de Janeiro: LTC, Goiânia: Ed. da UFG, 1993. 227p.

REVISTA DE EDUCAÇÃO. Programa curricular mínimo para o Ensino Fundamental.

Goiânia: Secretaria de Estado da Educação, 1989.

REVISTA DE MATEMÁTICA. Matemática 1.º Grau. São Paulo: Secretaria da Educação.

Coordenaria de Estudos e Normas Pedagógicas, 1992, 237p.

REVISTA DE MATEMÁTICA. El juego y el material didactico en el aprendizaje de la

matematica. Madrid: Marcia, S. A. de Ediciones, 1979.

REVISTA DE MATEMÁTICA. La geometria en el aprendizaje de las matematicas. Madrid:

Marcia, S. A. de Ediciones, 1986.

ROGÉRIO, Mauro Urbano et al. *Cálculo diferencial e integral*. 2. ed. (1. Reimp.) Goiânia:

ed. da UFG, 1994.

ROSA NETO, Ernesto. *Geometria na Amazonia: descoberta da Matemática*. São Paulo:

Editora Ática, 2. Ed., 1993.

ROSSETTI, Fernando. Melhores escolas de SP estão no interior. *Folha de São Paulo*, São

Paulo: 27 de setembro, 1996. Cotidiano, pág. 1.

SALOMON, Marta. Pesquisa exhibe quadro 'desastroso'. *Folha de São Paulo*, São Paulo 5

de mai., 1996, Brasil, p. 10.

SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática). A Educação Matemática: o ensino

da matemática no 1.º grau. Blumenau, 1994. ano 1, n. 2.

SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática). A Educação Matemática: Geometria.

Blumenau, 1995. ano 3, 1. bimestre.

_____. et al. *Ângulos. Pra que serve matemática?* São Paulo: Atual, 1992.

_____. et al. *Álgebra. Pra que serve a matemática?* São Paulo: Atual, 1992.

_____. et al. *Geometria. Pra que serve matemática?* São Paulo: Atual, 1992.

TEMAS E DEBATES: *Revista de matemática*. Blumenau: SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), 1994, ano 8, n. 7.

TEMAS E DEBATES: *Revista de matemática*. Blumenau SBEM (Sociedade Brasileira de Educação matemática), 1994. ano 7, n. 4.

TEMAS E DEBATES: *Revista de matemática*. Blumenau: SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), 1995. ano 8, n. 6.

TORANZOS, Fausto I. *Enseñanza de la matemática*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1963.

VYGOTSKY, Lev Semenovictch. *Pensamento e linguagem*. Trad. Jeferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 1993.