UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

ESCREVER PARA QUÊ? A REDAÇÃO MEDIANDO A FORMAÇÃO DE CONCEITOS EM CÁLCULO I

Maria Bethânia Sardeiro dos Santos

Goiânia
2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

ESCREVER PARA QUÊ? A REDAÇÃO MEDIANDO A FORMAÇÃO DE CONCEITOS EM CÁLCULO I

Aluna: Maria Bethânia Sardeiro dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Itamar José Moraes

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da UFG como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Educação Brasileira.

Goiânia, 03 de Outubro de 2000.

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Profª.: Dra. Ivone Garcia Barbosa

____
Prof. Dr. Itamar José Moraes

____
Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo

Goiânia
2000

Vôo

Alheias e nossas
as palavras voam.
Bando de borboletas multicores,
as palavras voam.
Bando azul de andorinhas,
bando de gaivotas brancas,
as palavras voam
Voam as palavras
como águias imensas.
Como escuros morcegos
como negros abutres,
as palavras voam.

Oh! Alto e baixo
em círculos e retas
acima de nós, em redor de nós
as palavras voam.

E às vezes pousam.

Cecília Meireles

Agradecimentos

A Deus – minha fortaleza.

A minha família e amigos – porque souberam compreender o meu "ostracismo" tantas vezes difícil, mas necessário.

Aos professores do Mestrado em Educação Escolar Brasileira da Faculdade de Educação da UFG, em especial, Ildêu Moreira Coelho e Adão José Peixoto que me ensinaram não só através de suas aulas, mas através de seus exemplos de vida. Com eles aprendi o verdadeiro significado de *conviver*.

As professoras que compuseram, juntamente com meu o orientador, a banca de minha qualificação: Maria Hermínia, Vânia Pereira dos Santos-Wagner e Ivone Barbosa que, com extrema competência e profissionalismo, ajudaram-me a "lapidar" a pedra bruta que foi a primeira versão deste trabalho de pesquisa.

Ao professor Itamar José Moraes que durante todo o processo de planejamento, execução, análise, escrita e finalização deste trabalho soube ir além da orientação meramente acadêmica ampliando meus horizontes profissionais e pessoais fazendo me enxergar novas paisagens.

À professora Zaíra M. C. Varizo – um referencial constante na minha vida acadêmica.

Ao Instituto de Matemática e Estatística pelo apoio recebido.

Aos professores José Pedro e Elisabeth C. de Faria pelas conversas, reflexões e apoio nos momentos de incerteza.

Aos alunos do 1° ano "C" do curso de Agronomia do ano de 1999 pela participação, convivência, partilha.

A cada dia recolhemos o que aprendemos até aquele momento e deixamos o que é conhecido para trás. Essa penosa separação não é agradável, mas em algum lugar íntimo devemos saber, vagamente, que dizer adeus ao que é seguro traz a única segurança que jamais conheceremos.

Richard Bach

ÍNDICE

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

ABSTRACT

Which methodological recourse could contribute to a better apprehension of mathematical concepts? How should me act to make the pupils learn Calculus in a significant way? The use of written language in Mathematics would be capable of making the students learn more and better the concepts?

Working with a systematic way the writing during the lessons of Calculus, this research work looked for evidence of these effects that in the learning of this discipline.

Vygotsky was the theoretical reference used for our reflections during the elaboration of the parameters that would guide materials, activities and evaluations of this proposal.

All the description of this work in classroom together with the treatment given to the material and the respective analyses had intention of showing at least, one of the different activities developed in this study. Through the analysis of subject and searching for word-keys we tried to evidence the excellent results obtained. The case study came to add new elements for analyses.

In the last chapter we make a reflection about our pedagogical practice on the third degree level after we had worked a semester on writing in the mathematics lessons and which things we could infer at the end.

Word-keys: Writing, Mathematics, Significant, Methodologies, Understanding, Learning.

Apresentação

Que recurso metodológico poderia contribuir para uma maior apreensão de conceitos matemáticos? Como fazer os alunos aprenderem Cálculo I de uma maneira significativa? A utilização da linguagem escrita em Matemática seria capaz de fazer com que o aluno aprendesse mais e melhor os conceitos?

Trabalhando de uma maneira mais sistemática a redação nas aulas de Cálculo I, este trabalho de pesquisa procurou evidenciar o quanto esta abordagem de ensino pode contribuir para uma aprendizagem mais efetiva e significativa desta disciplina.

Vygotsky foi o referencial teórico utilizado para refletirmos durante a elaboração dos parâmetros que norteariam materiais, atividades e avaliações que estivessem condizentes com esta proposta. Toda a descrição de como foi realizado o trabalho em sala de aula, juntamente com o trato dado ao material e as respectivas análises, tiveram o intuito de abranger pelo menos uma das atividades desenvolvidas durante o estudo.

Através da análise de conteúdo realizamos a freqüência a tema e palavras-chaves buscando, desta maneira, evidenciarmos os excelentes resultados obtidos. O estudo de caso vem acrescentar novos elementos às análises realizadas.

No último capítulo procuramos refletir sobre nossa prática pedagógica em nível de terceiro grau ressaltando, também, o que pudemos inferir após um semestre de utilização da redação nas aulas de matemática.

Palavras-chaves: Redação, Matemática, Significação, Metodologias, Compreensão, Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Minhas primeiras questões relacionadas ao ensino – aprendizagem em Cálculo I

Uma das coisas que mais chamaram nossa atenção em relação ao ensino em Cálculo I foi perceber que, de uma maneira geral, poucos alunos dominavam os conceitos essenciais desta disciplina restringindo-se às operações mecânicas de cálculo. A facilidade com que se mecanizavam as operações de derivada era algo que nos intrigavam. Onde ficava o sentido? O significado conceitual de derivada?

Quando se pergunta ao aluno:

- O que é a derivada? Normalmente se escuta como resposta:
- `Eu sei derivar, serve?`[1]

Outro fator que chamou nossa atenção foi o grande desinteresse dos alunos com relação a esta disciplina. O curso básico é pouco compreendido por eles. É comum ouvirmos:

- `Por que estudamos isso? Onde iremos utilizar estes conhecimentos? Para que serve o Cálculo I?`

Durante os dois primeiros anos de trabalho fomos introduzindo em nossa prática docente pequenas tentativas buscando responder as nossas indagações. Trabalhamos com a leitura na aula de Matemática (fato que deixou os alunos assaz intrigados), questões teóricas ligadas à compreensão do conceito e utilizamos da avaliação continuada. Os efeitos foram muito bons. Tivemos resultados satisfatórios que acabaram motivando-nos e incentivando a continuar a busca dessas soluções.

[1] Todas as falas e atividades escritas dos alunos neste trabalho aparecerão em Lucida Console - 10

Ao assumir a turma de Agronomia, em 1997, encontramos alunos que estavam fazendo esta disciplina pela terceira e até mesmo quarta vez, em dependência, conforme os estatutos e regimento da UFG, ou seja, eram todos repentes no curso. Nos anos anteriores havia acontecido um verdadeiro "rodízio" de professores nesta matéria. Encontramos alunos com sérios problemas com relação à sua auto-estima, à sua capacidade de aprender.

A partir destas experiências vivenciadas entre 1997 e 1998, começamos a refletir bastante sobre todos os problemas encontrados. Identificamos vários questionamentos que nos intrigavam. Entre estes, destacamos:

- O que poderia ser feito para reverter este quadro de alunos repetindo Cálculo I tantas vezes?
- Como poderíamos ensinar de uma maneira mais significativa?
- Qual seria a melhor forma de se explorar conceitos de Cálculo para estimular os alunos ao aprendizado destes conteúdos?
- Como ou o que fazer para que os conhecimentos adquiridos fossem permanentes e não apenas mecanizados, memorizados para uma avaliação e esquecidos em seguida?
- O que fazer para que os conceitos fossem verdadeiramente apreendidos? Que metodologia de ensino seria a mais adequada?
- Que ações poderiam ser tomadas para reverter o quadro ineficiente e mesmo desanimador do ensino – aprendizagem em Cálculo I?
- Como tornar esta disciplina mais atraente e interessante para os alunos de outros cursos universitários?
- O que fazer para motivar alunos que não eram do curso de Matemática ao aprendizado desta disciplina?
- Como dar à aprendizagem de Cálculo I mais significado?

A utilização da linguagem escrita em Matemática seria capaz de fazer com que o aluno aprendesse mais e melhor os conceitos?

Aos poucos nossa experiência docente, junto com os questionamentos, foram convergindo em um “mais geral”, mas que trazia em seu bojo todas aquelas outras questões acima mencionadas, como passaremos a discutir nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO I

A delimitação do problema

A proposta deste estudo foi a de trabalhar uma metodologia de ensino que viesse dar ao Cálculo maior significado para os alunos do curso de Agronomia fazendo também com que estudantes de outras áreas pudessem sentir-se motivados a aprender essa disciplina.

Notando a grande dificuldade e o desinteresse que os alunos têm, principalmente por não perceberem no Cálculo I ligações com suas futuras vidas como profissionais da área de Agronomia, resolvemos apresentar uma proposta que buscasse superar o não-aprendizado dos conceitos existentes no Cálculo I, o que tem levado apenas a uma memorização de regras.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que figura em grande parte dos cursos universitários. Nas engenharias, então, ele é essencial. "O Cálculo é uma ferramenta extremamente útil, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais é uma problemática presente em praticamente todas as áreas de conhecimento." (Barufi, 1999, p.03).

Esta disciplina, ainda que possuindo aplicações práticas, faz parte do curso básico porque fornece elementos para futuras disciplinas que estão muito mais relacionadas à parte prática do curso. Um bom entendimento em Cálculo I garante menores dificuldades na manipulação desta "ferramenta" em outros campos. O aluno, não percebendo isso não consegue ver o sentido deste estudo, assim resumindo:

> *Uma das especificidades do Cálculo, ao desenvolver o estudo das funções, é a de estudar a taxa de variação de uma função, ou seja diferentes maneiras pelas quais uma função cresce ou decresce num intervalo ou determinado ponto de um intervalo. A idéia fundamental é a de que uma curva, localmente, pode ser aproximada por uma reta, onde as características de proporcionalidade constituem um elemento facilitador na análise e compreensão dos processos envolvidos (*Barufi, 1999, p.02).

O suporte para todo o trabalho desenvolvido veio da Redação Matemática e da Resolução de Problemas em Matemática (mais especificamente a problematização do conteúdo). A redação aparece como intermediadora na busca da construção dos conceitos principais no estudo do Cálculo: Limite, continuidade e derivada. A problematização é usada como um recurso a mais, objetivando dar sentido a todo este estudo.

Na certeza de que este trabalho é apenas um começo para futuras mudanças no ensino, que ele traga novos elementos para pensarmos mais sobre nossas práticas pedagógicas, muito faladas em nível de ensino intermediário e médio; mas tão ignoradas em nível universitário.

Uma retomada ao porquê de se ensinar Matemática...

O que esperamos do ensino e aprendizado em matemática, em especial ao trabalharmos com o Cálculo I? O que desejamos que nossos alunos sejam capazes de realizar ao final de um semestre de estudos ? Pensarmos nestas questões é refletirmos, entre outras coisas, sobre o objetivo de ensinarmos matemática.

> *É verdade que, para pôr em funcionamento um televisor ou um automóvel pode-se prescindir completamente do significado das ações realizadas; no entanto, alguém que se disponha a produzir tais objetos dificilmente logrará seu intento sem uma clara compreensão de cada etapa do processo de produção.(Machado, 1993,p.114)*

Ensinar matemática não se reduz a ensinar o aluno calcular Perceber a matemática por este único ângulo é empobrecer em demasia uma disciplina que traz em seu bojo elementos essenciais para a compreensão da realidade .Fazer com que o aluno se veja capaz de aprendê-la através de seus erros, fazendo análises, conjecturas, refutações, descobrindo-se como alguém que revê estratégias, resoluções é contribuir para uma formação mais ampla e significativa dos educandos. São eles produtores ou usuários? Será que estamos refletindo sobre nossa prática pedagógica? Estamos formando alunos para qual perspectiva? Se tratarmos o aluno como um coadjuvante no processo de ensino, estaremos reduzindo-o a esta condição de usuário, reforçando-a à medida que nos utilizamos de uma única forma de avaliar, um único estilo de ministrar aulas, contribuindo assim para que a matemática continue sendo um "mito", algo reservado para poucos, os escolhidos.

Para a grande maioria das pessoas, o fato de a matemática ser considerada uma disciplina difícil está tão presente que passou a ser uma regra aceita com resignação. Qual é o professor que nunca ouviu o aluno dizer que não tem "dom" para a matemática? Ou que não tenha se sentido como um verdadeiro "iluminado" por ter escolhido dar aulas de um assunto que muitas vezes é temido?

O ensino da matemática tem sido pautado por uma instrução mecânica, utilizando-se de receitas prontas e acabadas onde se dá um modelo e o aluno o repete. Uma aprendizagem significativa é impossível nestes termos.

Refletindo sobre nossas condutas, enquanto professores de matemática, estaremos pensando sobre o que estamos fazendo para que nossos alunos construam conhecimentos matemáticos, que contribuições estamos dando na formação de cidadãos que poderão desenvolver atitudes, habilidades e competência para analisar dados, fazer escolhas, resolver problemas. Para tanto, o ambiente da sala de aula precisa ser transformado, constituindo-se em contexto inquiridor, mais desafiador – lugar de dúvidas e reflexões que ofereça meios para que os alunos consigam raciocinar mais, elevando também a compreensão de novos conceitos.

Para um aprendizado eficaz faz-se necessária uma integração entre os objetivos matemáticos que se espera alcançar e a metodologia adequada. O papel do professor não é mais o de um disseminador de informações, mas de alguém que dirige e orienta um processo.

> *Experiências que sejam planejadas de modo a favorecer a independência crescente e a curiosidade intelectual continuada dos alunos, encorajá-los-ão a tornarem-se eles próprios diretores da sua aprendizagem entregando-se regularmente ao processo de construção, simbolização, aplicação e generalização dos conceitos matemáticos(NCTM,1991, p.148).*

Todo o meu estudo foi realizado tendo como objetivo principal a formação dos conceitos: derivada, limite e continuidade intermediados pela linguagem escrita (redação) e oral (trabalhos em grupos) buscando, desta maneira, um ensino de Cálculo I em que os alunos se percebessem como pessoas capazes de construírem o seu conhecimento matemático, compreendendo também toda a "lógica" existente por trás destes conteúdos específicos.

BUSCANDO OS FUNDAMENTOS – O REFERENCIAL TEÓRICO

Todo professor que se utiliza da redação em aulas de matemática acredita que este recurso contribui para um melhor desenvolvimento do aprendizado de seus alunos. São várias as publicações[2] existentes que vêm reforçar esta visão e não são menos numerosos os artigos[3] que nos dão maneiras diferenciadas de nos utilizarmos dela.

---

[2] Writing to Learn – Connolly, Viardi – USA, 1989
[3] Using Writing to teach Mathematics – Sterrett – USA, 1982

Não é difícil encontrarmos os meios para a utilização da redação em sala de aula, difícil é nos depararmos com explicações mais abrangentes do porquê disso. É perceptível a mudança nos alunos após serem expostos à atividades de escrita, mas quais seriam os fundamentos deste trabalho? Se a redação em matemática tem conseguido elevar o nível de compreensão dos alunos, como isso tem se dado? Burken (1989), em seu artigo: Using Writing to Assist Learning in College Mathematics Classes, chama nossa atenção no sentido de buscarmos maneiras para evidenciar mais o efeito da atividade escrita no aprendizado em sala de aula.

Ao escolher a redação como o alicerce de todo o nosso trabalho de pesquisa buscamos vislumbrar respostas também para estes questionamentos. Se a linguagem escrita em aulas de matemática pode levar o aluno a aprender matemática, quais seriam os elementos que poderiam justificar essa melhoria no aprendizado?

Primeiramente, faz-se necessária uma explicação sobre o que estamos designando por redação matemática. Toda e qualquer atividade desenvolvida em sala de aula ou outro ambiente, e que seja intermediada pela escrita, é uma forma de redação em matemática: As cartas, os diários, criações de gibi, poesias ou paródias musicais. Acrescentamos o estudo dirigido – individual ou em grupo – bem como roteiros de estudo para laboratório, ambos com modificações que incorporem a escrita.

A redação fica mais explícita para o aluno quando se pede, por exemplo, que ele escreva uma carta; nos trabalhos que possuem questões para serem respondidas, eles já não percebem facilmente que estão trabalhando com a redação.

E por quê nos utilizarmos da escrita?

Contribuições de Vygotsky

Ao trabalharmos a escrita em sala de aula estamos entrando no terreno da linguagem e esta forma de comunicação, assim como a fala, contribui para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, exercitando inclusive a percepção: "O pensamento implica a unidade da linguagem e do pensamento, podendo-se afirmar que, sem a linguagem (que não tem que ser necessariamente sonora), o pensamento conceitual seria irrealizável" (Barbosa, 1997,p.64).

A linguagem e a percepção estão tão ligadas que mesmo nas soluções de problemas não verbais, se o problema for resolvido sem a emissão de nenhum som, ainda assim a linguagem tem papel no resultado (cf. Vygotsky, 1998b, p.43).

Sem desconsiderar as outras formas de linguagem, estaremos discorrendo sobre a linguagem escrita porque ela foi a intermediadora no processo de busca de apreensão dos conceitos neste estudo. Baseada no significado formal das palavras a escrita requer uma maior compreensão do sentido das mesmas, e isso exigirá também um trabalho de elaboração por parte de quem escreve.

Na fala também se faz uma elaboração:" A fala requer um processamento seqüencial. Os elementos, separadamente, são rotulados e, então, conectados numa estrutura de sentença, tornando a fala essencialmente analítica."(Vygotsky,1998b, p.43),ou seja, tanto na fala quanto na escrita estamos direcionando os processos mentais com a ajuda das palavras e isso é de suma importância dentro da formação dos conceitos.

> *Escrever é uma das funções culturais típicas do comportamento humano. Em primeiro lugar, pressupõe o uso funcional de certos objetos e expedientes como signos e símbolos. Em vez de armazenar diretamente a idéia em sua memória, uma pessoa escreve-a, registra-a fazendo uma marca que, quando observada, trará de volta à mente a idéia registrada. A acomodação direta à tarefa é substituída por uma técnica complexa que se realiza por mediação* (Luria, 1998, p.99).

Não estamos, em nenhum momento, desconsiderando a importância do discurso oral durante o aprendizado, mas a ênfase maior foi dada à atividade escrita. O trabalho em grupo foi um elemento também bastante explorando neste estudo. Ao adotarmos Vygotsky como o nosso referencial principal, seria impossível não destacar a importância da participação do outro no processo de elaboração, reestruturação e formação dos conceitos. "É na interação social e por meio de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores"(Moyses, 1997,p.27)

Mas, a escrita diferencia-se da fala. E quais seriam os elementos contidos neste trabalho de elaboração que estariam nos ajudando a justificar a opção por trabalhos escritos em aula?

> *A escrita exige um trabalho consciente porque a sua relação com a fala interior é diferente da relação com a fala oral. Esta última precede a interior e pressupõe a sua existência (o ato de escrever implica uma tradução a partir da fala interior). Mas a gramática do pensamento não é igual nos dois casos. Poder-se-ia até mesmo dizer que a sintaxe da fala interior é exatamente oposta à sintaxe da escrita, permanecendo a fala oral numa posição intermediária* (Vygotsky, 1998a, p.124).

Durante o processo de escrita é necessário que nos distanciemos da situação, trabalhando de forma que aquele que lê possa entender o "sentido" que estamos dando, pois a verdadeira comunicação depende disso. Trabalhar com o sentido é diferente de trabalhar com o significado, este último é mais estável enquanto que o primeiro pode sofrer alterações, e aqui entramos no campo da semântica.

> *O sentido de uma palavra depende da forma com que está sendo empregada, isto é, do contexto que ela surge. O seu significado, no entanto, permanece relativamente estável. É formado por enlaces que foram sendo associados à palavra ao longo do tempo, o que faz com que se considere o significado um sistema estável de generalizações, compartilhado por diferentes pessoas embora com níveis de profundidade e amplitude diferentes* (Moyses, 1997,p.39).

Uma palavra pode ter vários sentidos dependendo do contexto em que se encontra. Diferentes sentidos da mesma palavra podem ser facilmente encontrados em Matemática, seu significado é a parte mais estável. E se não há uma correspondência entre os sentidos dados pelos interlocutores durante a comunicação, esta não existirá. "Não são apenas os surdos que não conseguem se entender, mas quaisquer pessoas que atribuem um significado diferente à mesma palavra, ou que sustentam ponto de vista diferentes" (Vygotsky, 1998a, p.176).

Assim como a escrita, a fala não se dá de maneira linear, como se pudéssemos simplesmente "vocalizar" tudo que se passa em nossa mente; para melhor entendermos este processo precisamos recorrer ao que Vygotsky (1998) denomina fala interior.

Não perdendo de vista que o objetivo é comunicar, e ressaltando que a comunicação só acontece quando aquele que fala o faz utilizando-se de palavras que encontrará naquele que ouve (ou lê) o mesmo sentido, neste trabalho de elaboração teremos o pensamento e a palavra criando, em um movimento, a fala interior.E quais seriam as características desta fala? No que ela difere da fala social?

A fala interior é completamente diferente da fala que exteriorizamos, mais condensada. Ela trabalha com a semântica, na qual ocorre um predomínio do sentido sobre o significado. Poderíamos dizer que ela é um pensamento que expressa significados puros. Sendo sempre dinâmica, instável e inconstante, a fala "flutua entre a palavra e o pensamento, os dois componentes mais ou menos estáveis, mais ou menos solidamente delineados do pensamento verbal" (Vygotsky, 1998a, p.185). Aqui chegamos a outro conceito chave para entender os benefícios da escrita: O pensamento verbal que vai se transformar em linguagem, e consequentemente, em comunicação. Toda fala interior nasce das relações entre o pensamento, a palavra e o significado.

> *Um interlocutor em geral leva vários minutos para manifestar um pensamento. Em sua mente, o pensamento está presente em sua totalidade e num só momento, mas na fala tem que ser desenvolvido em uma seqüência. Um pensamento pode ser comparado a uma nuvem descarregando uma chuva de palavras. Exatamente* ***porque um pensamento não tem um equivalente imediato em palavras, a transição do pensamento para a palavra passa pelo significado*** (grifos meus) (Vygotsky, 1998a, p.186).

Para que haja comunicação, o movimento tem que ser do pensamento para o significado e em seguida a palavra que trará o sentido. Esta relação pode ser vista no mapa dos conceitos principais de Vygotsky (anexo I, p.103). Chegamos, assim, à reflexão, afinal é ela que está permeando este processo, fazendo com que possamos chegar à generalização que é outro elemento requerido pela verdadeira comunicação e para a formação dos conceitos.

> *Um conceito se forma não pela interação das associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica.* ***Essa operação é dirigida pelo uso das palavras como o meio para centrar ativamente a atenção, abstrair determinados traços, sintetizá-los e simbolizá-los por meio de um signo*** (grifos meus) (Vygotsky, 1998a, p.101).

O pensamento verbal vem como resultado do complexo relacionamento entre o pensamento e a palavra. Um pensamento não é apenas expresso pelas palavras, é por meio delas que ele passa a existir.

Há um contínuo movimento entre a palavra, significado, pensamento. Na formação de um pensamento estão as palavras que irão "representá-lo. Ao pensar nos utilizamos destes "instrumentos", destes "signos" que, carregados de significados, comunicam uma idéia, um fato, um conceito. E a tendência é que ocorra uma aglutinação, ou seja, várias palavras poderão se fundir numa única e esta nova palavra não expressará apenas uma idéia de certa complexidade, mas designará todos os elementos contidos nesta idéia.

Por exemplo, ao perguntarmos para os nossos alunos o que é Derivada, buscamos obter respostas que contenham informações variadas sobre este conceito. Esperamos explicações a cerca de aspectos algébricos e geométricos sem desprezar também o entendimento com relação à aplicação prática da derivada, pois a formação de um conceito compreende todos estes aspectos.

> *A palavra não só separa um traço, também generaliza as coisas, as inclui em determinadas categorias e esta sua função é uma das mais importantes. Ao generalizar os objetos, a palavra converte-se em um instrumento de abstração e generalização, que é a operação mais importante da consciência* (Luria, 1998,p.37).

Formar um conceito é muito mais do que simplesmente memorizá-lo, saber defini-lo. A formação do conceito requer discriminação e generalização. A discriminação faz com que possamos distinguir um conceito de outro. A generalização faz com que possamos estender este conceito a outros exemplos a ele relacionados. "Como resultado da abstração se obtém um novo objeto idealizado que pode ser "manipulado" sob novas condições, que não eram permitidas muitas vezes com o objeto inicial" (Barbosa, 1997, p.61).

Estar apto a "falar" , escrever sobre determinado conceito é apenas uma parte deste processo. E assim como em qualquer conhecimento, o conceito é construído e para que ele ultrapasse o campo da simples definição é necessário que em nossas metodologias de ensino haja espaço para todo este exercício de discriminação e generalização. Fazendo com que o aluno estabeleça relações, trabalhe exercícios que não sejam rotineiros, lidando com exemplos, os mais variados, estaremos dando um passo a mais na significação. no aprendizado. "No plano psicológico, a formação do conceito consistiria em construções de conexões de um objeto determinado em relação a outros objetos" (Barbosa , 1997, p.69).

Construir conexões, estabelecer relações é o que esperamos que nossos alunos sejam capazes de fazer e não apenas memorizar regras, definições, demonstrações matemáticas. A metáfora da "rede" faz com que percebamos o conhecimento como algo vivo, que se constrói. Cada nó desta rede é um feixe de relações, tudo está interligado e o movimento existe. Ao descobrirmos novos significados, novas relações vão sendo feitas, novos nós se constituem e toda a rede é importante . Rompe-se assim com a idéia de algo linear e estático.

A palavra ganha uma importância maior porque ela será também uma das responsáveis por novas relações, novas visões, novas interpretações da realidade a partir do momento que o sentido que lhe for atribuído em determinada tarefa supere e/ou acrescente novos elementos para a visão particular. Sim, o discurso dará o sentido de acordo com o contexto em que ele está sendo desenvolvido.

Ao esperar que nossos alunos estejam mais "falantes" (no sentido de comunicar seu pensamento matemático), almejamos que nesta fala possamos perceber elementos destas relações entre conceitos, definições, generalizações, exemplos, conclusões, análises, sínteses. Durante o exercício de "escolher" as palavras para comunicar algum conceito matemático, estaremos dando ao aluno a oportunidade de refletir sobre estes conceitos esperando que ele esteja compartilhando nossas visões.

O significado estará associado à palavra. Para compartilharmos visões faz-se necessário que o sentido que estamos dando seja o mesmo para quem lê ou escuta. Mauricio de Souza, ao criar o seu personagem Chico Bento, brinca com esta interpretação diferenciada de sentidos que pode ocorrer nas aulas de matemática . As relações que Chico Bento estabelece não estão nada próximas do sentido dado por sua professora.

Em uma das diversas estórias em quadrinhos[4] deste personagem, a professora propõe aos alunos que eles coloquem os números entre parênteses para resolverem uma pequena equação matemática. Chico Bento, então, sem titubear, responde:

- Ah, fessora num vai dá naum, naum tem nenhum primo meu aqui na sala !

Outro exemplo bastante interessante de como os sentidos diferenciados podem interferir no aprendizado pode ser visto no desenho animado "Donald no país da Matemágica". Ao entrar neste país, Donald passa por uma floresta que possui árvores com raízes quadradas. Esse exemplo é um extremo, sem dúvida, mas que pode acontecer quando não nos preocupamos com os sentidos das palavras e o contexto em que elas surgem.

Ao trabalhar com a linguagem esperamos que os alunos estabeleçam relações, associações, pensem sobre os sentidos; e ao pedir um trabalho em que a linguagem escrita tenha maior evidência, esperamos que os alunos escolham palavras que elucidem o sentido matemático desejado. Sim, porque o entendimento é proporcional ao significado, "uma palavra sem significado é um som vazio" (Vygotsky, 1998a, p.06).

À medida que entendermos, encontraremos palavras para expressar esse entendimento. A palavra evoca em nossa consciência elementos diferenciados que irão compor idéias, relações. Uma palavra não se refere a um objeto isolado, mas a um grupo ou classe. Ao pedir ao aluno que escreva, estaremos pedindo a ele que reflita e faça generalizações trabalhando com a formação e estruturação de novos conceitos. Quando o conceito já está amadurecido, sempre haverá uma palavra disponível para fazer referência (Tolstoi), defini-lo, explicá-lo e isso necessariamente passa pela significação.

[4] Histórias em quadrinhos - Chico Bento – Maurício de Souza – 1995

E a formação de conceitos até aqui discutida procura superar aquela idéia anterior a Vygotsky de que o conceito era uma imagem modificada, transformada, pela qual se teria uma perspectiva de certos traços semelhantes, sobressaindo-se em relação a outros traços casuais, estes diluindo-se entre si (Cf. Barbosa, 1997, p.68). Também não estamos considerando a formação de conceitos oriunda da lógica formal apenas.

> *Do ponto de vista da lógica formal, o conceito é tido como o conjunto de traços de certo objeto, pessoa, fenômeno ou situação que podem ser classificados como "traços gerais". Esses traços seriam percebidos pelo sujeito de tal forma que para compreendê-los ter-se-ia de estabelecer certo distanciamento, de forma a destacá-los da série ou grupo de inserção dos objetos. Procurar-se-ia, pois, algo que fosse uma "marca" imutável em cada objeto (pessoa ou situação) e que em determinados momentos ou aspectos coincidiria com outros objetos, pessoas ou situações (Barbosa, 1997, p.68).*

Ao escrever o aluno está lidando com o signo (a palavra) que constitui um meio básico para dominar e dirigir os processos mentais. Barbosa (1997) chama a nossa atenção para o fato de que o essencial não está em cada objeto da reflexão (o signo ou a palavra), mas o fato de operarmos, simultaneamente, com todo um sistema, estabelecendo, assim, conexões muito mais complexas do que na simples comparação entre os dois objetos ou duas categorias (Cf Barbosa, 1997, p.70).

Não há como pensar em um aprendizado eficaz que não passe necessariamente pelo "sentido", pela significação. Ao buscar um aluno que tenha compreensão dos conceitos esperamos que ele seja capaz de realizar todas as etapas deste processo, ou seja, discrimine, exemplifique, generalize e estabeleça relações. "O conceito não pode ser conhecido através de uma metáfora de "fotografia coletiva", na qual se diluiriam os sujeitos na busca de um único traço comum, desconsiderando as diversidades e as histórias de cada um. Para conhecermos um conceito, precisamos compreender suas relações, suas conexões, o seu papel na mesmas" (Barbosa, 1997, p.69).

A resolução de problemas – A problematização do conteúdo

Cada vez mais procura-se ensinar uma matemática que não esteja dissociada do dia-a-dia, até porque o conteúdo encontra na resolução de problemas o seu "sentido".

> *Se professor e alunos defrontam-se com sentenças, regras e símbolos matemáticos sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno – especialmente àquele que freqüenta a escola pública – uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo* (Moysés , 1997, p.67).

É importante ressaltarmos que existem conteúdos que não poderão encontrar situações práticas que o ilustrem mas que terão, com certeza, justificativas para estarem sendo ensinados.

É necessário entendermos que a resolução de problemas é muito maior do que simplesmente buscar um problema que possua no seu algoritmo de resolução partes dos conteúdos estudados. Esta seria apenas uma das maneiras de aplicarmos problemas em sala de aula. Contextualizar o conhecimento vai muito além disso.

> *O que há no contexto que favorece a aprendizagem é que ele permite que não se perca o fio do raciocínio ao se resolver um problema matemático. Mantendo-se o sentido do todo e de cada operação mental, em particular, está-se mais apto a resolver adequadamente o problema, como também a transferir para novas situações o conhecimento construído na prática* (Moysés, 1997,p.68).

Podemos trabalhar dentro da resolução de problemas com a problematização do conteúdo, para tanto, faz-se necessário uma estruturação destes conteúdos que obedeça a lógica conveniente a um aprendizado efetivo, lógica esta que nem sempre é concomitante com a distribuição encontrada nos livros didáticos.

> *Seguir a ordem do livro didático nem sempre vai garantir que os conteúdos estejam na melhor seqüência para produzir um aprendizado significativo, pois o livro didático mostra um caminho proposto pelo autor,* ***para viabilizar a sua concepção de como o conhecimento no Cálculo pode ou deve ser construído*** *(grifos meus)* (Barufi, 1999,p.50).

Outro aspecto importante da resolução de problemas em Matemática é o fato de que ela dá ao aluno a oportunidade de raciocinar, de ler, de interpretar, analisar, encontrar respostas, verificar se estas respostas estão corretas; enfim, é um exercício excelente que exigirá novas elaborações por parte dos alunos.

> *O processo de problematização é fundamental, se o professor pretende que o aluno construa os significados para daí ser possível a compreensão do conhecimento desejado. Sem uma metodologia problematizadora o professor corre o risco de tentar apenas transmitir seu próprio conhecimento, pronto e estruturado, que o aluno não conseguirá articular se não tiver significado para ele, se não responder a algum problema que seja seu, especial, desafiador, interessante* (Barufi, 1999,p.30).

Trabalhando com a resolução de problemas estamos também nos utilizando da heurística . George Polya foi o grande representante do método heurístico. Dentro dos passos para a resolução de problemas está todo um exercício de raciocínio, leitura, inferência, cálculos, análises de resultados. Dar ao aluno a oportunidade de vivenciar e resolver problemas é estar contribuindo para a sua formação profissional de maneira ímpar e elevando seu conhecimento matemático à medida que ele trabalhe em exercícios que exijam mais.

Ao professor cabe a difícil tarefa de dosar os níveis de dificuldade escolhendo problemas que não sejam tão difíceis que constituam um obstáculo, nem tão fáceis que não desafiem. Durante este processo: "O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante" (Polya, 1978, p.2 apud Baraldi, 1999).

É parte de nossos objetivos enquanto professores fazer com que o aluno, ao se deparar com um problema, seja capaz de analisá-lo, resolvê-lo de maneira consciente e saber refletir sobre o que fez . Desta maneira modifica-se o modo de perceber o processo de aprendizagem.

> *O processo de aprendizado implica em parte, sem dúvida, na apreensão e compreensão de definições claras e operacionais, ordenação e estruturação das percepções e idéias, na formalização das experiências do conhecimento através de conceitos, na aquisição de competências (habilidades, tipo de pensamento etc) específicas. Ademais, simultaneamente, aprender envolve também voltar-se a lidar com o imprevisto, pensar de forma nova o que vai sendo colocado cotidianamente como tarefa a ser resolvida (Barbosa, 1986,p.125).*

Ao propormos a linguagem escrita em aulas de matemática buscamos uma aprendizagem mais eficaz com relação aos conceitos fundamentais do Cálculo I e também a superação de um ensino moldado em paradigmas tradicionais onde um faz e o outro repete. Se *aprender envolve também voltar a lidar com o imprevisto, pensar de forma nova o que vai sendo colocado cotidianamente como tarefa a ser resolvida* – na formação de futuros profissionais – isso não é apenas fundamental, é essencial.

Vygotsky (1998a) ressalta outro fator na utilização dos problemas:

> *A presença de um problema que exige a formação de conceitos, não pode, por si só, ser considerada a causa do processo, muito embora as tarefas com que os jovens se deparam ao ingressar no mundo cultural, profissional e cívico dos adultos sejam, sem dúvida, um fator importante para o surgimento do pensamento conceitual. Se o meio ambiente não apresenta nenhuma dessas tarefas ao adolescente, não lhe faz novas exigências e novos objetos, o seu raciocínio não conseguirá atingir os estágios mais elevados, ou só os alcançará com grande atraso* (p.72-73).

A falta de situações em que o aluno possa perceber o significado faz com ele memorize regras apenas. A utilização do cálculo pode ser vista na análise gráfica de gases (Física), crescimento populacional (Biologia), titulação de um ácido (Química), entre outros. Dar a oportunidade para os alunos perceberem tais aplicações é também contribuir para a significação do conteúdo estudado. Considerando a expectativa das teorias pedagógicas atuais, no sentido de que o conhecimento seja construído pelos estudantes, não podemos esperar que a apresentação do conhecimento estruturado, corretamente lógico, seja suficiente para garantir a aprendizagem, no sentido de apropriação por parte do aluno" (Barufi, 1999,p.150).

CAPÍTULO II

METODOLOGIA E ANÁLISES DOS DADOS

1. Modelo de Estudo e Seleção dos Sujeitos

Optamos por realizar nosso estudo através da abordagem do tipo etnográfico - com o contato direto com os sujeitos envolvidos. Esta pesquisa é qualitativa à medida que busca fazer um questionamento ao ensino até hoje ministrado tentando estabelecer novos parâmetros: "trata-se de mostrar as tensões que existem entre o que é e o que poderia ser, de desmistificar os bloqueios à transformação ou de explorar possíveis ações" (Thiollent, 1995, p.49).

Este trabalho foi realizado em uma turma de Agronomia da Universidade Federal de Goiás, durante os meses de abril, maio, junho, agosto e setembro do ano de 1999. As aulas eram de 1,5 hora de duração, duas vezes por semana.

Em alguns momentos tivemos aulas também no Laboratório de Informática.

A turma era composta por 36 alunos, sendo que a freqüência às aulas girava em torno de 34 alunos, pois alguns destes eram dependentes, não sendo obrigados a assistirem a todas as aulas.

A ênfase maior aqui é dada ao processo e não somente aos resultados finais. "A pesquisa etnográfica busca a formulação de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e na sua testagem (...) **O que esse tipo de pesquisa visa é a descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade**" (Grifos meus) (Andre, 1995, p.30).

Em nenhum momento desprezamos, os aspectos quantitativos, pois, como afirma Dias Sobrinho (1997), "Quantidade e qualidade são dimensões inseparáveis de uma mesma realidade. Portanto, enfatizar uma delas é uma opção metodológica que se justifica em face da escolha de objetivos" (p.83).

Dentro desta perspectiva o estudo de caso procura retratar ainda mais o estudo buscando aprofundar os dados gerais, a interpretação que foi dada naquele contexto, criando a oportunidade de se entender "singularidades" existentes.

Em um primeiro momento os alunos responderam um questionário geral (anexo II, p.103) que teve como objetivo obter informações gerais com relação a conteúdos que eram pré - requisitos ao aprendizado de Cálculo I. Procuramos com isso verificar se, como nos anos anteriores, a turma apresentaria dificuldades como: identificar as coordenadas de um ponto, interpretar a notação de intervalos, operar substituições simples na determinação da imagem de determinado ponto do domínio dada a lei de formação da função etc.

Toda a distribuição do conteúdo encontra-se nas etapas do cronograma (anexo III, p.115). Eles foram, em alguns momentos, propositadamente mudados de lugar com a finalidade de se conseguir uma maior significação dos conceitos.

A abordagem também foi modificada visando à significação. E como foi estruturada esta mudança?

A taxa de variação é uma parte do estudo de aplicações de derivada que aparentemente causa medo ao aluno. Ele, normalmente, não é capaz de perceber a taxa como algo que fez parte do estudo da derivada, bem como sua interpretação. E os professores, muitas vezes, também não têm clara a importância deste estudo. Em seus discursos enfatizam a importância do mesmo, mas na prática não dedicam muito tempo a ele. Silva (1988), em sua pesquisa: Discurso de alguns professores sobre taxas de variação, chama a nossa atenção para isso.

Quanto ao tempo que o professor dedica ao conteúdo taxa de variação introduzido quando na apresentação de derivada, dedica-se, ao seu desenvolvimento, uma ou duas aulas onde alguns exemplos são, rapidamente, resolvidos. (...) A "rapidez" que caracteriza o tratamento do conteúdo em sala de aula, só faz indicar uma incompatibilidade aparente entre a importância e profundidade (p.69).

Em nossa pesquisa, desde o primeiro dia de aula comecei a falar em taxa de variação. O objetivo principal disto foi o de fazer o aluno acostumar-se com esta nova terminologia. A significação viria na interpretação. O coeficiente angular (tão estudado no segundo grau) recebia agora um "novo" nome e também um outro significado. O de um "indicador" de relação entre duas grandezas. E aqui, revisamos funções. Ao diferenciar taxa de variação de taxa média e de taxa de variação no ponto, o aluno já pôde perceber o que viria a ser a derivada.

A problematização do conteúdo vem ao encontro do significado mostrando os elos existentes em descobertas que pareciam ser totalmente sem conexões. Um exemplo: Muitas vezes o estudo do limite precede o estudo da derivada. Fica-se muito tempo nas propriedades operatórias do limite, tipos de limite; depois disso volta-se ao estudo da derivada e, na grande maioria das vezes, o aluno não percebe relação alguma entre um estudo e outro.

Ao procurarmos um ensino em que os aprendizes possam atuar de forma mais independente, é necessário criar oportunidades para isso, oferecer momentos em que haja discussão, reflexão. Sempre com o objetivo de problematizar os conteúdos para que os significados fossem apreendidos, a derivada foi trabalhada inicialmente de forma mais intuitiva. O conceito de limite veio como uma conseqüência (uma necessidade). A continuidade também foi colocada de maneira que o aluno pudesse entender a importância do estudo de limite. A heurística foi fundamental neste processo. Através de questionamentos, o aluno ia refletindo mais e mais sobre cada novo conceito.

Ao pensarmos numa problematização do conteúdo que envolva a derivada o aluno irá perceber que a derivada relaciona-se com o limite, que as regras de derivação estão intimamente ligadas ao limite e que é também por isso importante fazer todo este estudo. Ao final do processo ele tem consciência de que tanto um quanto o outro são ferramentas poderosas no estudo das funções e é esse o objetivo do Cálculo I, aprofundar o estudo das funções, oferecer maneiras diferenciadas e melhores de manipularmos as funções. Se não formos cuidadosos nossos alunos poderão, ao final do semestre, não perceber a relação existente entre conceitos como: continuidade, limite e derivada.

Ao final dos três primeiros meses de estudo, o aluno já poderia ser capaz de entender as relações existentes entre estes conceitos (a atividade realizada no último dia de aula antes das férias – o Gibi [anexo IV, p.118] – teve como objetivo principal verificar o aprendizado desta relação).

Na retomada do estudo, foram sendo introduzidas as regras de derivação (sempre com a idéia de: para quê ?) , a derivação implícita e as aplicações gerais da derivada.

Todo o planejamento do curso esteve diretamente ligado ao objetivo maior deste estudo – um aprendizado significativo em Cálculo I.

> *Nunca devemos pensar um planejamento pronto, imutável e definitivo. Devemos antes acreditar que ele representa uma primeira aproximação de medidas adequadas a uma determinada realidade, tornando-se, através de sucessivos replanejamentos, cada vez mais apropriado para enfrentar a problemática desta realidade. Estas medidas favorecem a passagem gradativa de uma situação existente para uma situação desejada* .(Turra, 1996, p.13).

Todas as atividades ou resumos que eram entregues para os alunos vinham com pensamentos, pequenas reflexões diárias com o objetivo de melhorar a auto – estima, auto – confiança .Com isso buscamos alcançar um dos objetivos principais da educação que é o de mudar comportamentos trazendo para a sala de aula outros aspectos importantes da educação que também fazem parte da formação do homem, tais como: respeito a si, respeito ao próximo, saber conviver, saber trabalhar em grupo.

> *O sentido da vida só pode ser aprendido pela própria pessoa, mas as atitudes podem ser ensinadas. Mesmo que o professor não considere as atitudes como objetivos destacados dentro de seu ensino, não pode ignorar que elas afetam a interpretação de tudo que se percebe(...) O professor que não se preocupa com a formação de atitudes, esquece a importância dos sentimentos como determinantes do comportamento* (Turra, 1996, p.86).

A seguir, uma descrição das atividades que foram desenvolvidas durante todo o processo de estudo e que foram intermediados pela escrita de maneira mais explícita ou não.

Aulas no Laboratório de Informática

As aulas no laboratório de informática foram desenvolvidas com a utilização do Graphmatica. Este programa possui um ambiente próprio para a construção de gráficos, sendo possível traçarmos até sete gráficos em um mesmo plano cartesiano. Fácil de ser manipulado, não requer conhecimentos específicos de computação. O aluno ao entrar no laboratório recebia um roteiro a ser seguido (anexo V, p.127 ; Anexo VI, p.129). O trabalho era realizado em duplas ou trios.

Estas atividades tiveram como objetivos principais:

✓ Fazer com que os alunos testassem os gráficos, analisassem e estabelecessem a relação entre a lei de formação da função e o gráfico representado por ela identificando as translações ocorridas.

✓ Reforçar a aprendizagem cooperativa dando espaço para a discussão.

✓ Reforçar e fixar o conteúdo estudado.

✓ Mudar o ambiente de estudo

✓ Estimular à descoberta.

✓ Realizar atividade escrita indireta através de questionamentos pré- estabelecidos.

Foram no total 8 aulas, sendo 2 nos 3 primeiros meses (estudo das taxas e revisão de funções) e 4 nos últimos meses (aplicações da derivada – estudo das regiões de crescimento e decrescimento de funções, análises e determinações de pontos críticos).

Redações

Também realizadas durante todo o processo de ensino, as redações tiveram como objetivo principal :

✓ Auto – avaliação induzida (momento para o aluno refletir sobre o seu aprendizado – o que sei, o que ainda não está claro).

✓ Fixação do conteúdo.

✓ Orientação para que o aluno, ao escrever, pensasse melhor sobre os conceitos estudados, seus significados, relações com outros conceitos.

✓ Avaliação da compreensão destes conteúdos.

Estas redações foram feitas de formas diferenciadas, incluindo questões discursivas nas avaliações formais (provas).

Estudos Dirigidos

Os estudos dirigidos, ao longo de todo o processo, tiveram como objetivos principais:

✓ Melhorar a capacidade de compreensão de leitura.

✓ Melhorar a capacidade de escrita (estruturação e organização do pensamento).

✓ Lançar as idéias primeiras e gerais de um novo estudo.

Esses estudos foram feitos em grupo ou individualmente e tiveram como características principais o fato de possuírem questões (perguntas) (Anexo VII, p.132; Anexo VIII, p.135.)

Aulas de Exercícios

As aulas de exercícios foram feitas de duas maneiras diferentes.

Algumas vezes os alunos eram propositadamente escolhidos (duplas ou trios), outras vezes a sala ficava livre para trabalhar como quisesse (em grupo ou não). Buscamos, desta maneira, "socializar o conhecimento" nos utilizando da Zona de Desenvolvimento Proximal – outro conceito de extrema importância na teoria de Vigotski (1998b).

> *A zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes* (p.112).

Tais aulas tiveram como objetivos principais:

✓ Realizar aprendizagem cooperativa.

✓ Exercitar a capacidade de argumentar, refutar idéias.

✓ Aprender a "falar" e a "ouvir".

✓ Colocar o conhecimento de "um" frente ao conhecimento do "outro".

✓ Trabalhar com dificuldades específicas (de cada grupo ou aluno).

✓ Incentivar a socialização do conhecimento, colocando alunos de diferentes níveis de dificuldade para trabalharem em conjunto.

2. O diário da pesquisadora

Todo o caminhar da pesquisadora durante este processo encontra-se no diário (anexo IX, p.137).

E por que nos utilizarmos do diário nesta pesquisa?

Foram vários os motivos que nos levaram a optar pelo diário; e ao falarmos em uma abordagem qualitativa de estudo é mister que nós, enquanto pesquisadores - professores, pessoas envolvidas e partes integrantes deste estudo possamos refletir sobre nossas condutas realizando um exercício de metacognição : "acreditamos que o exercício metacognitivo favorece um distanciamento do saber e do saber fazer e, conseqüentemente a reflexão e a reelaboração desses" (Darse, Carvalho, 1996, p.91).

Precisamos refletir sobre e na prática (Novoa,1992).

Ao nos questionarmos sobre formas diferenciadas de ensino não há como não nos questionarmos enquanto "agentes" deste ensino e a reflexão durante a ação é instrumento de aprendizagem." No contato com a situação prática não só se adquirem e constroem novas teorias, esquemas e conceitos como se aprende o próprio processo dialético da aprendizagem."(Gomez, 1992).

A outra vantagem da utilização do diário na pesquisa qualitativa refere-se ao fato de podermos, através dele, fazer uma reflexão distanciada.

> *O olhar distanciado sobre o objeto de aprendizagem (do que e do como ensinar) permite ao aluno-professor refletir sobre o mesmo, e a estabelecer confronto entre seu conhecimento prévio deste objeto e a nova aprendizagem, levando-o, assim, a construção de um novo conhecimento, ou a compreender tal objeto de maneira diferente de como o via antes* (Darse, Carvalho, 1996, p.93).

A escrita reflexiva neste estudo foi parte integrante da metodologia qualitativa, pois, segundo Patton (1980):

> *Os dados qualitativos constituem descrições detalhadas de situações, acontecimentos, sujeitos, interações e condutas observadas: citações diretas de pessoa acerca das suas experiências, atitudes, crenças e pensamentos: e fragmentos ou passagens completas de documentos correspondentes, registros e históricos de casos. "Alcançar" o significado imediato das ações segundo a perspectiva do ator" é para Erickson (1986) o esforço principal da investigação qualitativa* (Darse, Carvalho, 1996, p.98).

Ao buscarmos entender o processo educativo por uma perspectiva que não seja apenas quantitativa, o diário do pesquisador traz vários elementos significativos para pensarmos a nossa prática. E o exercício da escrita que desenvolvemos durante este processo nos dá outros benefícios: " o processo de escrever é multirrepresentacional e integrativo. No desenvolvimento da narração escrita, o escritor manipula as diversas formas de acesso à realidade: age, pensa e manipula imagens (olhos, mãos e idéias trabalham simultaneamente e em interação" (Zalbalza, 1994, p.93).

Sem dúvida nenhuma o "pensar sobre a prática na prática" tem no diário da pesquisa uma fonte de informações que trará ainda mais elementos para este ato de reflexão.

O material escolhido para as análises foram aqueles que, aos olhos da pesquisadora, seriam capazes de "desnudar" a apreensão dos conceitos matemáticos fundamentais para o aprendizado em Cálculo I, evidenciando também os vários momentos que compuseram este estudo. Este material está contido nas diversas produções escritas dos alunos nas diferentes situações que compuseram as atividades em sala de aula durante todo o processo da pesquisa.

Segundo Erickson (1990):

> *A própria coleta de dados é considerada um processo de investigação. Nunca se focaliza apenas um nível da situação como objeto da análise, nenhum evento ou fenômeno pode ser visto de forma isolada. E sua análise não ocorre de forma estanque num momento posterior à coleta de dados, mas começa na coleta, com as reflexões e decisões que o pesquisador toma no sentido de traçar um percurso, que vai da abordagem mais abrangente à mais restrita* (Garcez, 1998, p.90,91).

Para efetuar a análise da turma como um todo foram escolhidas atividades mediadas pela redação em momentos diferenciados: 2 cartas, 2 estudos dirigidos, 1 estudo desenvolvido no laboratório de informática, gibi, questões teóricas de 2 avaliações formais (percentuais de acerto),1 questão teórica de uma avaliação formal, as notas de 2 avaliações formais.

3. O tratamento dado ao material

O tratamento dado a este material teve como referência a análise de conteúdo sendo realizada também a análise de discurso já que o sentido era o que estávamos buscando.

Toda a análise realizada foi pautada na busca dos sentidos matemáticos, as relações que o aluno fez, como ele discorreu sobre os conceitos.

Foi preciso mudar a forma de perceber o texto:

> *Enquanto unidade pragmática , que se constitui na interlocução , não importa a extensão do texto: pode ser uma palavra, um sintagma, um conjunto de frases (escrito ou oral), o que importa é que funciona como unidade de significação em relação `a situação. (...) A noção de texto, enquanto unidade de análise de discursos, requer que se ultrapasse a noção de informação, assim como coloca a necessidade de se ir além do nível segmental. O texto não é soma de frases e não é fechado em si mesmo. Portanto, ao se passar para o texto como unidade de discurso, se passa da operação de segmentação para a de recorte. Passa-se da distribuição de segmentos para a relação das partes com o todo, em que se procuram estabelecer, através de recortes, unidades discursivas* (Orlandi, 1993, p.22).

É necessário ressaltar que a análise por nós realizada diferencia-se da análise realizada pela lingüística, pois os objetivos de uma são diferentes dos da outra.

> *A lingüística estuda a língua para descrever o seu funcionamento. A análise de conteúdo procura conhecer aquilo que está por trás das palavras sobre as quais se debruça. A lingüística é um estudo da língua, a análise de conteúdo é uma busca de outras realidades através das mensagens* (Bardin, 1977, p.44).

A utilização desta análise é, sobretudo, para que as "visões" pessoais daquele que investiga possam ser socializadas e "verificadas" – Será que aqueles que lerem este material partilharão das idéias apresentadas ? Seria a minha leitura deste material válida e generalizável?

Um dos aspectos mais importantes da análise de discurso é o enriquecimento da leitura, e ao trabalharmos com a escrita este "saber ler"(que Orlandi define como " saber o que o texto diz e o que ele não diz, mas o constitui significativamente") é fundamental.

> *Se uma olhar imediato, espontâneo, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta, aumentar a produtividade e a pertinência? Pela descoberta de conteúdos e estrutura que confirmam (ou infirmam) o que se procura demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações suceptíveis de conduzir a uma descrição de mecanismos de que a priori não detínhamos a compreensão* (Bardin, 1977, p.29).

Através desta análise estaremos verificando a confirmação ou não das nossas hipóteses. É método empírico que vai depender do tipo de interpretação que se pretende, Orlandi (1988) chama à atenção para o fato de que:

> *Partimos de um "dado" e, quando definimos o "objeto" através da metodologia, nos comprometemos ao mesmo tempo com uma teoria e com um corpo de definições, de acordo com as quais produzimos as correspondências técnicas de análise.(...) Há uma relação necessária entre o objeto, as técnicas, a metodologia e a teoria na qual a análise se sustenta* (Orlandi, 1993, p.16).

É claro que temos consciência de todas as implicações existentes na produção de um texto. Por mais "simples" que ele possa parecer existem a situação, os interlocutores, o contexto histórico – social, ideológico , enfim as condições em que estes trabalhos foram realizados, e é claro que isso influencia, vezes que "A relação entre linguagem e exterioridade é constitutiva. Essa é uma relação orgânica e não meramente adjetiva. Não se dirá, assim, que se acrescentam dados históricos para melhor delimitar a significação; dir-se-á que o processo de significação é histórico" (Orlandi, 1988, p.18).

Mas, como já ressaltamos anteriormente, o empréstimo vindo da análise do conteúdo para a nossa análise dos discursos (em nosso caso – da escrita), sem desprezar todos estes fatores, estará dando maior ênfase ao sentido matemático. É este aspecto que mais nos interessa.

Buscando estes sentidos matemáticos realizamos um recorte temático, ou seja, de todo o material escrito focalizamos nossa atenção em parágrafos que poderiam mostrar a apreensão dos conceitos estudados. Em seguida identificamos as palavras que estariam "orbitando" em torno de cada conceito principal.

> *O fenômeno da multisignificação das palavras é muito mais amplo do que possa parecer (...) a "referência objetal" exata ou o "significado parecido" é, na essência, a escolha do significado necessário entre uma série de possibilidades. Mais freqüentemente, a particularização do significado da palavra ou sua escolha se realiza por "marcadores semânticos" e "distintivos semânticos" que tornam preciso o significado da palavra, diferenciando-o de outros possíveis significados. Habitualmente esta função está determinada pela situação, pelo contexto nos quais a palavra está e, às vezes, pelo tom em que se pronuncia* (Luria, 1986, p.32).

A análise por freqüência de palavras – chave teve como objetivo detectar a "aglutinação" (vide citação - p.13). Identificando estas palavras estaríamos em maiores condições de perceber as relações estabelecidas no processo de apreensão do conceito. É importante ressaltarmos que nem todas as atividades receberam o índex por freqüência, a grande maioria das análises foi realizada em índex temáticos (ou categoriais) por estarem mais de acordo com o que estávamos nos propondo a estudar.

> *Fazer uma análise temática, consiste em descobrir "núcleos de sentido" que compõe a comunicação e cuja presença, ou freqüência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido (...) O tema, enquanto unidade de registro, corresponde a uma regra de recorte (do sentido e não da forma) que não é fornecida uma vez por todas, visto que o recorte depende do nível de análise e não de manifestações formais regulares* (Bardin, 1977, p.106).

Após a escolha do material foi feito um índex categorial , já que a análise foi temática e com o objetivo de descobrir as palavras que se relacionavam com o conceito estudado com maior freqüência.

Optamos por usar, inicialmente, a palavra como unidade de registro não desprezando o tema como outra unidade também, deve-se entender o tema como uma afirmação acerca de um assunto, uma frase, ou uma frase composta.

> *A palavra converte-se em elo ou nó central de toda uma rede de imagens por ela evocadas e de palavras "conotativamente" ligadas a ela. Aquele que fala ou que escuta contém, inibe, toda esta rede de palavras e imagens evocadas pela palavra, para poder escolher o significado "imediato" ou "denotativo" necessário no caso ou situações dadas* (Luria, 1986, p.35).

Em um primeiro momento, fizemos a análise temática e em seguida por palavras – chave, ou seja, após selecionarmos os conceitos chaves ou títulos conceptuais percebemos que estes conceitos reúnem um certo número de unidades de significação que podem ser palavras, fórmulas, frases. Estes conceitos chaves serão os intermediários entre a teoria construída e os dados verbais – brutos (Bardini,1977).

É importante ressaltar que todos os índex categoriais contidos nesta pesquisa "nasceram" dos dados analisados. Ao construir estes índex buscamos, através da aproximação dos sentidos, estabelecer uma maneira de perceber a compreensão dos alunos com relação aos conceitos estudados. "Classificar elementos em categorias, impõe a investigação do que cada um deles tem em comum com outros" (Bardin, 1977, p.118).

Limitações do Método

Ao trabalhar com as redações, com as produções coletivas ou individuais estamos considerando que tenha havido realmente um produção no sentido de que o sujeito envolvido, refletiu, estruturou idéias, escolheu palavras para expressá-las e escreveu; mas, ao pedir ao aluno que escreva, poderemos nos deparar com um trabalho mecânico, sem todos os aspectos anteriormente mencionados. Neste sentido, ao "mergulhar" no texto detectamos, algumas vezes, cópias de materiais que serviram de fonte de estudo.

E aqui, gostaríamos de ressaltar que a dificuldade em escrever, bem como o medo de errar podem interferir neste processo. É tarefa do professor buscar minimizar este medo. Só com confiança e com garantia de que estas produções não serão utilizadas para "condenar" , mas para "orientar", "instruir", e, assim, melhorar o processo de aprendizagem, é que o aluno será capaz de escrever mais livremente.

CAPÍTULO III

Análises gerais das atividades propostas

Neste capítulo buscamos mostrar que relações foram estabelecidas e como as mesmas foram sendo estruturadas nos trabalhos escritos realizados pela turma. Em alguns momentos as análises se diferenciam com o intuito de buscar maiores evidências destes trabalhos de elaboração. Faz-se necessário ressaltar que os objetivos variaram em cada atividade, pois cada etapa do processo constituiu um passo em busca da formação dos conceitos principais do Cálculo I.

Primeira atividade com a utilização da escrita – dia 19/05/99 – 5ª aula – Taxas

> "Através de exemplos, discutimos o fato de que na função de 2° grau, as taxas mudam muito de intervalo para intervalo.
> Retomei a idéia de coeficiente angular da reta (na do 1°grau) e comecei a induzir os alunos à idéia de aproximação de pontos pela curva, secante que vai virando tangente (porque esta tangente retorna à idéia da função do 1°grau, sua variação que é a). Comecei a falar de uma reta tangente no sentido de "aproximação" . Aqui já começa a idéia intuitiva de limite –Brinquei com eles usando expressões da forma:
> - "Como medir a inclinação de uma curva? A curvatura de uma curva?"
> Ao dizer que "aquilo" era a derivada, notei que eles me olharam como se perguntassem : - 'É só isso??? A tão famosa derivada????Impossível !" (Diário da pesquisadora – Anexo IX, pg.137.)

Neste trabalho foi pedido aos alunos que escrevessem uma carta para quem eles quisessem, mas esta carta teria como objetivo principal explicar qual a diferença existente entre taxa, taxa de variação média e taxa de variação no ponto. Até então todos estes conceitos haviam sido trabalhados com a utilização de gráficos e de problemas simples, do dia-a-dia. Buscamos nesta análise as definições e as relações que os alunos fariam entre estes três conceitos.

Foram analisados 30 trabalhos o que corresponde, em termos percentuais - 88,23% da turma.

Em um primeiro momento focalizamos a ordem em que surgiram os conceitos taxa – taxa de variação média – taxa de variação no ponto – com o intuito de verificar se os alunos já estariam elaborando as relações entre eles ou não. O resultado obtido foi:

Tabela 1
Ordem de aparição dos conceitos: taxa, taxa média e taxa de variação no ponto no trabalho escrito

Taxa → taxa média → taxa de variação no ponto	21	70 %
Taxa média → taxa de variação no ponto	5	16,6 %
Taxa → taxa média	3	10 %
Taxa →taxa de variação no ponto	1	3,3 %

Era de se esperar que os alunos associassem os novos conceitos com algo que lhes fosse familiar. Pudemos constatar que a maior parte da turma relacionou a taxa com o coeficiente angular e inclinação (50%) – maneira normalmente trabalhada no 2° grau em que se define que o "m" da equação reduzida da reta y = mx + n é o coeficiente angular e o "n" o coeficiente linear.

Alguns alunos chegaram a explicitar esta "nova" compreensão do que viria a ser o coeficiente angular, ocorrendo assim, uma primeira modificação do conceito original.

"Lembra da inclinação de uma reta, m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Pois é, este m representa também a taxa de variação nas funções de 1° grau. E essa taxa é constante" (aluno 08).

"Você lembra no 2° grau quando a gente viu coeficiente angular, então, no 3° grau ele também é conhecido como taxa de variação" (aluno 22).

"Aquela taxa de variação nada mais é que nosso velho coeficiente angular (lembra?), ou para melhor esclarecer, lembra da fórmula genérica da função? É o "a'"(aluno 25).

Ao buscarmos as palavras-chave que estiveram associadas a este conceito, pudemos obter a tabela abaixo.

Tabela 1.1
Palavras relacionadas com o conceito "taxa"

Palavras – chave	**Incidência**		**Por aproximação do sentido**
a) relação	2	6,6 %	c) + d) = 15 (50%)
b) dependência	2	6,6 %	e) + f) + j) = 8 (26,6%)
c) coeficiente angular	9	30 %	h) + i) + l) = 3 (10%)
d) inclinação	6	20 %	
e) constante	6	20 %	
f) variação diretamente proporcional	1	3,3 %	
g) interdependência	1	3,3 %	
h) razão constante	1	3,3 %	
i) proporção	1	3,3 %	
j) variação constante	1	3,3 %	
l) razão de segmentos	1	3,3 %	

O índex categorial (ou por tema) obtido através das análises vem explicitar um pouco as relações estabelecidas pelos alunos.

Quadro 1.1
Índex 1.1 – referente à "taxa".

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
01	x	x							
02			x						
03									
04		x							x
05									
06					x				x
07		x							
08				x					x
09					x				
10						x			
11									
12					x				
13									
14									
15			x			x			
16					x				
17							x		
18						x			
19									
20					x				
21								x	
22						x			
23			x	x	x				
24				x					
25			x			x			
26	x					x			
27									
28						x			x
29								x	
30						x	x		

A) Relação → entre as variáveis, entre os valores.
B) Dependência → interdependência → entre x e y.
C) O "a" da equação ax + b
D) Inclinação → da reta.
E) Variação → de uma grandeza por unidade de outra → de uma reta de um ponto ao outro → de y por unidade de x → entre dois pontos em uma função.
F) Coeficiente angular
G) Proporção → razão de segmentos
H) Valor que estipula em quantas unidades constantes algo vai aumentar ou diminuir
I) É constante → quando o gráfico é uma reta → nas funções de 1° grau.

A taxa de variação média se altera em funções que não são do 1° grau. Até então os exercícios e exemplos haviam sido pautados mais neste tipo de função, o que pode ter ocasionado esta pouca diferenciação.

Com relação à taxa de variação média, 83% fizeram menção a este conceito em suas cartas ficando o restante 16 % sem escrever nada sobre este assunto.

"A taxa média é o seguinte, imagine que você vai gastar uma coisa, igual a já citada acima, mais só que isso vai ser gasto de uma maneira "imprópria", ou seja, num instante gasta um pouco e no outro instante gasta outro e isso tudo num intervalo de tempo (ou qualquer outra grandeza) igual. Daí fazemos um simples cálculo e descobrimos a média que gastamos por certo intervalo de tempo (ou qualquer outra grandeza)" (aluno 17).

" A taxa média, que consiste na variação por unidade entre dois pontos (x e y) nos encontramos assim, variação de y dividido pela variação de x, ou seja TM = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$" (aluno 21).

No índex relacionamos os vários temas (frase que expressa uma idéia) dados pelos alunos.

A freqüência obtida foi:

Quadro 1.2

Índex 1.2 – referente à "taxa média".

	A	B	C	D
01	x	x	x	
02	x	x	x	
03	x			
04	x			
05	x	x		
06		x	x	x
07	x	x		
08	x	x		
09	x	x		
10	x			
11	x			
12				
13				
14	x	x		
15	x			
16	x	x		
17		x		
18	x	x		
19	x	x		
20	x	x		
21	x			
22			x	
23	x			
24				
25			x	
26	x			
27				
28	x			
29				
30	x			

A) uma variação – de y por unidade de x.
B) média entre pontos – entre dois pontos – num intervalo – por intervalo – das taxas.
C) Não é exata – não é constante – variam em cada (com cada) intervalo.
D) Não varia uniformemente.

Na freqüência por tema buscamos a "definição" dada pelos alunos para a taxa média e obtivemos:

Tabela 1.2 – Temas/frases associados à "taxa média"

Tema – frase	**Incidência**		**Por aproximação do sentido**
a) não é variação exata	1	3,3%	a) + c) + b) + d) = 8 (26,6%)
b) variação não constante	4	13,3%	e) = 1 (3,3%)
c) não varia uniformemente	1	3,3%	
d) taxa inconstante	2	6,6%	
e) variação entre pontos de curvas	1	3,3%	

Quando passamos a fazer a leitura sobre o que eles escreveram com relação à taxa de variação no ponto, podemos perceber uma compreensão muito boa deste conceito. Vários alunos (23%) elaboraram uma explicação completa, uma síntese da exposição que ele tinha visto, o que demonstra que houve uma elaboração durante o processo de escrita.

" A taxa de variação no ponto diferente da taxa de variação que se baseava em vários pontos, aqui se baseia em apenas um e utiliza um conceito matemático chamado derivada para se calcular a variação que é a inclinação da reta que de acordo com que mudamos o domínio a reta vai se inclinando e ficando tangente a curva" (aluno 05).

"A derivada , pra falar bonito isso quer dizer que é o limite da razão incremental quando o h tende a zero. Vou explicar: esse limite da razão incremental é aquela mesma variação média, e assim, não dá pra determinar numa função que não seja do 1° grau a taxa de variação no ponto porque se nós traçarmos uma reta num ponto da parábola ela vai tocar em um outro ponto e aí ao invés dela ser tangente, ela vai ser secante. O que podemos fazer é tentar traçar uma reta muito perto daquele ponto que escolhemos e colocar na fórmula da inclinação (m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$) Aí nós acharemos a derivada da função (...) qualquer valor da parábola que nós colocarmos nessa derivada, acharemos a inclinação dessa reta rente ao ponto (aluno 08).

Alguns foram mais gerais ressaltando aspectos que eles consideravam mais significativos (33%).

" A taxa de variação da reta que passa tangenciando (em apenas um ponto) da função também se chama derivada, seu valor indica a inclinação dessa reta no ponto considerado. Então essa derivada, que tem nome de taxa de variação, ainda se chama coeficiente angular. Tudo isso é apenas a inclinação de uma coitada de uma reta"(aluno 29).

Outros alunos (26%) fizeram, quase que uma cópia do material que havia sido entregue. Isso demonstra pouca elaboração do conceito além do medo de errar, o que acredito, ter contribuído para tal, juntamente o fato de eles se sentirem inseguros, afinal esta era a primeira atividade que envolvia a escrita em sala de aula. O receio de que o que eles escrevessem pudesse ser usado para "dar uma nota" também interferiu. Chamei a escrita de semi-cópia porque alguns deles inverteram frases e/ou mudaram algumas palavras.

"A taxa no ponto (derivada) serve para caracterizar a rapidez, com que uma função y = f(x) varia em um ponto x_0. A idéia fundamental de tal noção é a de que uma curva pode ser aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto"(aluno 20).

"Existe ainda a taxa de variação no ponto que pode ser chamado de derivada e esta indica a taxa de variação sofrida pela função no próprio ponto. Em um curva pode se aproximar um reta nas proximidades de um ponto. Assim, a rapidez como uma função varia pode estar associada a taxa de variação da função que melhor se aproxima da função em um ponto"(aluno 09).

O mais importante a ser considerado aqui é que, apesar da cópia, isso não é de todo ruim porque o aluno ainda assim estará fazendo uma leitura do material. Escrever não é algo simples, o aluno de uma maneira geral sente-se inseguro nas aulas de Cálculo e quando ele se depara com alguma atividade nunca antes pedida, o medo aumenta.

Se o aluno, ainda que se iniciando na escrita através de recortes de material dado, pode ir evoluindo para as suas próprias definições (definições com suas palavras – chave), a redação atingirá seus objetivos nas aulas de Matemática. A idéia aqui não é punir, mas estimular o aluno na busca de suas próprias elaborações.

A freqüência por palavras-chave obtida foi:

Tabela 1.3 – Palavras relacionadas à "taxa de variação no ponto" (derivada)

Palavra – chave	**Incidência**	**Percentual**
a) aproximação	10	33,3%
b) tendência	08	26,7%
c) tangente	08	26,7%
d) coeficiente angular	02	6,7%
e) inclinação	05	16,7%
f) velocidade	03	10%
g)rapidez	04	13,3%
h) variação	05	16,7%
i) explicações gerais	07	23,3%
j) explicação com a utilização do aspecto gráfico	09	30%

E o índex categorial obtido foi:

Quadro 1.3

Índex 1.3 – "referente à taxa de variação no ponto".

	A	B	C	D	E	F	G	H
01					x	x		
02	x					x		
03	x			x		x		
04							x	x
05	x	x						
06		x	x			x		
07								
08		x					x	
09			x					x
10								
11			x					
12		x						
13								
14	x				x		x	
15								
16							x	
17								
18							x	
19								x
20			x					x
21								
22	x				x			
23		x	x					
24		x	x		x			
25					x			
26								
27								
28		x						
29		x		x				
30								x

A) Secante que se transforma em tangente – que vai virando tangente – vai inclinando e ficando tangente (à curva) – formando uma tangente – reta que vai passando de reta secante para reta tangente.
B) Vai medir a inclinação da curva – variação da curva no ponto – inclinação da reta (tangente ao gráfico) no ponto – reta tangente em qualquer ponto da curva – reta traçada tangente à curva nesse mesmo ponto – variação da reta que passa tangenciando em apenas um ponto.
C) Vai medir a velocidade com que uma grandeza vai variar no ponto – rapidez como uma função (com que uma função) varia (em um ponto) – é também velocidade.
D) É (designa) coeficiente angular.
E) Quanto mais o ponto se aproxima mais tende a zero – um ponto se aproxima de um ponto fixo numa curva através de uma reta.
F) Quando o h tende a zero, quando o limite tende a zero – a gente estabelece um limite em relação à curva traçando várias retas que façam o ponto tender a zero – é o limite da inclinação quando a taxa de incremento tende a zero.
G) Limite da razão incremental quando o h tende a zero.
H) A curva pode ser aproximada por reta perto de (nas proximidades de) um ponto qualquer.

Segunda atividade – estudo dirigido em trios – taxas – 26/05/99 – 7ª aula

Durante esta atividade foram trabalhados primeiramente gráficos que envolviam funções de 1° grau: linear, afim, constante. A segunda parte da aula foi dedicada à escrita. As perguntas objetivaram a verificação do nível de compreensão destes conceitos: taxa, taxa média e taxa de variação no ponto após a discussão em grupo.

Ao todo foram analisados 11 trios – (97%) de um total de 34 alunos.

Nesta atividade podemos perceber que a maioria da turma justificou que taxa, taxa média e taxa de variação no ponto eram sinônimas nas funções de 1° grau se utilizando primeiramente do aspecto geométrico.

"o gráfico é uma reta e tem o seu coeficiente angular que definiria a sua taxa de variação, e consequentemente cada ponto ou intervalo terá o mesmo valor devido a constante que é a taxa" (G1).

Com relação à pergunta:

Podemos dizer que nas funções de 1° grau a taxa, a taxa média e a taxa de variação no ponto são sinônimas? Por que?

Obtivemos: Sim – 100%

Um dos grupos ressaltou a diferença entre os sentidos.

"Não são sinônimos. Mas, matematicamente falando, numericamente as taxas são iguais" (G6).

Outros justificaram sua resposta pelo aspecto algébrico, afirmando que os valores das três eram iguais. Os alunos nesta, mesma aula, haviam trabalhado exercícios variados de cálculos destas taxas em funções de 1° grau – 72,7% da turma – levaram estes estudos em consideração.

"Sim, porque depois de exaustivos cálculos feitos nos exercícios anteriores, todos os valores das taxas são iguais" (G8).

"Sim, porque todas as taxas serão iguais aos valores que multiplicam "x", independente do coeficiente linear" (G11).

O restante (45,8%) fez a justificativa utilizando-se principalmente do coeficiente angular.

"Sim, porque em ambos o valor será o mesmo coeficiente angular, isso se deve a constância da função" (G4).

É claro que alguns grupos fizeram combinações de justificativas o que ilustra uma maior capacidade de análise e compreensão.

"Sim, são sinônimos pois o gráfico da função é uma reta e uma reta admite em qualquer ponto um mesmo ângulo de inclinação" (G7).

As justificativas apresentadas foram:

Tabela 2 – Justificativas apresentadas à questão: Nas funções de 1º grau a taxa, taxa média e taxa de variação no ponto são sinônimas? Por que?

O gráfico é uma reta	5 grupos	45,4%
As taxas são iguais	3 grupos	27,3%
O coeficiente angular é o mesmo (o ângulo de inclinação , o "m")	4 grupos	36,7%
Inclinação constante	1 grupo	9,1 %

Ao verificarmos as respostas dadas à questão - o que a função derivada nos fornece – podemos perceber uma evolução maior no conceito de taxa de variação no ponto. 54,6% dos alunos destacaram que esta função derivada nos daria a inclinação da reta tangente (ângulo de inclinação) em qualquer ponto.

"Fornece a inclinação da reta tangente em qualquer ponto do gráfico"(G3).

O mesmo percentual se utilizou da idéia de variação instantânea e outros trios – 54,6% - destacaram que esta função nos daria o coeficiente angular da reta no ponto considerado, dando assim uma indicação desta curvatura, o que demonstra uma boa apreensão da função derivada.

"A taxa de variação do ponto (curvatura ou coeficiente angular) do gráfico da função 'primitiva'" (G2).

Outros grupos escreveram mais informações, estabelecendo assim, outras relações.

"A função derivada nos fornece a taxa de variação no ponto que por sua vez nos mostra a inclinação da reta que é o coeficiente angular"(G11).

A idéia do limite até este momento era mais intuitiva, o que não impediu que os alunos já o associassem à função derivada..

Com relação à questão : O que a função derivada nos fornece?

Obtivemos:

Tabela 2.1 – Justificativas apresentadas para: o que nos fornece a derivada?

Coeficiente angular:	1 grupo	(9,1%)
taxa de variação no ponto – instantânea no ponto – em qualquer ponto:	6 grupos	(54,6%)
Coeficiente angular ou curvatura do gráfico (da função primitiva) – da reta no ponto:	5 grupos	(45,4%)
Inclinação da reta tangente em qualquer ponto – ângulo de inclinação:	6 grupos	(54,6%)
o limite – da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:	2 grupos	(18,2%)

Fazendo a análise da terceira questão percebemos que, mesmo os trios (5) (4,9%) que afirmaram que as funções constantes não têm derivada nas suas justificativas, demonstraram compreensão do conceito de derivada afirmando que estas funções não possuíam inclinação ou eram "constantes"; apenas dois trios (2,97%) afirmaram categoricamente que a derivada era zero.

"Não, pois ela nem apresenta variação, e a derivada é justamente para encontrar a variação de um ponto"(G2).

"Sim e sua derivada vale "0", pois a inclinação da reta tangente vale 0"(G3).

No meu ponto de vista, por eles terem trabalhado com o gráfico de uma função constante nos exercícios anteriores, isso causou a dúvida e a insegurança em dizer que era zero. Ainda hoje se o zero é percebido como o indicador de **nada**, como poderia então o "mesmo" zero indicar uma variação constante ? (E que é nula justamente por isso?). Pude perceber que este foi um dos pontos que mais geraram dúvidas. Acredito também, que isso ocorreu pelo fato de eles não terem total compreensão do que viria a ser uma função constante.

Ao perguntarmos : As funções constantes têm derivada?

Obtivemos :

Tabela 2.2 – Funções constantes tem derivada? Respostas apresentadas.

Sim	6 grupos	54,5%
Não	5 grupos	45,4%

As justificativas apresentadas foram :

Tabela 2.3 – Justificativas apresentadas para a questão: funções constantes tem derivada?

Não apresenta (sofre, ocorre) variação	27,27%
Sua derivada vale zero	18%
Não possui inclinação	27,27%
A derivada tem o mesmo valor do coeficiente angular – o valor é o mesmo da taxa de variação - sua derivada mede a inclinação, sendo a inclinação constante, a taxa é constante e a derivada conseqüentemente é constante	27,27%

Para a quarta e última questão podemos perceber que os alunos não tiveram dificuldades em entender o incremento (h). Acredito que o aspecto gráfico é de grande significação, quando o aluno compreende os procedimentos algébricos oriundos da manipulação gráfica, calcular o limite da razão incremental não será para ele um "bicho de sete cabeças". O conceito intuitivo de limite é facilmente apreendido.

"Fazemos o h tender a zero para transformar a secante em tangente geometricamente obtendo a reta tangente naquele ponto teremos a inclinação da curva nesse ponto e por conseguinte a taxa de variação no ponto (derivada)"(G5).

As respostas apresentadas para a questão: Para quê fazemos o h tender a zero no momento que queremos determinar a derivada de uma função? Geometricamente o que isso significa?

Foram:

Tabela 2.4 – Justificativas apresentadas para: para que fazer o "h" tender a zero?

A reta secante se transforma em tangente:	54,5%
Para obter a reta tangente naquele ponto – para achar a tangente:	18%
Para achar o valor da derivada :	9%
Para aproximar o máximo possível – ser tangente :	9%
Para tocar em apenas um ponto:	18%
Para encontrar (para acharmos) a variação (a taxa de) de um ponto (a derivada) num gráfico que indicará a curvatura do gráfico :	27,27%
Para calcular (achar) o limite da função:	18%
Para podermos achar a inclinação:	9 %

Análise da carta 02 – falando sobre o estudo do limite e da continuidade de funções – dia 16/06/99

"A atividade de hoje teve o objetivo de finalizar parte do conteúdo.(...) Usei do argumento que pela carta eles poderiam me convencer de que eles teriam reestruturado idéias que poderiam estar confusas na aula anterior à última dada."(Diário da pesquisadora, Anexo IX, p.137.)

Neste trabalho o objetivo principal era que o aluno, ao escrever sobre o estudo já realizado de limite, fizesse uma síntese e pudéssemos também averiguar como estariam estes conceitos e suas relações.

Como a idéia intuitiva de limite já havia sido trabalhada, as redações nos mostram esta primeira apreensão. Dos alunos, 74% explicaram o que era o limite apelando para o aspecto gráfico.

"o limite é interpretado como sendo o valor representado no eixo y ou seja quando x tende a um número o valor correspondente onde x tendeu é o limite"(aluno 04).

"Entendi que limite de uma função vai nos dizer para onde a mesma vai tender, para que valor ela vai se aproximar quando nós analisamos para uma determinada abcissa. Quando vamos atribuindo valores a x cada vez mais próximos de um valor, vamos observar para onde a função está caminhando, e esse valor é o limite da função naquele ponto"(aluno 06).

Outros alunos (85%) escreveram sobre a relação existente entre os limites laterais e o limite da função, sendo que alguns deles chegaram a explicitar o que eram os limites laterais ressaltando inclusive o fato de algumas funções não possuírem em determinado ponto estes limites.

"Entendi que limite é a região em y que uma função geralmente assume. Quer dizer, se eu calculo os limites laterais de uma função contínua, esses valores se aproximarão de um mesmo número ou região geométrica. Já sobre limites entendi que são a aproximação do número que a função tende pela esquerda e pela direita"(aluno 08).

"Procurei saber quem eram os limites para derrotá-los. Cheguei a conclusão que ele é o valor máximo que uma determinada função pode atingir e que os limites laterais são valores de suma importância, para que eu saiba quem é realmente o limite, e que nem sempre eles existem dos dois lados.(...) Conclui também que o limite de uma função existe quando os limites laterais não forem infinitos e iguais"(aluno 13).

A primeira análise foi em termos da explicação de cada conceito e a segunda buscou as idéias apresentadas (novamente foi utilizado o tema, ou seja, uma frase que contivesse uma idéia completa acerca do assunto) em torno destes conceitos.

Com relação a Limite, as explicações apresentadas foram:

Tabela 3 – As diferentes explicações apresentadas para "limite".

20 alunos	74 %	Escreveram sobre o limite, sem se utilizarem dos limites laterais, sendo que 15 deles (55,5%) chegaram a afirmar: "É o valor máximo que a função atinge." Os outros se utilizaram de outras palavras dando outro enfoque ou complementando esta afirmativa
23 alunos	85 %	Estabeleceram relação entre limites laterais e limite, utilizando –se do primeiro para melhor explicar o segundo –
12 alunos	44 %	Explicaram (ou tentaram explicar) o que eram os limites laterais –

O índex por temas encontrado foi:

Quadro 3.0

Índex 3.0 – referente a "limite"

	A	B	C	D	E	F
01	x					
02				x		
03						
04	x					
05				x		
06	x				x	x
07	x	x		x		
08						
09	x					
10						
11	x				x	x
12				x		
13	x	x				
14				x		
15	x					
16	x	x				
17	x	x				
18						
19	x		x			
20	x		x			
21	x		x			
22	x				x	
23						
24	x	x				
25	x					
26	x					
27				x		

A) valor → valor máximo → valor limite → valor representado.
B) que a função atinge
C) que a função assume
D) depende dos limites laterais
E) para onde a função tende
F) para onde a função aproxima-se

Ao buscar o que os alunos apresentaram com relação aos limites laterais, obtivemos:

O índex por tema encontrado foi:

Quadro 3.1

Índex 3.1 – referente `"limites laterais"

	A	B	C	D	E	F
01						x
02						
03						
04						
05						
06			x			x
07						
08			x			
09				x		
10				x		
11			x			x
12				x		
13				x		x
14				x		
15				x		
16					x	
17						
18					x	
19						x
20						
21	x	x				
22						
23	x		x			
24	x	x				
25				x		
26			x			
27						

A) valores
B) tendências
C) aproximações pela esquerda e pela direita dos valores de x.
D) devem ser finitos e iguais
E) devem ser iguais
F) são importantes para o estudo do limite da função.

A compreensão com relação ao que viriam a ser limites infinitos e limites no infinito foi, de uma maneira geral, boa visto que 77,7% da turma souberam diferenciar um do outro.

"Aprendi que limites no infinito ocorrem quando o resultado do cálculo dos limites de uma função dá infinito, enquanto limites infinitos ocorrem quando tendemos a variável x ao infinito" (aluno 03).

"Já sobre limites infinitos e limites no infinito conclui que no primeiro o valor do limite tende a infinito, ou seja, você pode dividir um determinado número por outro de valor imenso que vai se aproximar de

O mas nunca alcança esse valor, o segundo é quando a variável, ou seja, x tende ao infinito" (aluno 19).

Tabela 3.1 – Com relação a "limites infinitos" e "limites no infinito". Explicações apresentadas

4 alunos	14,8 %	Não escreveram nada referente a este conceito
21 alunos	77, 7 %	Escreveram sobre limites infinitos e limites no infinito, sendo a afirmativa – " Limite infinito : Limite que tem como resultado , infinito. Limite no infinito : é quando tendemos a variável ao infinito." a mais freqüente.
3 alunos	3,7 %	Demonstraram confusão com relação a este conceito.

Ao montarmos os índex por temas obtivemos:

Quadro 3.1.1

Índex 3.1.1 – referente a "limites infinitos"

	A	B	C	D	E	F
01	x					
02	x					
03						
04						
05						
06		x				
07	x		x			
08	x					
09				x		
10	x					
11			x			
12					x	
13						
14						x
15	x					
16				x		
17				x		
18				x		
19				x		
20	x					
21				x		
22	x					
23						
24	x					
25	x					
26						
27						

A) quando o resultado é infinito – o resultado aproximado para o infinito – tem como resultado + ∞ ou - ∞ - tem como resposta o ∞ - a solução da + ∞ ou - ∞.
B) ao atribuirmos valores para x, ele torna-se muito grande, é infinito.
C) limites que podem ser - ∞ ou + ∞ - quando o limite da função tende ao ∞.
D) O limite da função em um dado ponto tende ao infinito - a função tende ao infinito – o valor que a função assume tende ao infinito.
E) Quando o x tende a um número infinito e quando x tende a um número definido e resulta em um limite infinito.
F) Quando os limites laterais não forem finito.

O índex obtido, referente ao conceito limites no infinito, foi:

Quadro 3.1.2

Índex – 3.1.2 – referente a "limites no infinito"

	A	B	C	D	E	F
01	x					
02		x				
03						
04						
05						
06			x			
07				x		
08					x	
09		x				
10	x					
11		x				
12						x
13						
14		x				
15		x				
16	x					
17		x				
18		x				
19		x				
20		x				
21		x				
22		x				
23						
24						
25		x				x
26						
27						

A) quando atribuímos valores a x e ele tende a infinito – a variável x é elevada ao infinito donde como resultado o limite no infinito.
B) quando a variável x tende para o infinito – quando tendemos a variável da função ao infinito – quando a componente x tende ao infinito.
C) com valores "infinitos" de x, o encontramos (o limite), porém, ele se encontra no "infinito".
D) quando fazemos aparecer valores numa função que tende ao infinito.
E) limites que assumem valores específicos nos números reais.
F) x tende a um número infinito e resulta um número exato ou definido – resulta um valor finito ou não.

Já a compreensão do que seriam as formas indeterminadas foi de apenas 70,3% da turma.

"Formas indeterminadas são aquelas que nós não podemos encontrar um valor conhecido, uma representação no plano cartesiano como 1/0" (aluno 06).

"A expressão formas indeterminadas é usada para designar valores que não podem ser representados no plano cartesiano como + ∞, - ∞, 0/0..." (aluno 11).

O quadro abaixo mostra as definições apresentadas.

Tabela 3. 2 – Explicações fornecidas para "formas indeterminadas".

19 alunos	70,3 %	Explicaram o que vinha a ser formas indeterminadas de maneiras diferenciadas
2 alunos	7,4 %	Demonstraram não terem entendido o conceito
4 alunos	14, 8 %	Não escreveram nada sobre este conceito
2 alunos	7,4 %	Só falaram que existiam formas indeterminadas, mas não explicaram o que vinha a ser isso

O índex obtido para este estudo foi:

Quadro 3.2

Índex 3.2 – referente a "formas indeterminadas"

	A	B	C	D
01	x			x
02				
03				
04		x		x
05				
06		x		x
07			x	
08		x	x	x
09		x	x	
10		x		x
11	x			x
12		x	x	
13	x			x
14			x	x
15				x
16				x
17			x	x
18			x	x
19	x			
20			x	x
21			x	
22			x	
23				
24	x	x		
25				x
26			x	
27				

A) não podem ser determinados – não se pode calcular – não podem ser medidos – não podemos encontrar um valor conhecido – não podem ser representados no plano cartesiano.
B) "resultados" – valor impróprio – valores incalculáveis – impossíveis de calcular – valores desconhecidos – "respostas" – "soluções".
C) Não podem ser apresentados como respostas – como resultados – como soluções – não se pode determinar o limite – não tem como calcular o limite – não tem como fazer as operações
D) Deram exemplos tais como: $+\infty$, $-\infty$, $\infty - \infty$, $1/0$, ∞/∞, 1 elevado a ∞.

O entendimento sobre funções contínuas foi muito bom. O aspecto geométrico foi bem explorado pelos alunos (55,5%) e aqui já podemos perceber alunos que estabeleceram relações entre os conceitos utilizando-se de uns (limites laterais) para explicar o outro (continuidade) - 48,1% da turma.

"Já uma função contínua eu entendi bem; é uma função que não existe um "furo" nela" (aluno 02).

"Uma função descontínua corresponde a uma função onde ocorre um intervalo, onde ela não é definida. É sabido, que mesmo sendo descontínua, ela possui limite, que no caso é calculando antes e depois do "rombo" na função. Mas, se esse dito "rombo" for muito grande, seu limite vai ser impossível de ser calculado, pois estes terão valores diferentes" (aluno 03).

Alguns alunos conseguiram falar em ambos os aspectos: algébrico e geométrico (29,6%).

"os limites de uma função existe quando os limites laterais forem finitos e iguais, por isso pode se ver a continuidade de uma função. Se eles não forem iguais e finitos a função apresenta literalmente "um buraco" sendo descontínua (no ponto estudado)" (aluno 15).

Realizaram esta atividade 27 alunos o que equivale, em termos percentuais, 79, 41 % da turma.

Analisando todas as cartas, obtivemos:

Tabela 3.3 – Explicações dadas para "continuidade"

22 alunos	81,4 %	Escreveram sobre a continuidade de uma maneira ou de outra
15 alunos	55,5 %	Ressaltaram o aspecto geométrico
13 alunos	48,1 %	Utilizaram –se de aspectos algébricos, incluindo o conceito de limite e limites laterais
8 alunos	29,6 %	Utilizaram-se do aspecto algébrico e geométrico
4 alunos	14,8%	Não escreveram sobre este conceito
2 alunos	7,4 %	Utilizaram-se de intervalo para falar sobre a continuidade
1 aluno	3,7 %	Confundiram função contínua com descontínua.

O índex por tema obtido foi:

Quadro 3.3

Índex 3.3 – referente a "continuidade"

	A	B	C
01		x	
02	x		
03			
04	x		
05			x
06		x	x
07	x		
08	x		x
09			x
10			x
11			
12			x
13			
14			
15		x	
16			
17			
18	x		x
19	x		
20			
21			x
22			x
23			
24	x		
25			x
26	x		
27			x

A) sem furo → sem exceções → sem buraco → sem ruptura → sem fissão → sem restrições → sem interrupção.

B) pode ser observada → analisada → pode ser vista pelos → limites laterais.

C) o estudo do(s) limite(s) indica a continuidade → nos permite saber até onde a função é contínua.

Análise do Gibi (28/06/99)

Ao propor o gibi, a idéia era de que os alunos estabelecessem as relações existentes entre os três principais conceitos estudados: derivada, limite e continuidade. E também proporcionar aos alunos um momento diferenciado de aprendizagem, um momento em que eles pudessem colocar a sua criatividade em evidência.

Pedimos que cada grupo desse um título ao trabalho e buscar-se estabelecer as relações principais estudados até aquele dia.

Dos 11 grupos que realizaram o trabalho (alguns em trios, outros em duplas), pudemos perceber que:

Tabela 4 – Os gibis - síntese

2 grupos fizeram um trabalho que não demonstrou domínio dos conceitos e das relações.	6 alunos	18,18%
3 grupos apresentaram um trabalho que já demonstrava algumas relações e conceitos.	8 alunos	27,27%
6 grupos conseguiram realizar um trabalho que atingiu os objetivos propostos.	17 alunos	54,5%

A seguir, apresentamos uma análise dos trabalhos grupo a grupo, destacando os aspectos mais importantes observados.

Comentário geral sobre alguns dos gibis produzidos

Gibi 05: Limite, Derivada, Continuidade conforme os Teletubies

Ao olhar o trabalho desenvolvido por este grupo percebemos primeiramente que eles utilizaram-se de um programa infantil bastante conhecido (Os teletubies) e fazem uma crítica a ele. Em um segundo momento o grupo faz referência a Kosovo, outra relação com coisas de que estávamos tendo notícias (a guerra).

Este grupo explica o que vem a ser uma função contínua, utilizando-se dos aspectos gráficos, ressalta a importância do limite para determinarmos a continuidade e a derivabilidade de uma função (de forma superficial). Destaca que a derivada depende da continuidade. No último quadrinho , fecha a estória com um personagem que não soube identificar.

Graficamente, eles fizeram caricaturas dos personagens do programa infantil.

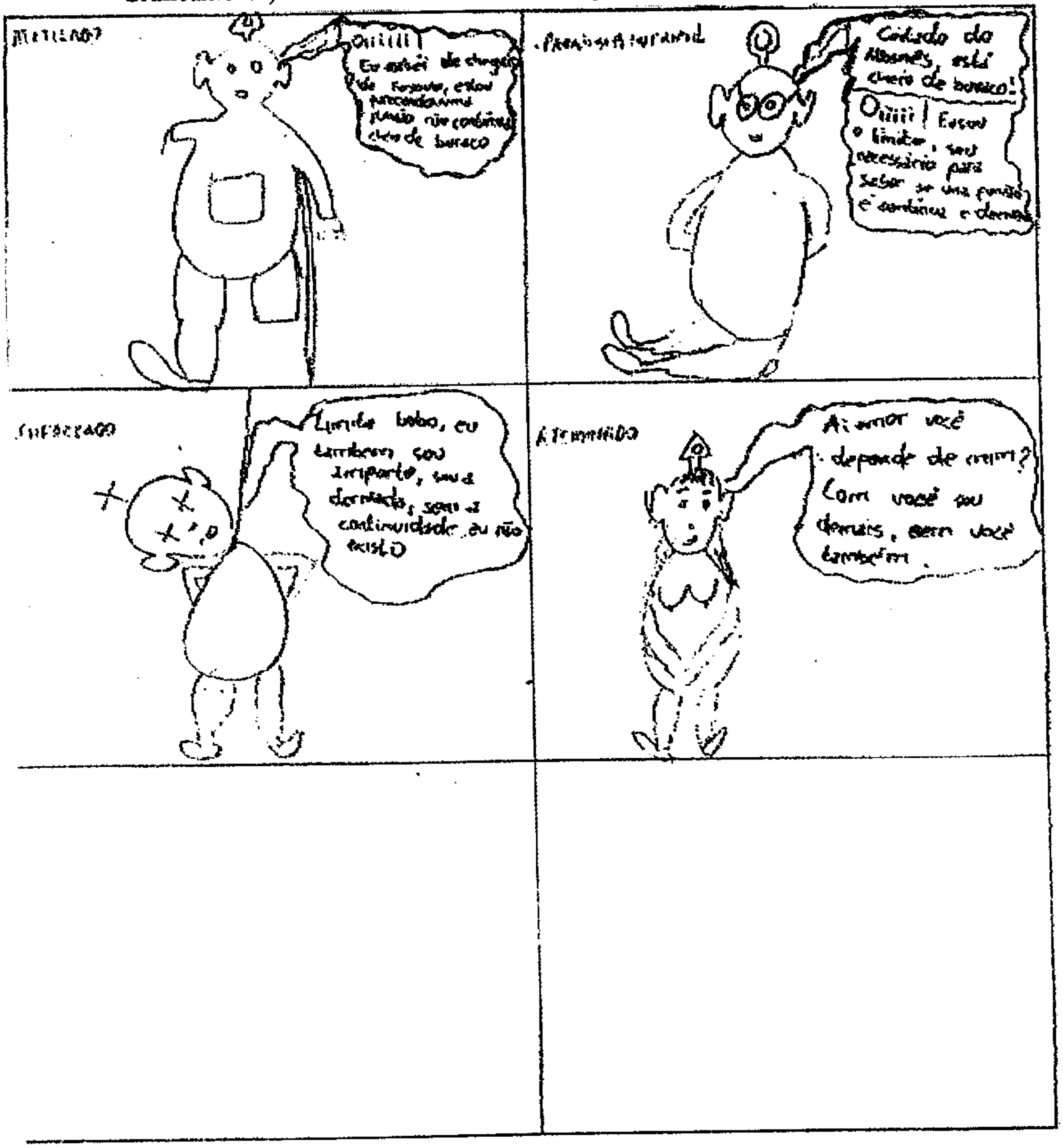


Figura 4.1

Gibi 07: Mulher derivada, Super Limite e Capitão Continuidade em: Aventuras de uma função

O grupo foi bastante criativo na parte dos desenhos. Os alunos fizeram uma introdução similar a uma encontrada no desenho dos Super Amigos. Em termos matemáticos este grupo não demonstrou nenhuma relação entre os conceitos. Eles criaram personagens e uma estória que não atingiu os objetivos desta atividade. Uma das poucas afirmações matemáticas não estava totalmente correta: " uma função contínua tem derivada".

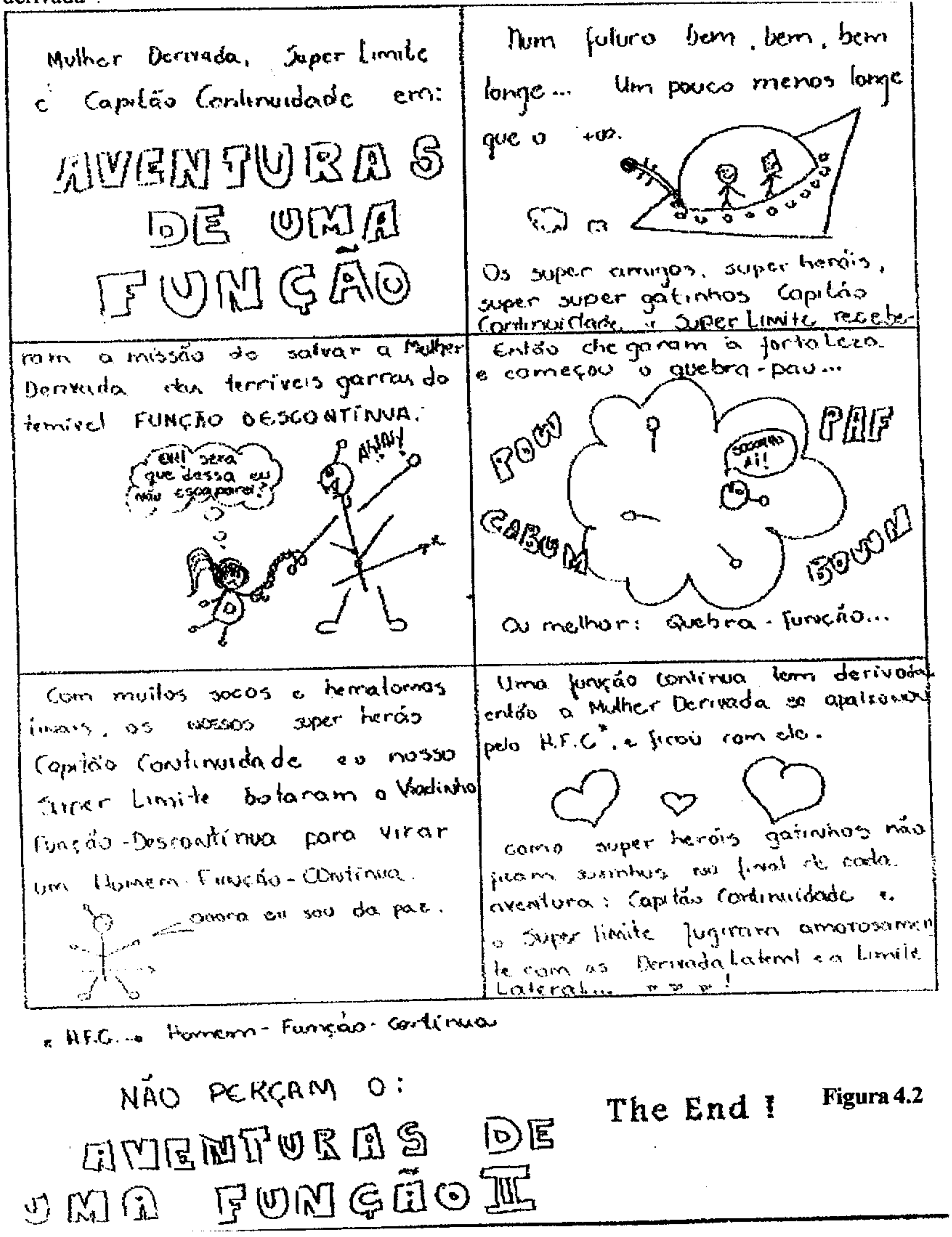
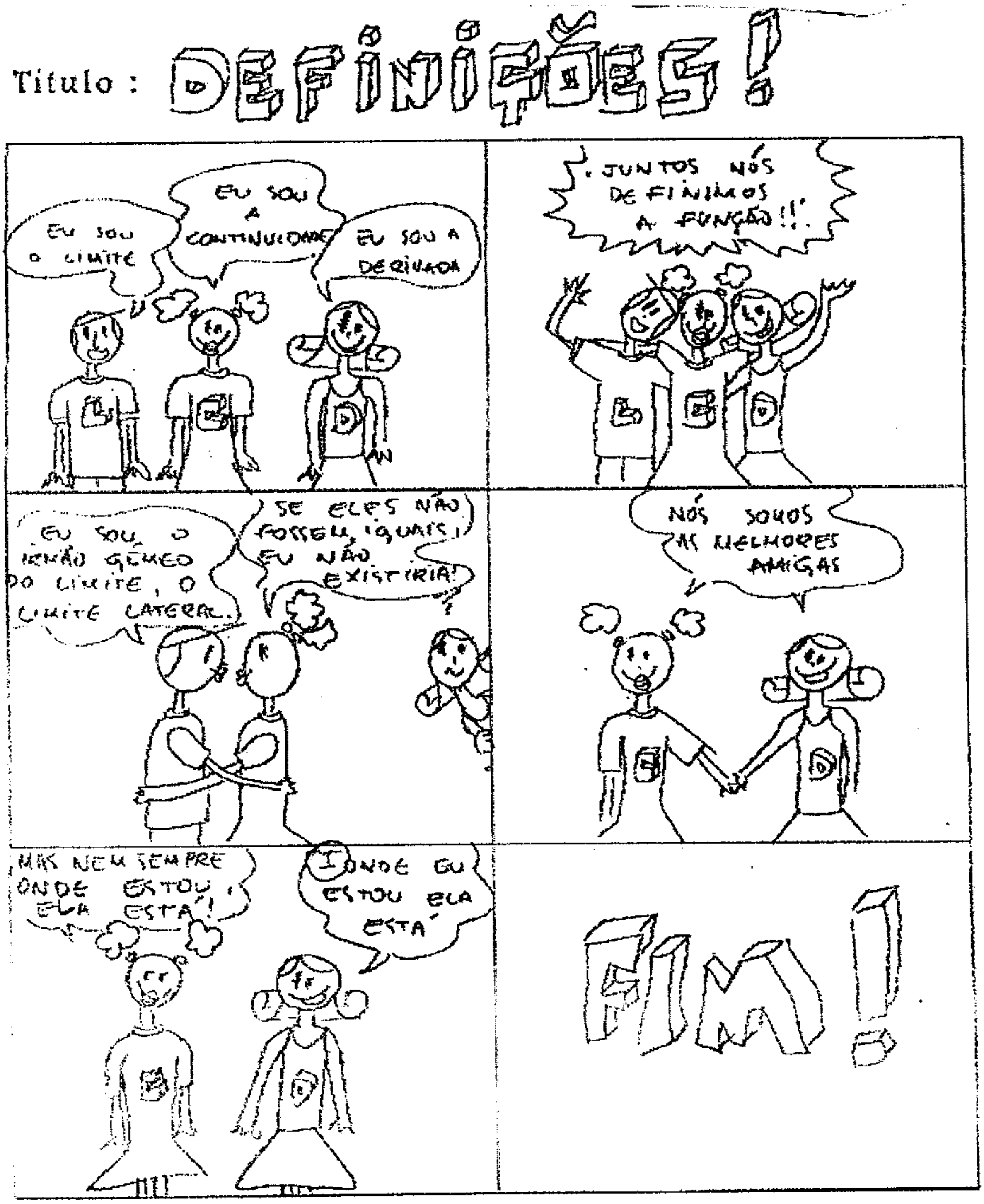


Figura 4.2

Gibi 10: Definições

Este grupo conseguiu estabelecer as relações principais entre os conceitos estudados, tendo uma compreensão de que o estudo foi feito para melhor evidenciar as funções. Fazendo uma paródia de uma propaganda (DDD) este grupo levantou aspectos principais das relações. O aspecto gráfico foi excelente.



The End !

Figura 4.3

Análise da questão teórica dada na segunda avaliação formal – relação entre os conceitos – dia 12/08/99

Ao propor questões teóricas nas avaliações, buscamos perceber as relações entre os conceitos, bem como a compreensão dos mesmos pelos alunos. É claro que não estamos de maneira alguma desprezando os cálculos e a aplicação direta destes conceitos, mas tentando fazer com que o aluno possa estar seguro nos cálculos tendo consciência do que está realizando trabalhando assim para a superação da mecanização que muitas vezes acontece.

Observando as respostas apresentadas pelos alunos (30 no total), percebemos uma boa desenvoltura ao escreverem sobre os conceitos. 21 alunos (70%) relacionaram os limites laterais com a continuidade, o que representa uma maior compreensão, à medida que não se leva em consideração apenas o aspecto gráfico.

"Para a função ser contínua, não deve haver bicos, os limites laterais tem que ser iguais, finitos e definido; por essa regra descobrimos se a função é derivável ou não, sabendo que toda função derivável é contínua; e graficamente descobrimos os limites laterais da função provamos se a função é contínua e derivável"(aluno 04).

"Para acharmos o limite é necessário os limites laterais, e são esses limites laterais que determinam se ela é contínua ou não, para ser contínua é preciso dentre outras coisas que os limites laterais sejam iguais e finitos logo se os limites são finitos e iguais ela é contínua, e logo toda derivada é contínua" (aluno 23).

É importante ressaltar que durante a correção desta atividade, ficamos com receio de que os alunos tivessem se esquecido das outras condições para podermos afirmar se uma função é contínua ou não; durante a aula seguinte fizemos uma sondagem com relação a isso, e a nossa maior surpresa foi a justificativa que um bom número de alunos apresentou. Tivemos a impressão de que o grupo como um todo, discutiu e chegou a este "consenso".

Questionamos: - gente, quais são as condições para que uma função seja contínua?

E a resposta foi:

- Professora, a gente sabe que existe aquelas três condições: - estar definida no ponto, existir o limite, etc. Mas, o principal, são os limites laterais, primeiro olhamos eles, se eles não estiverem ok, a gente não precisa nem perder tempo olhando as outras condições.

Percebi que os alunos estavam buscando seus próprios caminhos. Nós , em nossas visões matemáticas mais formalizadas, muitas vezes ainda ensinamos seguindo um mesmo parâmetro e o aluno, principalmente de outras áreas, está em busca de maior praticidade. Os alunos notaram que o conceito dos limites laterais era o principal para o entendimento de limite e continuidade e se utilizaram disso nas suas justificativas.

Na parte de derivabilidade podemos perceber que as relações estabelecidas deram ênfase à continuidade da função como requisito, alguns também ressaltaram aspectos algébricos. O aluno 09 foi um dos mais complexos em sua resposta, pois se utilizou de vários conceitos estudados para explicar outros.

"Através do limite você consegue delimitar a função, sabendo-se os limites laterais de uma função em um determinado ponto, você pode caracterizar a função como contínua ou não. Ela só será contínua se os limites laterais forem número finito e iguais. Não é bem o limite que caracteriza uma função como derivável e sim as derivadas laterais do ponto escolhido que também devem ser iguais e finitos. O mais importante disso tudo é que uma função para ser derivável em um determinado ponto ela necessita ser contínua neste ponto, mas existem funções que são contínuas em determinados pontos mas não são deriváveis nestes pontos, pois o gráfico desta mesma função pode apresentar 'pontas'" (aluno 09).

As explicações dadas a esta questão podem ser vistas no quadro.

Tabela 5 – Explicações fornecidas para "continuidade"

Relacionaram o limite com a continuidade – principalmente com o conceito dos limites laterais:	21 alunos	70%
É através dos limites laterais que podemos observar a continuidade:	8 alunos	26,6%
A continuidade depende dos limites laterais (iguais e finitos):	11 alunos	36,66%
Uma função não contínua em certo ponto não tem limites laterais :	1 aluno	3,3%
Toda função derivável é contínua:	10 alunos	33,3%
Uma função contínua que apresenta bico, ponta – não é derivável	5 alunos	23,33%
Nem toda função contínua é derivável:	7 alunos	23,3%

Ao buscar as idéias acerca deste conceito, obtivemos:

Quadro 4.0

Índex 4.0 – referente à "continuidade"

	A	B	C	D	E	F	G
01	x						
02							
03	x					x	
04	x	x	x		x	x	
05	x		x				
06	x		x		x		
07							
08	x		x		x	x	
09	x		x		x	x	x
10			x				
11	x	x					
12	x			x			
13	x	x					
14	x		x		x		x
15	x	x			x		x
16	x	x			x		x
17	x	x					
18							
19							
20							
21	x		x				
22	x						
23	x		x		x		
24	x		x				
25	x	x			x		
26							
27	x	x					
28	x		x			x	
29							x
30					x		
31							
32							

A) Relacionaram o limite com a continuidade – principalmente com o conceito dos limites laterais: 01,03,04,05,06,08,09,11,12,13,14,15,16,17,21,22,23,24,25,27,28. (21 alunos).

B) É através dos limites laterais que podemos observar a continuidade: 04,11,13,15,16,17,25,27. (8 alunos)

C) A continuidade depende dos limites laterais (iguais e finitos): 04,05,06,08,09,10,14,21,23,24,28. (11 alunos).

D) Uma função não contínua em certo ponto não tem limites laterais :12

E) Toda função derivável é contínua: 04,06,08,09,14,15,16,23,25,30. (10 alunos)

F) Uma função contínua que apresenta bico, ponta – não é derivável: 03,04,08,09,28. (5 alunos)

G) Nem toda função contínua é derivável: 09,14,15,16,29. (7 alunos)

Com relação à derivabilidade, pudemos perceber que as explicações foram:

Tabela 5.1 – Explicações fornecidas para "derivabilidade"

As derivadas laterais têm que ser iguais	6 alunos	20%
Os limites laterais têm que ser iguais e finitos	3 alunos	10%
Não pode assumir ponta, bico ou rombo	4 alunos	13,3%
Tem que ser contínua	5 alunos	16,6%
Descobrimos através dos limites laterais	2 alunos	6,6%

O índex obtido foi:

Quadro 4.1

Índex 4.1– referente à "derivabilidade"

	A	B	C	D	E
01	x				
02		x			
03			x		
04		x	x		
05	x				
06				x	
07					
08			x	x	
09	x			x	
10	x				
11					x
12				x	
13					
14	x				
15					
16					x
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24		x			
25	x				
26					
27					
28			x	x	
29					
30					
31					
32					

A) As derivadas laterais têm que ser iguais: 01,05,09,10,14,25. (6 alunos)
B) Os limites laterais têm que ser iguais e finitos: 02,04,24. (3 alunos)
C) Não pode assumir ponta, bico ou rombo:03,04,08,28. (4 alunos)
D) Tem que ser contínua:06,08,09,12,28. (5 alunos)
E) Descobrimos através dos limites laterais: 11,16 (2 alunos)

Análise do estudo dirigido individual – aplicações da derivada – taxa de variação – dia 15/09/99

Este estudo teve como objetivo principal fazer com que o aluno, ao estudar problemas variados, pudesse perceber mais significativamente o conceito da derivada, bem como retomar a idéia da variação. Participaram desta atividade 31 alunos.

A maior parte da turma afirmou ter compreendido as resoluções. Como os problemas apresentados eram variados, era de se esperar que houvesse alunos que entendessem mais uns do que outros. Dos seis problemas escolhidos, havia os que se relacionavam a custo total e marginal, volume, área, etc.

Com relação à questão: Você conseguiu entender os procedimentos utilizados nas resoluções?

Obtivemos as seguintes respostas:

Total de alunos : 31 (?% do total da turma)

Tabela 6 – Com relação à compreensão das resoluções dos problemas apresentados no estudo

Sim +	17	54,8%
Não -	6	19,3%
Ambivalente ±	7	22,6%

Neste sentido, Vigostki (1998) ressalta a dificuldade que é encontrada no momento em que uma informação passa de um nível mais conceitual para a sua aplicação. Esta dificuldade já era esperada e podemos constatar isso nas respostas apresentadas pelos alunos (32,2%). Mas, de uma maneira geral, através das redações percebemos uma boa compreensão, sendo que os alunos que disseram não ter entendido puderam realizar um "insight" muito significativo; percebemos neles uma boa consciência do que não sabem e o que lhes causa dificuldade.

O objetivo da quarta questão foi o de levantar as dúvidas da turma com relação aos exercícios apresentados. Perguntamos: Você encontrou dificuldade em entendê-los ? (com relação aos problemas) Que dificuldades?

"Sim. Minha dificuldade começa com a palavra "cálculo", nunca fui muito boa nesta área" (aluno 11).

E as respostas foram:

Tabela 6.1 – Dificuldades apresentadas com relação aos problemas dados no estudo

Sim	17 alunos	54,8%
Não	4 alunos	12,9%
Um pouco – em alguns exemplos	6 alunos	19,35%
Não responderam	4 alunos	12,90%

Ao buscar as justificativas dadas, por aproximação dos sentidos, obtivemos:

Tabela 6.2 – Justificativas apresentadas à "não-compreensão" das resoluções dos problemas dados no estudo

Parecem grego – minha percepção em relação ao português é pouca – a linguagem complexa – nomes desconhecidos	:3 alunos
Saber o que os pontos de mínimo e máximo oferecem – interpretar o que os pontos críticos oferecem – em usar a derivada – aplicar a derivada no problema – a mistura de derivadas – o porquê de um termo ser escrito em função da derivada de outro	: 6 alunos
Não perceber as relações apresentadas – em entender certos procedimentos – as fórmulas usadas – a maneira como foram montados os resultados – as relações entre as equações a serem derivadas	: 5 alunos
De onde saíram certas coisas – retiradas dos dados – analisar os dados – interpretação do problema – nas resoluções – a explicação do problema	: 7 alunos
Nos cálculos – insegurança com relação aos cálculos	: 3 alunos
Outras dificuldades tais como: utilização do Pi, aluno que se considera ruim em cálculo, dificuldades em alguns problemas específicos, não estar entendendo o conteúdo, por ter perdido aula	: 5 alunos

Outro aspecto que podemos ressaltar ao analisar esta atividade é o de que o conceito de derivada (taxa de variação) foi bem compreendido pois, da turma como um todo, apenas 3 alunos não conseguiram explicitar o que haviam entendido. Grande parte retoma ao conceito e outros se pautaram pela aplicação. O interessante é perceber que, mesmo aqueles alunos que não tiveram uma compreensão boa das resoluções dos exemplos apresentados, conseguiram demonstrar entendimento com relação à taxa de variação.

Ao pedirmos: Fale sobre a taxa de variação – o que você entendeu?, buscamos analisar se as respostas foram pautadas no conceito ou na aplicação da derivada. Alguns alunos discorreram sobre os dois aspectos.

Total : 29 (85,3% da turma)

Tabela 6.3 – Com relação à definição apresentada para "taxa de variação"

Conceito	19	65, 5%
Aplicação	6	20, 7%
Conceito e aplicação	2	6, 7%
Sem explicitar uma coisa ou outra	3	10,3%
Não responderam	1	3%

Se levarmos em consideração que este é um dos tópicos que apresentam maiores dificuldades no ensino – aprendizado, justamente pelo fato de os alunos não perceberem a taxa de variação como a própria derivada, notamos uma boa interpretação da taxa; eles falaram com grande desenvoltura sobre um conceito que normalmente não é facilmente apreendido. Alunos que demonstraram compreensão do conceito sem terem entendido (segundo afirmações deles) os exemplos: 01,18,16,19. Demonstraram alguma compreensão, sem terem entendido os procedimentos dos exemplos: 26,04,24,29.

"Eu acho que na minha cabeça eu sei mais ou menos como é essa tal de taxa de variação, mas não consigo expor. Seria a variação entre duas grandezas. Tipo assim uma coisa cresce ou diminui em relação a outra" (aluno 01).

" Taxa de variação ou derivada serve entre aspas para medir a velocidade com cresce uma função - essa é a idéia principal mas tenho dúvida pois no começo da folha sobre taxa de variação fala que a derivada serve para medir a "rapidez" entre aspas, que esse termo não é muito correto, não entendi muito bem porquê"(aluno 19).

Alguns alunos não demonstraram muita segurança ao escrever sobre o conceito: 20,12.

"Acho que é a variação do volume, dinheiro (prejuízo ou lucro) etc, de acordo como tempo, etc" (aluno 12).

De uma maneira geral, as maiores dificuldades encontradas pelos alunos foram:

1. A interpretação do problema, o que fazer para retirar os dados e suas manipulações.

2. Interpretar a derivada na situação problema, ou seja, como utilizar a teoria na situação prática.

Na última questão buscamos descobrir quais seriam as dúvidas mais específicas, mais ligadas aos conteúdos trabalhados (as aplicações da derivada) . Perguntamos: No seu ponto de vista, qual é a maior dificuldade em se resolver um problema? Você se sente inseguro com relação aos cálculos dos pontos críticos, trabalhar regiões de crescimento ou decrescimento de funções?

E as justificativas apresentadas foram:

Tabela 6.4 – Dificuldades apresentadas na resolução de problemas que envolvem a derivada

Interpretar o problema – o português – ver o que está nas entrelinhas	10 alunos	32,25%
Saber a utilidade em saber os pontos críticos – relacionar o cálculo diretamente com o problema – identificar a teoria no gráfico – aplicar a teoria no problema – não saber usar o conteúdo aplicado – saber o que derivar e quando derivar – não saber o conteúdo – as relações	8 alunos	25,80%
Na montagem da equação para a resolução – montar a função que represente a situação – a montagem da estrutura da derivada – mexer com um monte de variáveis	3 alunos	9,67%
O que fazer para achar a resposta - em resolver o problema	2 alunos	6,45%
Matemática básica – as fórmulas do 2º grau	2 alunos	6,45%
Alguns alunos ressaltaram o fato de a dificuldade vir do problema – da aplicação da teoria em um problema	3 alunos	9,67%
Alguns alunos ressaltaram o fato de se sentirem seguros com relação a estes conteúdos fora de um problema, tendo inclusive chamado a atenção para o fato de saberem resolver outros tipos de exercício que envolvam esta teoria	9 alunos	29,03%

Análise do estudo realizado no laboratório de informática – aplicações da derivada – dia 17/09/99

Este estudo no laboratório objetivou dar aos alunos uma maior compreensão da aplicação da derivada, principalmente na interpretação de gráficos variados, bem como averiguar o aprendizado do aluno e sua desenvoltura ao lidar com estes conceitos.

Os alunos não encontraram dificuldades em determinar as regiões de crescimento e decrescimento (57,1%), alguns ressaltaram o fato de sentirem dificuldades com funções que precisaram ser manipuladas algebricamente para as definições do ponto crítico; muitas vezes o aluno não encontra dificuldades maiores do que a esperada ao trabalharmos conteúdos do 3° grau, mas quando surge a necessidade de se retomar a conteúdos de séries anteriores percebemos que é como se eles nunca os tivessem visto. Nesta aula tive que gastar muito tempo explicando divisão de polinômios para vários grupos.

"Sim, principalmente na letra c que exigia operações matemáticas um pouco mais complexas (divisão de polinômios), pois tivemos dificuldade com a matéria básica do 2° grau" (G1).

Ao perguntarmos: vocês encontraram dificuldades em determinar as regiões de crescimento e decrescimento nos primeiros exercícios? Quais?

Obtivemos:

Total de duplas : 14 - (82, 3%)

Tabela 7 – Com relação a ter ou não dificuldade em determinar regiões de crescimento e decrescimento de uma função

Sim	14, 3%	- (2 duplas)
Não	57, 1%	+ (8 duplas)
Ambivalente	7,1%	± (1 dupla)
Não responderam	21,4%	3 duplas

A utilização do limite na construção gráfica foi bastante significativa (71,4%), o que de certa forma nos surpreendeu. O estudo do limite havia sido compreendido pelos alunos e eles souberam utilizá-lo sem maiores problemas na determinação dos gráficos.

"Sim. Ajudaram a achar os pontos críticos e consequentemente os pontos de mínimo e máximo." (G7)

"Não, pois nós estudamos o sinal da derivada ao invés de calcular os limites."(G6)

Com relação à questão: os limites auxiliaram na hora de esboçar os gráficos?

Obtivemos:

Tabela 7.1 – Com relação à utilização dos limites na construção dos gráficos das funções

Sim	71,4%	+ (10 duplas)
Não	14,3%	- (2 duplas)
Ambivalente	7,1%	± (1 dupla)
Não responderam	7,1%	1 dupla

Ao serem questionados com relação à determinação de pontos críticos e aplicação dos testes das derivadas, percebemos que 64,3% da turma afirmaram sentirem-se seguros com relação a este conteúdo.

"Sim. Se o ponto é de mínimo local, concluímos que a concavidade é voltada para cima, correspondendo a lógica. A inversa também é verdadeira"(G2).

"Ponto de máximo e mínimo é os pontos onde a 1ª derivada é nula. O ponto de inflexão é aquele onde muda a concavidade da função"(G6).

Na terceira questão do estudo, perguntamos: vocês sabem diferenciar os pontos de máximo e mínimos locais, bem como os pontos de inflexão ? Sentem –se seguros na utilização, por exemplo, do teorema da segunda derivada?

Tabela 7.2 – Com relação à diferenciação entre pontos críticos e de inflexão

Sim	64,3%	+ (9 duplas)
Não	7,1%	- (1 dupla)
Ambivalente	14,3%	± (2 duplas)
Não responderam	14,3%	(2 duplas)

ESTUDO DE CASOS

A escolha dos alunos para a realização desta análise teve como critério a grande diferenciação que eles demonstraram com relação à turma como um todo. Eles caracterizaram os extremos na nossa amostragem. Segundo Goode e Hatt (1968), o caso se destaca por se constituir numa unidade dentro de um sistema mais amplo (Lüdke, André, p.17,1988).

Durante todo o processo os alunos 06 e 20 destoaram da turma, suas diferenças com relação aos seus colegas foram tão perceptíveis que a escolha, destes dois, seria inevitável; es tes foram casos singulares encontrados.

O aluno 06

Estar motivado é o primeiro passo para que ocorra uma aprendizagem significativa, e esta motivação deve partir, primeira e necessariamente, do aluno. Seria o "querer aprender".

Podíamos perceber facilmente esta motivação neste aluno. Desde o início ele participou ativamente do processo, o seu gosto pela matemática era visível.

A todas as atividades propostas ele respondeu muito bem.

O que pude perceber com relação a suas características pessoais foi:

- Assiduidade – este aluno não chegou a faltar a duas aulas durante todo o estudo.
- Interesse – sempre participou das aulas perguntando, refletindo, concluindo.
- Excelente participação – tanto individual quanto em grupo.
- Desenvoltura matemática – não demonstrava grandes dúvidas com relação a conteúdos matemáticos básicos.
- Ótimo relacionamento pessoal – mesmo sendo um dos que aprendiam com maior facilidade, nunca ofereceu resistência para trabalhar com os colegas.

Em todas as atividades propostas este aluno obteve resultados satisfatórios.

Durante a análise da turma como um todo, ele está sempre entre aqueles que conseguiram atingir satisfatoriamente os objetivos propostos. Em seus trabalhos em grupo, nas discussões e em seus trabalhos escritos, podíamos perceber: Compreensão rápida, sínteses relevantes, segurança e facilidade com os cálculos, excelente organização das idéias, boa capacidade de argumentação, criatividade

Aluno 20

Este aluno nunca deixou de freqüentar as aulas, não oferecia resistências ao trabalho em grupo ou individual, mas não se envolvia efetivamente.

O que poderia ter feito ele não alcançar um rendimento satisfatório, não chegando sequer ao mínimo esperado, algumas vezes?

Em nosso ponto de vista, foram vários os fatores.

Estar em sala não significa necessariamente estar participando da aula. Assistir às aulas apenas de "corpo presente" também não faria ninguém evoluir. Ter um bom relacionamento é parte significativa do aprendizado em grupo, desde que haja uma interação intelectual também.

Uma das coisas que mais chamaram nossa atenção, com relação a este aluno, foi sua baixa estima. E isso pode ser estendido a um bom número de alunos. Reverter este quadro é possível, e muitos conseguiram evoluir neste aspecto, percebendo-se como pessoas capazes de fazer analogias, conjecturas, deduções e conclusões corretas !! (Sim, perceberem-se capazes de "descobrir" a matemática foi algo que encantou meus alunos.)

Com o aluno 20 , foram frustradas essas tentativas.

Até mesmo quando ele chegava a ir à nossa sala era apenas para acompanhar algum colega que gostaria de tirar dúvidas. Assistia, mas não participava do estudo.

A falta de uma motivação pessoal para aprender também contribuiu para isso.

Sempre que me aproximava para auxiliá-lo, esclarecer alguma dúvida, ouvia:

- Não professora ! eu sou burro demais em matemática !

Com esse "chavão" ele não dava sequer condições para que pudéssemos refletir juntos sobre o que poderia estar lhe causando maiores dificuldades.

Não que este aluno não tenha evoluído, mas o receio, o medo, a insegurança, a desmotivação foram maiores do que os argumentos que usei para tentar mudar este quadro.

Análise da primeira atividade mediada pela escrita - (Carta - 10/05/99) : taxa, taxa de variação média e taxa de variação no ponto

Aluno 06

"Caro Papai Noel,

Este ano, como prova de que eu prestei atenção nas aulas de matemática, mando – lhe esta carta como prova. Discorrerei, a seguir, acerca de taxas de variação.

Primeiramente, vamos falar de taxa de variação, quando esta é constante. Quando ela é constante, ela mostra a variação de uma grandeza qualquer por unidade de uma outra grandeza, onde a variação de uma implica numa variação diretamente proporcional da outra. Darei um exemplo. O senhor por ocasião do Natal gasta um balde de tinta por dia para pintar os brinquedos, e esse valor 1 balde/ dia relaciona 2 grandezas, a tinta por tempo.

Falemos agora de taxa de variação média. Ela existe quando uma coisa não varia uniformemente em relação à outra, dizemos então, que tem uma taxa média entre dois pontos, ou seja, quando uma grandeza varia entre dois valores, a outra também varia obedecendo uma taxa média, ou seja, não constante, não seguindo um valor fixo. Vamos supor, que no primeiro dia de serviço o senhor gasta 1 balde de tinta por dia, no 2º dia , 3 baldes, no 3º , 5 baldes, vemos que a quantidade de tinta não varia *uniformemente com a variação dos dias, então, dizemos que o senhor gastou em média, em 3 dias, 3 baldes por dia.*

Para finalizar, vou falar de taxa de variação no ponto, a fabulosa derivada. Dizendo grosseiramente, a derivada vai medir com que velocidade uma grandeza vai variar no ponto, entendeu. Não? É o seguinte. A derivada vai medir a inclinação de uma curva. Ainda não? A taxa de variação de um ponto é o limite da inclinação quando a taxa de incremento tende a zero. Agora entendeu? Não! Então esquece, vai encher o "saco" de outro e não pense a respeito de matemática. Brincadeira. É o seguinte: a taxa de variação do ponto vai indicar a velocidade com que uma coisa cresce (ou decresce) num determinado ponto (num determinado valor). Agora sim! O senhor é inteligente pra burro ! Sabia que ia entender.

Então, fui."

Análise

O aluno estruturou sua redação no que foi pedido: uma explicação sobre as taxas estudadas em aulas anteriores.

Em cada parágrafo ele forneceu primeiramente o conceito e, logo em seguida, um exemplo que o ilustrasse e o "clarificasse".

No último parágrafo o aluno nos dá três conceitos diferenciados de taxa de variação no ponto.

Podemos perceber sua total desenvoltura ao escrever sobre este assunto, o que demonstra grande compreensão do mesmo, capacidade de síntese, exemplificações.

Aluno 20

*"Prezado amigo *[5],*

Estou lhe escrevendo esta carta para tentar tirar suas dúvidas sobre alguns tópicos que tentamos aprender nas aulas de cálculo. Vou começar pela taxa de variação nada mais é a variação de y por unidades de x, ou seja, a medida que x aumenta y também aumenta ou a medida que x diminui y também diminui.

Já a taxa média corresponde a variação de y por unidade de x *em média*, *entre* x_1 e x_2

A taxa no ponto (derivada) serve para caracterizar a rapidez com que uma função $y = f(x)$ *varia com um ponto* x_0. *A idéia fundamental de tal noção é de que uma curva pode ser aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto."*

Análise

No primeiro parágrafo o aluno escreve "tentar" demonstrando insegurança com relação ao assunto que vai escrever. Ele começa falando sobre uma "taxa de variação" sem explicitar qual seria (média, no ponto). Pelo parágrafo seguinte percebemos que está dissertando sobre o conceito mais geral de taxa de variação, pois neste parágrafo ele destaca a taxa de variação média. Demonstra , no processo da escrita, pouca elaboração que pode ser oriunda também da baixa compreensão destes conceitos.

O último parágrafo contém a definição de derivada, mas é perceptível que houve uma cópia do material à ele fornecido em aulas anteriores para estudo.

[5] O " * " está sendo utilizado para preservar o nome do aluno.

Carta 16/06/1999 – a compreensão sobre o estudo de limite, limites laterais, limites infinitos, limites no infinito, formas indeterminadas, funções contínuas

<u>Aluno 06</u>

Entendi que limite de uma função vai nos dizer para onde a mesma vai tender, para que valor ela vai aproximar quando nós analisamos para uma determinada abcissa. Quando vamos atribuindo valores a x cada vez mais próximos de um valor, vamos observar para onde a função está caminhando, e esse valor é o limite da função naquele ponto. Já os limites laterais são aqueles que nós encontramos ao fazermos a aproximação de x por valores menores que x (pela esquerda) ou pela direita (valores maiores que x). Esses limites são importantes para determinar o limite da função, que só existe quando os limites laterais forem iguais e finitos. Caso nós façamos a análise dos limites laterais de uma função com x tendendo a um único valor, e esses limites forem diferentes, concluiremos que a função sofreu uma ruptura naquele ponto, sua continuidade é interrompida no ponto considerado. Formas indeterminadas são aquelas que nós não podemos encontrar um valor conhecido, uma representação no plano cartesiano, como 1/0. Limites infinitos são aqueles que nós, ao atribuirmos valores para x, ele torna-se muito grande, dizemos então que ele é infinito. Já limite no infinito, é aquele que nós, com valores "infinitos" de x, o encontramos, porém, ele se encontra no "infinito" da reta (eixo) 0x

<u>Análise</u>

O aluno começa utilizando-se de aspectos gráficos para explicar o limite. Em um segundo momento discorre sobre os limites laterais deixando clara a importância deste estudo para melhor entendimento do limite fornecendo-nos a condição de existência do limite da função em um determinado ponto.

Para falar da continuidade ele novamente retoma ao aspecto gráfico e depois o algébrico, quando explica que os limites laterais diferentes indicam não-continuidade no ponto considerado.

Escreve, em seguida, sua compreensão de formas indeterminadas.

Ao falar de limites infinitos e limites no infinito, percebemos que os conceitos ainda não estão muito claros para este aluno. Já houve uma primeira elaboração, mas com relação ao que ele escreveu sobre os conteúdos anteriores, uma elaboração menor.

Aluno 20

"Querida professora Bethânia,

Ao receber o trabalho que entreguei a você na aula anterior pude perceber que a cada aula que assisto fico cada vez mais confuso, mas estou fazendo o máximo para superar essas dificuldades, por isso tentei elaborar alguns conceito de limites, limites laterais, continuidade, formas indeterminadas, limites infinitos e limites no infinito.

Limite de uma função é o valor máximo que uma função pode atingir num determinado ponto.

Limites laterais são os valores próximos de x tanto da direita quanto da esquerda.

Formas indeterminadas são formas que não são aceitas como solução de um problema de limite. Ex : $\infty - \infty$, 0/0, ∞/∞.

Limites infinitos é quando o resultado tende ao infinito.

Limite no infinito é quando a variável tende ao infinito."

<u>Análise</u>

O aluno tem consciência de que não está dominando os conceitos principais; mais uma vez podemos perceber isso no uso da palavra "tentar" que reflete a sua insegurança.

Em seguida escreve frases curtas sobre cada conceito sem fazer nenhuma relação.

Fala dos limites laterais, mas não ressalta a sua importância dentro do estudo de limite.

Sobre os outros conceitos discorre de forma sucinta.

AVALIAÇÃO FORMAL – EXEMPLOS

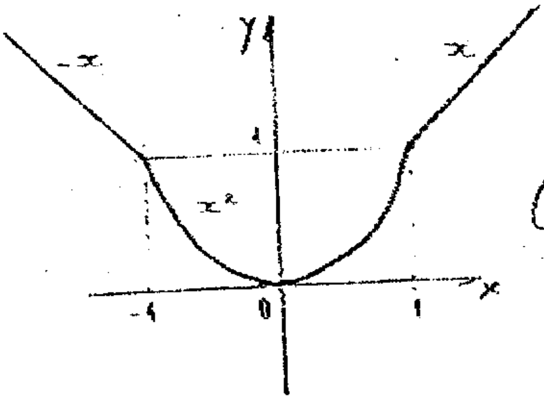
ALUNO 06

2º PROVA DE MATEMÁTICA.

10,0 Parabéns!!

1)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se \quad x \leq -1 \\ x^2, & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x, & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$



1.1) VERIFICANDO A CONTINUIDADE:

f(x) é contínua no ponto (1,1) $\Longleftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) =$ valor fin

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

$\therefore$ A função é contínua em $x = 1$

1.1) VERIFICANDO SUA DERIVABILIDADE:

f(x) é derivável em $x=1 \Longleftrightarrow$ as derivadas laterais forem iguais.

derivada esquerda: $f'_-(x) = 2x = 2.1 = 2$

derivada direita: $f'_+(x) = 1 = 1 = 1$

CONCLUÍMOS QUE AS DERIVADAS LATERAIS NÃO SÃO IGUAIS, PORTANTO A FUNÇÃO f(x) NÃO É DERIVÁVEL NO PONTO $x = 1$.

Figura 4.4

1) Determinação de Limites

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1} = ?$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)}{x^4\left(3 + \frac{7}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1 - \overbrace{\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)}^{\text{Tende a zero } x \to -\infty}\right)}{\left(3 + \underbrace{\left(\frac{7}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}_{\text{Tende a zero } x \to -\infty}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1} = ?$

$$\lim_{x \to -1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x + 1} = \lim_{x \to -1/3} \frac{(3x+1)(3x-1)}{(3x+1)} = \lim_{x \to -1/3} 3x - 1 = \boxed{-2}$$

c) $\lim\limits_{x \to 1} 3 = 3$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 - 4x + 5) = ?$

tende a zero c/ $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(-1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3(-1)^{(*)} = -\infty$$

$(*)$ $x^3 \to +\infty$ com $x \to +\infty$

$-1(+\infty) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{5x} = ?$

1) $x \to 0^-$: $\lim\limits_{x \to 0^-} 1/5x = -\infty$

2) $x \to 0^+$: $\lim\limits_{x \to 0^+} 1/5x = +\infty$

3) $$G(x) = \begin{cases} x+9 , & se \quad x > 2 \\ x^3 , & se \quad x \leq 2 \end{cases}$$

1) Provando que a função $G(x)$ é contínua no ponto $x = 2$

$G(x)$ é contínua em $x = 2 \iff$ limites laterais forem iguais

(DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO) $\boxed{\lim_{x \to 2^-} G(x) = \lim_{x \to 2^+} G(x) =}$ VALOR FINITO

$\Downarrow$

$\lim_{x \to 2^-} G(x) = \lim_{x \to 2^-} x^3 = 8$

$\lim_{x \to 2^+} G(x) = \lim_{x \to 2^+} x+9 = 11$

$8 = 11$ (Absurdo)

$\therefore$ A Função $G(x)$ não é contínua em $x = 2$, e se não é contínua, não é derivável neme mesmo ponto de ABSCISSA 2.

4) Eu diria que o primeiro amigo está correto, pois é através do limite é que eu vou encontrar, ou melhor, mostrar se a função é contínua num determinado ponto ou não. Utilizando-se do conceito de limites laterais, podemos facilmente mostrar se uma função é contínua ou não, bastando para isso que os limites laterais sejam iguais. Existindo os limites laterais e eles sendo iguais, provamos que ela é contínua, e daí podemos mostrar que ela é derivável nesse mesmo ponto. Conhecendo-se as derivadas laterais e elas sendo iguais, a função é derivável naquele ponto. Sabemos que para uma função ser derivável, obrigatoriamente ela deve ser contínua (EMBORA NEM TODA FUNÇÃO CONTÍNUA SEJA DERIVÁVEL), e a continuidade é reconhecida através de limites, ou seja, este é básico para se determinar tudo, a continuidade e a derivabilidade.

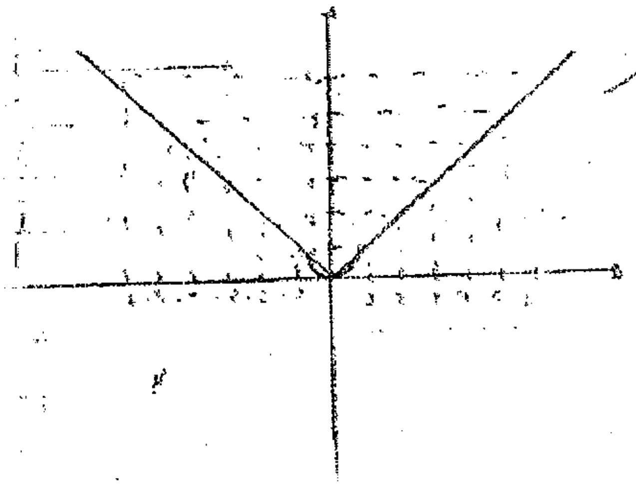
ALUNO 20

1,0 / 8

Prova de Matemática

1.
$$F(x) \begin{cases} -x, \text{ se } x \leq -1 & \text{(I)} \\ x^2, \text{ se } -1 < x < 1 & \text{(II)} \\ x, \text{ se } x \geq 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

retas ??



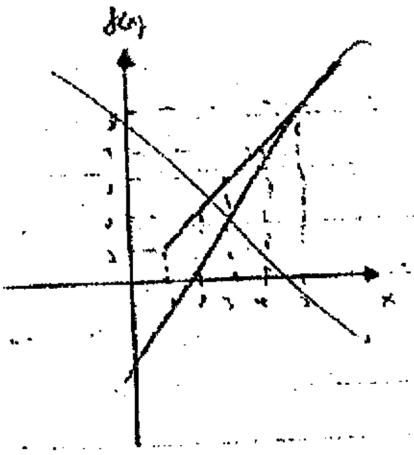
Professora eu não consegui resolver algebricamente o máximo que eu consegui foi construir o gráfico e não sei se está certo

Figura 4.5

$f(x) = x$ si $x \geq 1$

X	Y
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

1.)



② a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$?

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - \lim\limits_{x \to -\infty} 2x + \lim\limits_{x \to -\infty} 3$

b) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x + 1}$?

c.)

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{\cancel{(3x+1)}(3x-1)}{\cancel{3x+1}}$

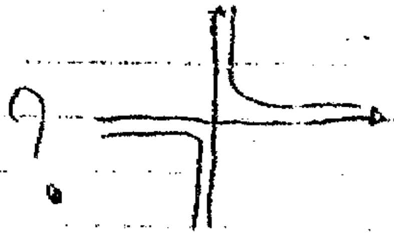
$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} 3x - 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^7)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5 - \lim\limits_{x \to +\infty} 4x + \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \lim\limits_{x \to +\infty} x^7$

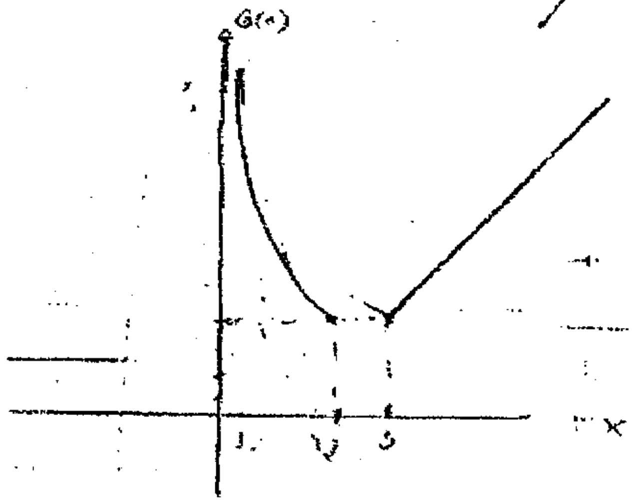
c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{5x} = 1$

?



2) $G(x) = \begin{cases} x+9, & x>2 \quad (I) \\ x^3, & x\le 2 \quad (II) \end{cases}$

1,0



A função não é derivável nem contínua porque há um "buraco" entre o 2 e o 3 não podendo ser nem [illegible] nem aberto

3) Para que o limite exista é preciso que os limite laterais sejam iguais e diferente de zero

Análise da turma como um todo – Finalização

Durante os processos de avaliações formais pudemos constatar alguns aspectos:

Nas questões teóricas destas avaliações que consistiam em marcar verdadeiro ou falso, em um primeiro momento sem justificativa e num segundo com justificativa, pudemos perceber que de uma avaliação para outra houve um aumento de acerto nestas questões. De todo o grupo, 58,8% (20 alunos) demonstraram maior percentual de acerto na questão teórica da segunda avaliação. 11,8% (04 alunos) apresentaram o mesmo patamar de acerto, sendo que este mesmo percentual de alunos errou mais na segunda avaliação.

Com relação à nota final destas avaliações, pudemos constatar:

Tabela 08 – Alunos que apresentaram crescimento na nota

Alunos	Avaliação – 01	Avaliação - 02
Aluno 10	4,2	8,0
Aluno 19	4,0	4,5
Aluno 11	4,7	9,0
Aluno 01	4,5	4,7
Aluno 17	5,9	7,0
Aluno 25	8,0	8,7
Aluno28	8,0	9,0
Aluno 22	5,8	9,5
Aluno 08	8,1	10,0
Aluno 27	5,6	7,0
Aluno 21	4,3	8,2
Aluno 03	5,3	5,5
Aluno 09	7,6	8,0
Aluno 05	6,6	8,2
Aluno 12	6,2	9,5
Aluno 16	6,3	6,5
Aluno *[1]	5,9	6,5
Aluno 13	3,8	4,5

[1] Os alunos que estão representados com um (*) foram os que não deram permissão para a utilização de seus trabalhos, utilizamos somente estas notas.

Tabela 09- Alunos que apresentaram decrescimento na nota

Alunos	**Avaliação – 01**	**Avaliação - 02**
Aluno 07	3,4	2,0
Aluno *	5,0	3,7
Aluno *	5,3	5,0
Aluno 20	4,7	1,0
Aluno 26	7,8	3,5
Aluno 23	6,7	1,5
Aluno 18	5,0	3,7
Aluno 15	5,8	3,5
Aluno 14	7,8	5,5
Aluno 24	6,0	5,0
Aluno 29	10,0	7,5
Aluno 30	6,7	5,5

Manteve a nota nas duas avaliações:

Tabela 10 – Alunos que mantiveram-se no mesmo patamar

Aluno 06	10,0	10,0

É importante ressaltar que existem outros vários fatores a serem considerados ao se falar na evolução da turma como um todo. A análise realizada até aqui teve como objetivo evidenciar progressos que nem sempre estão refletidos nas notas das avaliações.

Ao se lançar a nota, sabemos que ela não abarca todas os elementos que a compuseram. Alguns alunos "mataram" aulas durante o processo, outros não realizaram todas as atividades propostas, enfim, há que se levar em conta outros fatores, tendo-se o cuidado de não se fazer generalizações precipitadas; isto sem falar naqueles alunos que apresentaram uma evolução verdadeiramente significativa, mas que podem não estar entre os que obtiveram nota maior na segunda avaliação.

Existem ainda todos os aspectos qualitativos que não podem ser "mensurados", mas que foram vivenciados e testemunhados ao longo desse processo de pesquisa.

Capítulo IV

Considerações Finais

A turma cresceu muito em vários aspectos, tais como: maior concentração, reflexão e análises que durante o período das aulas, não podem ser "mensuradas", mas estiveram presentes. O trabalho escrito em sala de aula e no laboratório de informática também evoluíram significativamente neste período.

> *"Às 10:08 subimos para o laboratório para que eles estudassem as funções trigonométricas. Desta vez entreguei os roteiros para o estudo e pude perceber que mesmo não pedindo que eles me entregassem ao final da aula, eles participaram muito bem. Eles aprenderam que estão no laboratório para um estudo e sendo este estudo feito em duplas, percebo que isso aumentou o interesse e a participação. O tempo todo que eles ficaram no laboratório foi discutindo o assunto, comparando gráficos, fazendo análises. Não tive problemas com alunos querendo entrar em outros programas" (Diário da pesquisadora – Anexo IX, p.137 – 21/06).*

Os alunos demonstraram resistência em escrever inicialmente, pois eles não eram capazes de entender o porquê de tal metodologia. À medida que foram feitas as redações, eles perceberam suas dificuldades em certos conteúdos, mais uma vez se sentiram angustiados e tivemos que deixar claro o tempo todo que aquela atividade fazia parte de um processo maior, que a atividade era uma atividade como qualquer outra.

Pudemos perceber que alguns alunos tinham receio desta atividade por terem medo de que suas idéias pudessem ser avaliadas de forma que os prejudicassem, mas as dificuldades não foram além das previstas.

Sempre que se propõe uma atividade que envolve a escrita, é necessário que isso se dê em um ambiente de confiança , pois o aluno está se mostrando, deixando explícita a forma como está relacionando os conceitos e ele , em geral, ainda se sente inseguro com relação a isso.

Durante as primeiras atividades propostas, os alunos mostraram-se excitados e intrigados. Percebemos que não eram muito acostumados ao trabalho em grupo direcionado . Eles falavam alto e se dispersavam facilmente.

> *"Existe também uma grande resistência por parte de alguns alunos em realizarem um estudo com esse (estudo dirigido em grupo ou individual). Sempre reclamam, dizem-se incapazes, afirmam que não vão dar conta etc. Um medo de errar tremendo! Medo de não estarem percebendo o que é certo em uma único leitura" (Diário da pesquisadora – Anexo IX, p.137 – 09/06).*

O medo de escrever durante as atividades era latente. Após vários trabalhos que ora eram feitos individualmente, ora em trios ou duplas, os alunos já se concentravam mais conversando em tons mais baixos e aqui podemos ressaltar o que Vygotsky (1986a) afirma sobre a boa comunicação. Segundo este autor, quando nos comunicamos com pessoas que percebem o que está sendo dito com o mesmo sentido, não são necessárias muitas palavras. Perceber o sentido que o outro está dando e comungar dele é , sem dúvida, um exercício de aprendizagem. O trabalho em grupo foi excelente para a discussão, a reflexão, generalizações e conclusões. A turma aprendeu a trabalhar e a aprender em grupo.

Com o objetivo de tentar manter a turma em um bom nível de aprendizado, sem diferenciações muito grandes entre um aluno e outro, algumas vezes, as duplas ou trios eram pré-escolhidas por nós. Sempre colocava alunos em níveis diferenciados de aprendizagem. A turma acolheu bem esta proposta. Outras vezes, nós os deixávamos livres para escolherem os seus parceiros. Mais uma vez utilizávamos da zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky.

Foi interessante perceber a melhoria do aprendizado deles, alunos mais tímidos na participação em sala, sentiam-se mais à vontade nos trabalhos em grupo muitas vezes levantando questionamentos. Um fato interessante e que ilustra bem isso: Em um dos dias em que foi realizado trabalho em trio pré-escolhido, houve um grupo que discutiu muito todas as questões e exercícios propostos. Chegou-se a um ponto da discussão em que um dos integrantes falou:

- Professora, assim não é possível. A senhora me bota pra trabalhar com esses caras..e eles fazem cada pergunta?!?!?! Quando eu penso que sei, ele faz uma pergunta - eu respondo - ele responde de outra maneira e me convence que a resposta dele é que está certa, mas depois que paro e raciocino um pouco mais, vejo que quem estava certo era eu[2]!!.

O trabalho em grupo atingiu nossos objetivos que eram justamente causar estes desajustes", análises e discussões - participação de um no aprendizado do outro, além de contribuir para um bom clima na sala aula. Os estudos dirigidos individuais, em particular, tiveram maior resistência por parte dos alunos.

> *"Eles sempre têm resistência na hora de fazer a leitura, mas com minhas argumentações eles se convenceram e começaram a trabalhar. Tirei dúvidas individualmente. Percebi que os alunos querem aprender tudo e entender tudo muito rápido. Com uma única leitura queriam entender tudo.*
> *À medida que ia percebendo isso, ia fazendo perguntas, mostrando a necessidade de terem que ler mais de uma vez ! Na segunda parte, pude constatar isso de novo! Por terem lido pouco ficaram com dúvidas nas questões. Tive que estar falando o tempo todo sobre "sabermos ler" e ler o tanto de vezes que fosse preciso para entender"(Diário da pesquisadora, Anexo IX, p.137 – 23/06).*

No laboratório de informática o crescimento foi extremamente significativo.

No início, tivemos que estar reforçando os objetivos daquele tipo de aula (um estudo com o auxílio do computador). Os alunos queriam responder as questões lançando todos os gráficos no plano de uma vez, isso causou angústia e medo de errar. Depois que eles perceberam que teriam tempo suficiente para testarem, desenharem os gráficos separadamente e depois em conjunto para fazerem as análises e assim responderem ao roteiro , eles se desenvolveram muito. Nas últimas aulas eles já estavam tão acostumados com este processo que participavam ativamente, vibrando com suas descobertas. Nem precisamos recolher o roteiro, como no início.

Como o ambiente utilizado para o estudo – o Graphmatic – proporcionava a construção de vários gráficos em um mesmo plano, os alunos tiveram a oportunidade de fazer discussões e análises utilizando-se também dos aspectos gráficos visuais.

Na primeira aula, estudo das funções de primeiro grau, os alunos – por não terem o hábito de estudo, construíram os vários gráficos de uma só vez e depois não sabiam responder os questionamentos apresentados.

---

[2] Diário da pesquisadora – Anexo IX, p.137 – 30/06

Nas aulas subseqüentes, as duplas ou trios trabalharam muito bem. Já entendiam que o laboratório era o espaço para um aprendizado ativo, onde eles estariam descobrindo ou redescobrindo certos conteúdos, já que muito daquilo eles haviam estudado nas séries anteriores. Este aspecto da descoberta foi o que mais fascinou os alunos nas aulas no laboratório de informática sendo que isso contribuiu também para a aumentar neles a autoconfiança, os alunos passaram a perceber que eles eram capazes de fazer conclusões certas acerca de vários conteúdos.

A turma se integrou tanto a esta proposta de aula que não tivemos problema algum, eles próprios começaram a reivindicar mais aulas no laboratório afirmando que este tipo de trabalho fazia com que eles aprendessem melhor e de forma mais rápida.

> *"Tive receio em programar esta aula achando que poderia não dá certo, mas minhas expectativas foram superadas.(...) Os alunos se empolgaram muito, houve muitas manifestações positivas com relação ao aprendizado deles próprios"(Diário da pesquisadora – Anexo IX, p.137 – 10/05).*

Nesta mudança de ambiente, é claro que alguns alunos se sobressaem ; mas, o mais importante é dar a oportunidade para aqueles que possuem maior facilidade ao trabalhar com gráficos utilizarem-se também deste recurso na superação de suas dificuldades de aprendizado. É extremamente frutífero quando um aluno que possui uma boa visualização gráfica trabalha com aquele que é mais apto com as manipulações algébricas, é sem dúvida o momento de interação que leva a uma aprendizagem verdadeiramente significativa.

Nos estudos dirigidos pudemos perceber que os alunos se sentiram ansiosos por não compreenderem em uma única leitura o conteúdo apresentado, após perceberem que este material seria usado como parâmetro para a aula posterior eles ficaram mais participativos.

A capacidade de compreensão da turma e sua participação nas aulas expositivas se alterou muito durante o processo. Eles passaram a perguntar mais, a atenção deles melhorou e, o mais importante, como as aulas expositivas eram estruturadas em algo já visto anteriormente o entendimento da turma como um todo ficou muito mais rápido, sendo melhorada também a capacidade deles de fazerem conexões entre os conteúdos.

Matematicamente a turma cresceu , pois vários dos aspectos para um bom desenvolvimento no conteúdo específico foram desenvolvendo-se no decorrer das aulas. Muitos alunos que possuíam dificuldades em matemática básica não sentiram vergonha em perguntar superando assim deficiências que os prejudicariam no conteúdo de terceiro grau. Nos relatos fornecidos pelos alunos (Tabela 6.4, p.70), percebemos que eles ressaltam várias vezes que a dificuldade deles não estaria naquela matéria que eles estavam vendo, mas em desconhecerem certos conteúdos que são utilizados durante o estudo destas matérias, sem nos esquecermos da dificuldade encontrada nas leituras realizadas, de um modo geral.

"Tem algumas coisas que não entendi de onde saiu, na retirada de dados e na interpretação dos problemas"(aluno 04)

Apesar de todas estas dificuldades, muitas das quais já eram esperadas, a turma apresentou uma boa compreensão dos conceitos principais estudados – isso pode ser percebido no gibi (Anexo IV, p. 118) que eles criaram estabelecendo as relações entre limite, derivada e continuidade. A taxa de variação – parte essencial da aplicação do estudo das aplicações da derivada e conteúdo em que os alunos encontram normalmente grandes dificuldades, nas atividades apresentadas pelos alunos percebemos uma boa evolução na compreensão deste conceito que começou a ser estruturado na revisão de funções de 1° grau (Cap. III, p. 37). Na atividade em que foi proposto aos alunos que conceituassem taxa de variação podemos notar isso. Grande parte da turma soube falar deste conceito com um bom grau de desenvoltura.

"Entendi que a taxa de variação diz em que intervalo cresce ou decresce determinada "coisa". Se for variação instantânea, diz o que está acontecendo no lugar em determinado instante." (aluno 08)

"Taxa de variação é o recurso usado para se medir a intensidade com que a função cresce ou decresce."(aluno 15)

"Eu entendi que nós podemos relacionar taxa de variação com tudo o que hoje existe , por exemplo, tratando-se de uma planta podemos observar a taxa de crescimento dela em relação ao tempo."(aluno 17)

REFLEXÕES E INFERÊNCIAS...

Após um semestre trabalhando com uma metodologia que enfatizou a linguagem escrita, pude refletir com maior profundidade sobre as influências que isso gerou no processo ensino aprendizagem, bem como as vantagens obtidas em meu trabalho diário. Ao pensarmos em uma metodologia que consiga dar aos nossos alunos condições para que se desenvolvam de maneira significativa em Matemática percebo a redação como uma alternativa bastante viável. Utilizando-me deste recurso concomitante com outras metodologias de ensino pude perceber uma boa evolução nos alunos. São vários os benefícios que podem ser alcançados com o emprego da redação em aulas de matemática, sendo alguns deles:

- **maior concentração do aprendiz com relação ao seu objeto de estudo** : a redação "força" o aluno a pensar sobre o tema estudado sendo um participante mais ativo do processo. Ao escrever o aluno torna-se mais consciente sobre o que já sabe e sobre aqueles tópicos que ele ainda não aprendeu.
- **reflexão matemática juntamente com a reflexão sobre o seu aprendizado** : é no momento da escrita que o aluno reflete sobre os conceitos, a compreensão deles, sendo capaz de identificar também que outros conceitos matemáticos estão relacionados com aquele que está sendo estudado. O aluno é capaz de perceber sua evolução de aprendizado ao comparar seus trabalhos, avaliações etc. Ele torna-se muito mais consciente do seu papel no processo de ensino – aprendizagem.
- **considerável aprendizagem dos conceitos** : ao escrever sobre determinados conceitos o aluno percebe de maneira mais global as relações, isso melhora

significativamente sua compreensão; isso contribui também para a superação de um ensino matemático ligado apenas à exercícios rotineiros ou de aplicações práticas.

O professor consegue também, através dos trabalhos escritos, compreender as relações que o aluno está fazendo, como ele estrutura a "rede" de conceitos percebendo assim suas escolhas.

- **apreensão mais efetiva dos conceitos matemáticos** : ao estar apto a escrever sobre os conceitos percebemos uma melhoria no aprendizado de matemática e não apenas técnicas utilizadas no Cálculo I.
- **melhoria na capacidade de argumentação** : ao trabalharmos uma redação em grupo estamos forçando os participantes a discutirem idéias, realizarem uma síntese elaborando uma resposta que deverá ser a resposta do grupo. Neste momento há uma socialização de idéias e argumentos que servirão também para expandir as zonas de desenvolvimento proximais de alunos em níveis diferenciados de aprendizado.
- **uma maior compreensão da ordem em que foram trabalhados os conteúdos :** o aluno percebe mais facilmente o porquê de tais seqüências no conteúdo, estabelece as conexões e entende o sentido de se estar trabalhando naquela ordem.
- **melhoria na relação professor – aluno** : a redação matemática dá a oportunidade para o professor criar um vínculo maior com o aluno à medida em que os trabalhos escritos são devolvidos, discutidos, comentados; ocorrendo maior aproximação de ambos.
- **melhoria na relação aluno – aluno** : ao utilizarmo-nos de uma metodologia que propiciou também o trabalho em grupo pudemos perceber melhorias significativas com relação aos conceitos e também com relação a convivência. A interferência de "um" no aprendizado do "outro" contribuiu para um "confronto" que foi uma contribuição importante nas reestruturações de idéias.

- **espaço para se explorar a criatividade** : ao trabalharmos com cartas e gibis –em particular - estamos dando uma oportunidade para a criação. Ao proporcionarmos momentos onde os alunos trabalhem em uma atividade não muito usual em aulas de matemática estaremos contribuindo também para a superação daquela visão de que a matemática deve ser trabalhada sempre de uma única maneira (por parte de quem ensina), contribuindo também para a superação de receios e medos (por parte de quem aprende). A atividade, sendo mais livre, gera menos inseguranças.
- **maior socialização da aprendizagem dos conceitos onde os trabalhos coletivos tiveram importante contribuição** : alunos em níveis diferenciados de aprendizado conseguiram atingir estágios mais elevados através dos trabalhos em grupo. A "interseção" das zonas de desenvolvimento proximal gerou momentos de dúvidas seguidos de momentos de reflexões que contribuíram de maneira significativa para o avanço no entendimento e, conseqüentemente, no aprendizado de cada componente do grupo.
- **percepção de problemas relacionados à auto – estima :** o momento da escrita, quando realizado individualmente, oferece ao aluno a oportunidade de se "mostrar" para o professor. Muitos alunos possuem problemas de auto – estima que se evidencia na escrita. De posse deste material o professor pode trabalhar de uma maneira mais dirigida, mais particularizada fazendo com que cada aluno busque superar sua dificuldade específica.

OUTROS QUESTIONAMENTOS

- **A comunicação do professor e sua interferência na produção dos trabalhos escrito:** faz-se necessário ressaltar o quanto a comunicação é importante. De nada adianta buscarmos uma metodologia que propicie a escrita em aulas de matemática se não nos preocuparmos com o fato de que a "clareza" com que nos expressamos, ou a falta, dela irá contribuir significativamente na apreensão dos conceitos. O professor deve ter cuidado com relação às palavras que utiliza, com o sentido dado por ele, pois, como afirmava Vygotsky, "não são somente os surdos que não conseguem se entender, mas quaisquer pessoas que atribuem um significado diferente à mesma palavra" (Vygotsky, 1998a, p.176).
- **O afetivo intermediando uma relação que não poderá ser uma relação de coação, mas de cooperação:** o processo da escrita pode gerar medo, dúvida, incertezas que só poderão ser superadas se houver um ambiente de cooperação. A percepção do professor como alguém que incentiva mais do que condena é fator importante na superação destas inseguranças.
- **A resistência à escrita - sua origem:** não há como ignorar que existem outros elementos que interferem no processo de escrita. Que elementos seriam estes? O que poderia gerar resistência a um trabalho (com a escrita) que, teoricamente, o aluno vem fazendo desde o Ensino Fundamental ?
- **O professor *versus* a motivação:** estaríamos percebendo a questão da motivação como algo necessário dentro do processo de ensino - aprendizagem ou acreditamos que alunos universitários não precisam mais de motivação?
- **A formação de conceitos que engloba outros aspectos que vão além do aspecto formal:** superando a visão de que há uma única maneira de ensinarmos matemática

estaremos contribuindo para uma formação significativa dos conceitos. Não podemos mais compactuar com um ensino de matemática baseado em "receitas" onde o aluno mecaniza algoritmos e os repete em avaliações isoladas.

- **A percepção que cada um tem com relação ao ambiente de sala de aula, como (é) deveria ser:** a concepção que o professor tem da própria matemática pode refletir de maneira significativa na sua postura em sala de aula. Percebemos a Matemática como uma ciência que é resultado da contribuição de vários povos historicamente situados ou acreditamos que esta ciência é ainda aquele mito reservado "para poucos" ? Como estas diferentes percepções podem afetam na maneira como ensinamos? Na maneira como nos relacionamos? Na maneira como conduzimos os nossos cursos ?

É importante ressaltar que estes foram aspectos gerais observados. Muito se tem dito sobre a importância do uso da redação nas aulas de matemática. A proposta desta metodologia juntamente com o trato dado ao material desta pesquisa teve como objetivo principal trazer uma contribuição no sentido de mostrar **como** e **através de que** a redação poderia tornar o ensino de matemática, em particular do Cálculo I, mais significativo.

A mudança de metodologia traz em seu bojo elementos que servem para ajudar o professor a identificar certos tipos de habilidades na turma como um todo. E mais importante do que identificar estas habilidades é oferecer momentos em que os alunos possam compartilhá-la. Durante todo o processo de pesquisa pudemos perceber alunos que possuem diferentes capacidades, bem como diferentes formas de aprendizagem. Colocar alunos que aprendem de maneira diferente para trabalharem em conjunto é uma forma de fazer com que um interfira de maneira positiva no aprendizado do outro, e aqui podemos destacar mais uma vez a importância do trabalho em grupo.

> *"A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário (...) O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento prospectivamente."* (Vygotsky, 1998b, p.113).

Foram vários os momentos em que pudemos perceber o enriquecimento do trabalho em grupo oriundo destas diferenciações.

Refletindo sobre as várias diferentes formas de aprendizado estaremos pensando nas diferentes formas de propiciar o aprendizado em sala de aula. Não podemos mais pensar em uma forma única de ensino, em um único método de ensino. Como professores é nosso dever buscar as formas para que o maior número de alunos tenham acesso ao saber, e entre todos estes métodos, a redação matemática tem se firmado como uma metodologia viável e de fácil aplicação.

BIBLIOGRAFIA

1. ANDRE, Mari E D A – *Diferentes tipos de pesquisa qualitativa.* In: Etnografia da Prática escolar, São Paulo: Papirus editora, p. 27-64, 1995.
2. BARALDI, Ivete Maria – *Matemática na escola: que ciência é está?* – Bauru:EDUSC, 1999.
3. BARBOSA, Ivone G – *Pré – escola e formação de conceitos: uma versão sócio – histórica – dialética,* tese de doutoramento, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
4. BARDINI, Laurence – *Análise de conteúdo* – tradução Luís Antero Reto – São Paulo: Edições 70, 1977.
5. BARUFI, Maria Cristina B – *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral* – Portugal : Associação de Professores de Matemática – 1999.
6. COUNTRYMAN, Joan – *Writing to learn mathematics: strategies that work, k-12,* Library of Congress Cataloging – in – Publication data, United States of America, 1992.
7. DARSIE, Marta M P; CARVALHO, Anna Maria P – *O início da formação do professor reflexivo* – In: Revista da Faculdade de Educação, v.22, n.02, p. 90-108, São Paulo, jul/dez 1996.
8. DIAS, Maria Verônica, POBLETE, Alvaro – *Resolucion de Problemas, Evaluacion y Ensñanza del calculo* – Revista Zetetiké – no.4, p.51-60, 1995.
9. DIAS SOBRINHO, J. – *Avaliação quantitativa, avaliação qualitativa: Interações e ênfases.* Em V. Sguissardi (org), D B C Leite, J Schwartzam ... [et al] – Avaliação universitária em questão: Reformas do estado e da educação superior, São Paulo: Editora Autores Associados, p. 71-89, 1997.
10. GARCEZ, Lucília H C – *A escrita e o outro: os modos de participação na construção do texto* – Brasília: editora Universidade de Brasília, 1998.
11. HUBBARD, Ruth S; POWER, Brenda M: *The art of Classroom inquiry : a handbook for teacher* – researches: library of Congress Cataloging – in : Publication data United States, 1993.
12. LÜDKE, Marli E.D.A André – *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas* – São Paulo: EPU, 1986.
13. LURIA, A R – *Pensamento e linguagem: as últimas conferências de Luria*; tradução Diana Myriam Lichtenstein, Mário Corso – Porto Seguro: Artes Médicas, 1986.
14. MACHADO, Nilson José – *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente* – São Paulo: Cortez, 1995.
15. MACHADO, Nilson José – *Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins* – 2ª edição – São Paulo: Cortez, 1995.
16. MACHADO, Nilson José – *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua* – 3ª edição - São Paulo: Cortez, 1993.
17. MACHADO, Nilson José – *Matemática por Assunto – Noções de Cálculo.* – São Paulo: Scipione, 1986.
18. MOREIRA, Marco Antônio – *Teorias de aprendizagem* – São Paulo:EPU, 1999.
19. MOREIRA, A Marco, MASSINI, Elcie F. S – *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel* – São Paulo: Moraes, 1982.
20. MOYSÉS, Lúcia – *Aplicações de Vygotsky a educação matemática* – São Paulo: papirus editora, 1997.

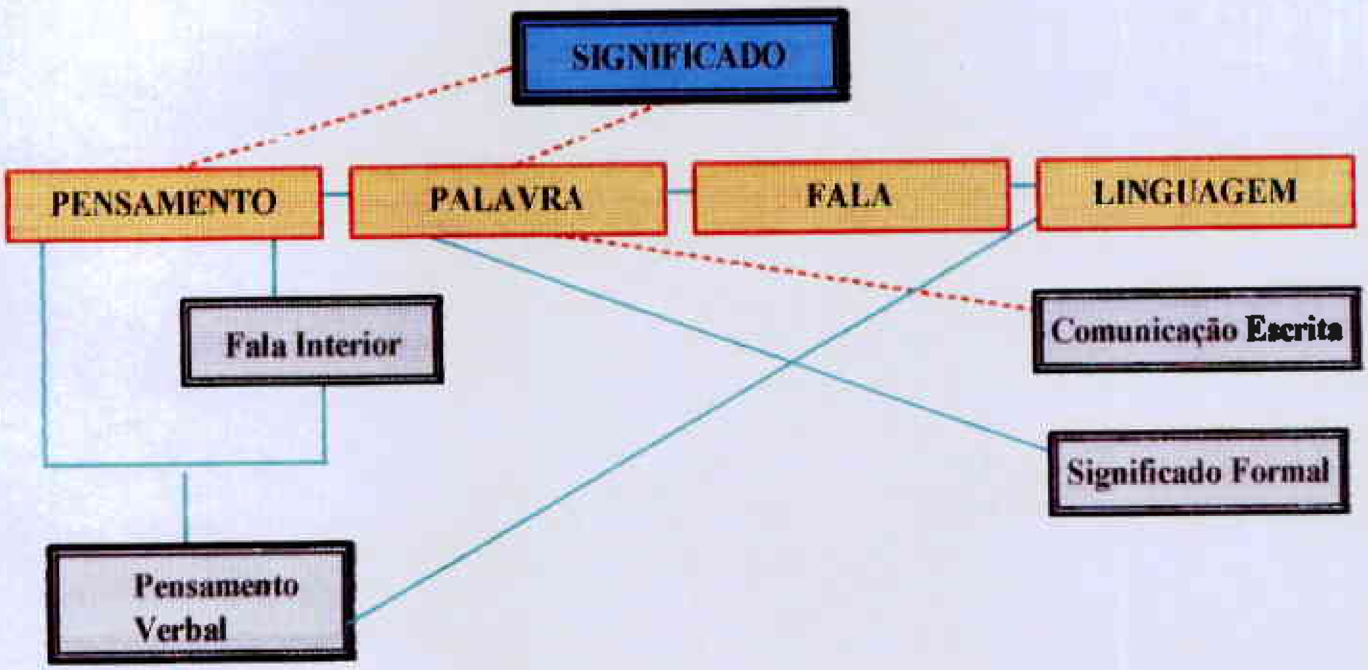
21. NCTM – Curriculum and Evalution Standards for School Mathematics: National Council of Teachers of Mathematics – tradução Eduardo Veloso, Fernando Nunes [et al] – 2ª edição – Portugal, 1994.
22. NÓVOA, A.(coord) – *Os professores e sua formação* – Lisboa: Dom Quixote, p 51-76, 1992.
23. ORLANDI, Eni P. – *Discurso e Leitura* – 2ª edição - São Paulo: Cortez, 1993.
24. ORLANDI, Eni P. – *Análise de Discurso* – 1ª edição - São Paulo: Pontes, 1999.
25. SANTOS, Vânia M P (coord): *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos* – Projeto Fundão – Rio de Janeiro, 1997.
26. SILVA, Maria Regina G – *Discurso de alguns professores de cálculo sobre taxas de variação* – revista Quadrante, vol. 7, no. 01, p.55-75,1998.
27. The mathematical Association of America – *Using writing to teach Mathematics* – edited by Andrew Sterrett – MAA notes – number 16, 1988-89.
28. Thiollent, Michel Jean-Marie – *Aspectos qualitativos da metodologia de pesquisa com objetivos de descrição, avaliação e reconstrução* – In: caderno de pesquisa, no. 49, p: 45-50, Rio de Janeiro, 1984.
29. TURRA, Clódia M.; ENRICONE, Délcia ...[et al] – *Planejamento de ensino e avaliação* – 11ª edição, Porto Alegre: Sagra: DC Luzzatto, 1996.
30. VYGOTSKY, L. S – *Pensamento e Linguagem*; tradução Jefferson Luiz Camargo – 2ª edição – São Paulo: Martins Fontes, 1998a.
31. VYGOTSKY, L. S – *A formação Social da Mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*; org. Michael Cole ...[et al]; tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche – 6ª edição – São Paulo: Martins Fontes, 1998b.
32. VYGOTSKY, L. S – *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*; tradução Maria da Penha Villalobos – 6ª edição - São Paulo: Ícone : Editora da Universidade de São Paulo, 1998c.
33. VYGOTSKY, L. S. et al – *Psicologia e pedagogia.* tradução Rubens Eduardo Frias – 1ª edição - São Paulo: Morais, 1991.
34. ZABALZA, M A – *Diários de aula: contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores* – Portugal: Porto Editora, 1994.

Anexos

ANEXO I

CONCEITOS PRINCIPAIS DE VYGOTSKY

Principais conceitos de Vygotsky



ANEXO II - QUESTIONÁRIO GERAL

O questionário abaixo foi entregue aos alunos no primeiro dia de aula propriamente dito (após a semana dedicada ao calouro). Teve como idéia principal, levantar dados mais gerais e simples com relação aos pré-requisitos ao estudo de Cálculo e também a opinião deles com relação à Matemática.

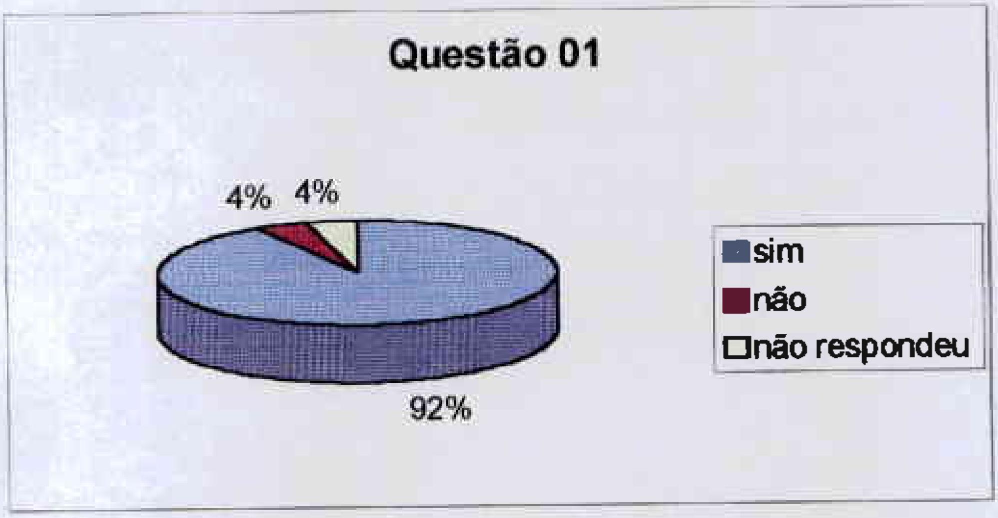
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina : Matemática
Professora : Maria Bethânia S. dos Santos
Curso : Agronomia - Turma : C

Este questionário tem o intuito de conhecer um pouco você. verificando como você está com relação a um conteúdo que é muito importante para o aprendizado de Cálculo I. Responda todas as questões, pois muito do meu trabalho será desenvolvido de acordo com as respostas aqui apresentadas. Não se preocupe se você não souber, estaremos retomando estes conteúdos em sala.

QUESTIONÁRIO :

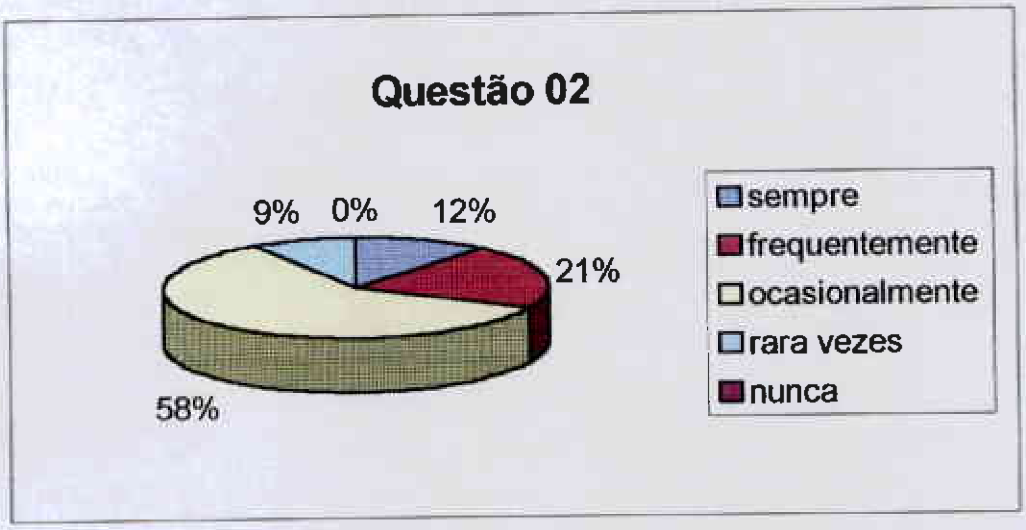
1. Você gosta de Matemática ?

- Sim
- Não



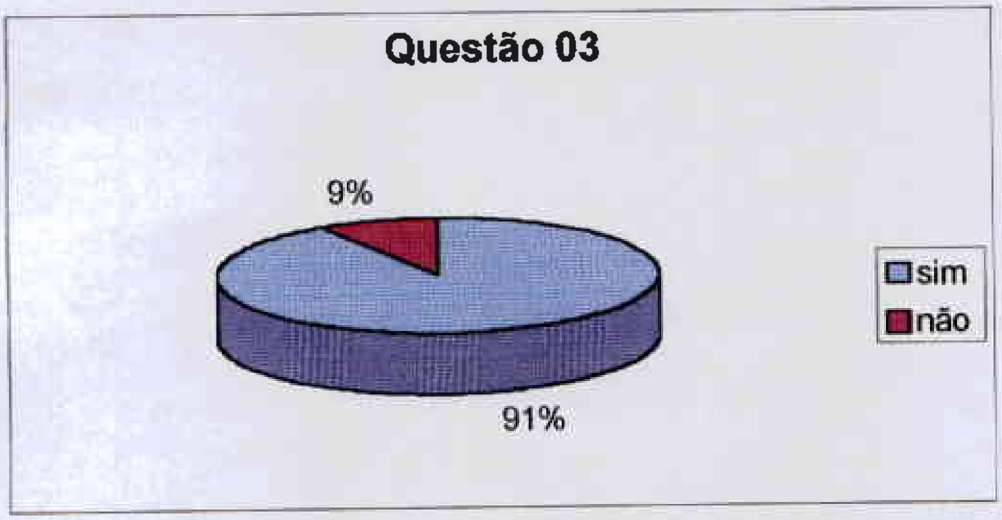
2. Você acha a Matemática difícil ?

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



3. Você sabe o que é um plano cartesiano ?

- Sim
- Não

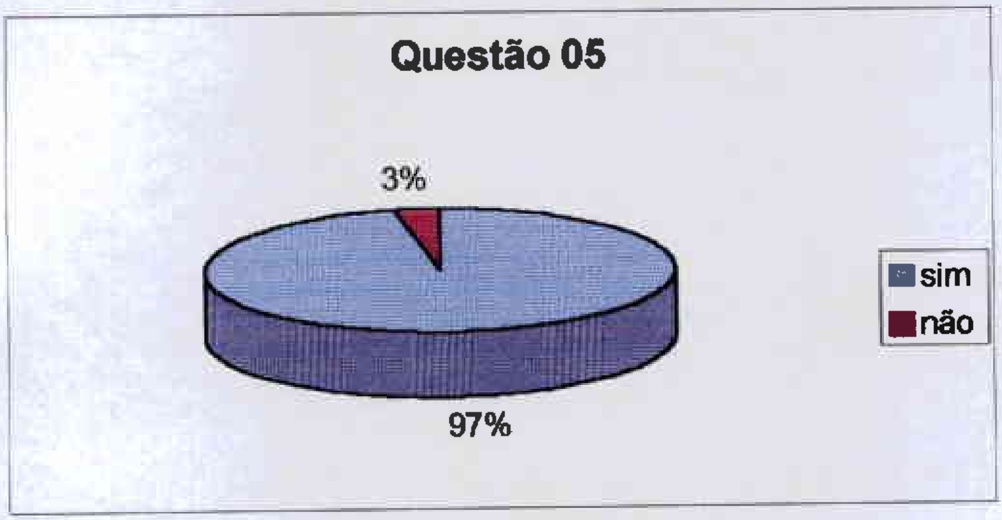


4. Você sabe o que são coordenadas de um ponto ?

- Sim
- Não

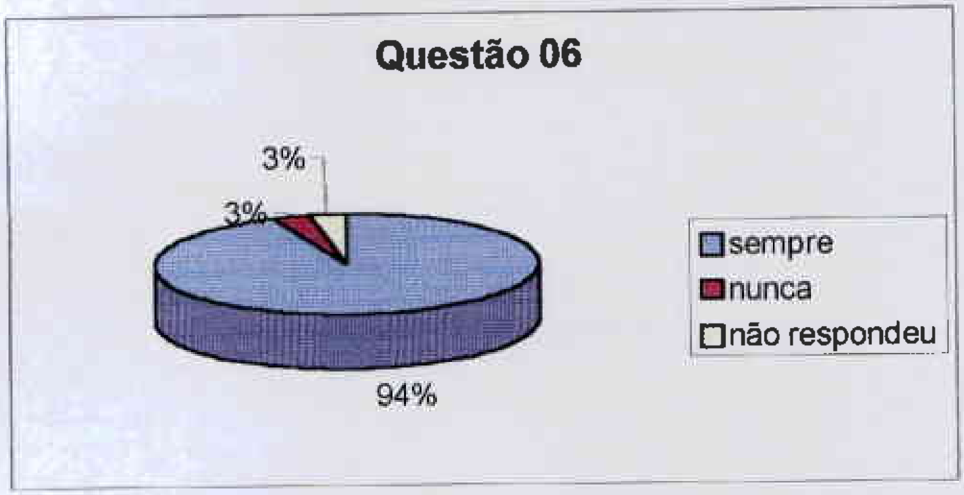
5. Você sabe o que é um par ordenado?

- Sim
- Não



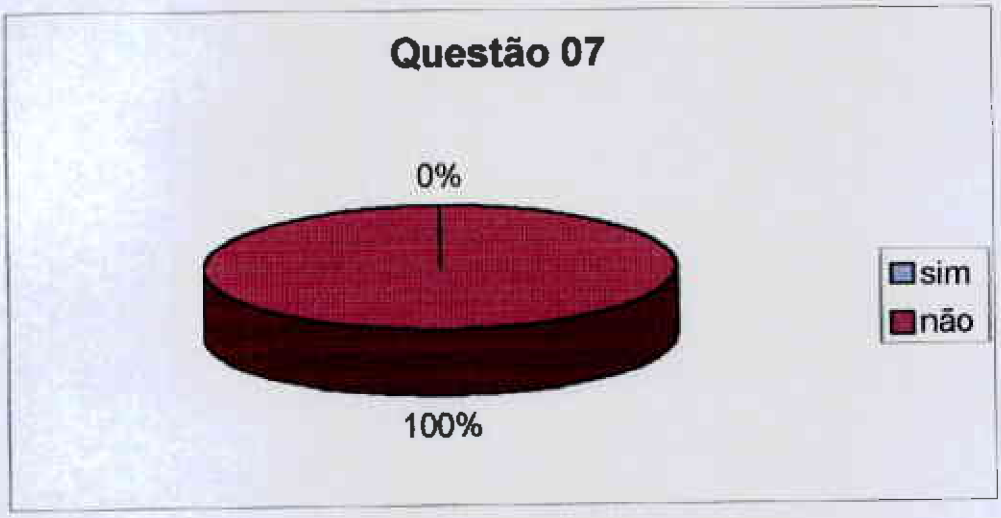
6. Abscissas são os valores de x e ordenadas os valores de y nos pares ordenados.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



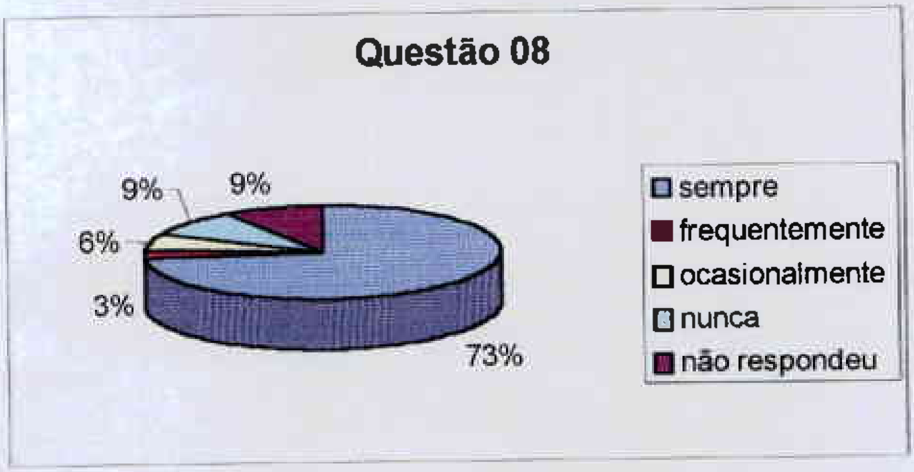
7. Os pontos (2, 3) e (3, 2) representam o mesmo ponto ?

- Sim
- Não



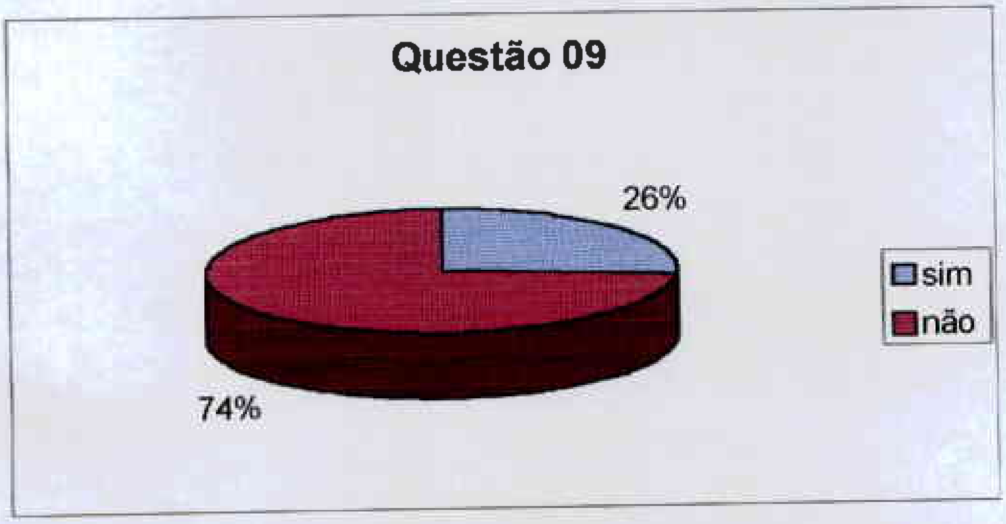
8. No terceiro quadrante do plano cartesiano as coordenadas de um ponto são ambas negativas.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



9. O ponto (-3, 0) encontra-se no eixo 0y.

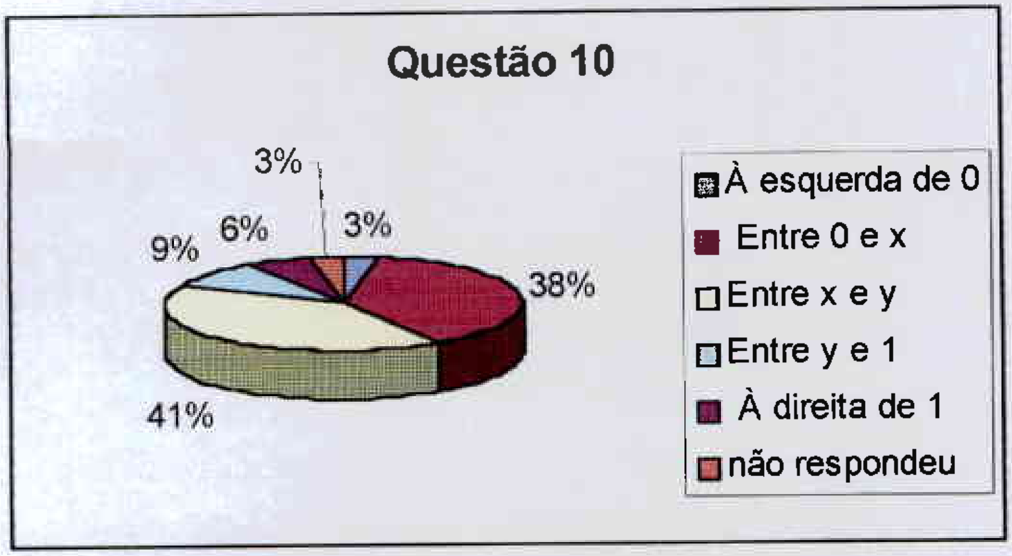
- Sim
- Não



10. Na figura estão representados os números reais x, y e 1.

A posição do número xy é :

- À esquerda de 0
- Entre 0 e x
- Entre x e y
- Entre y e 1
- À direita de 1

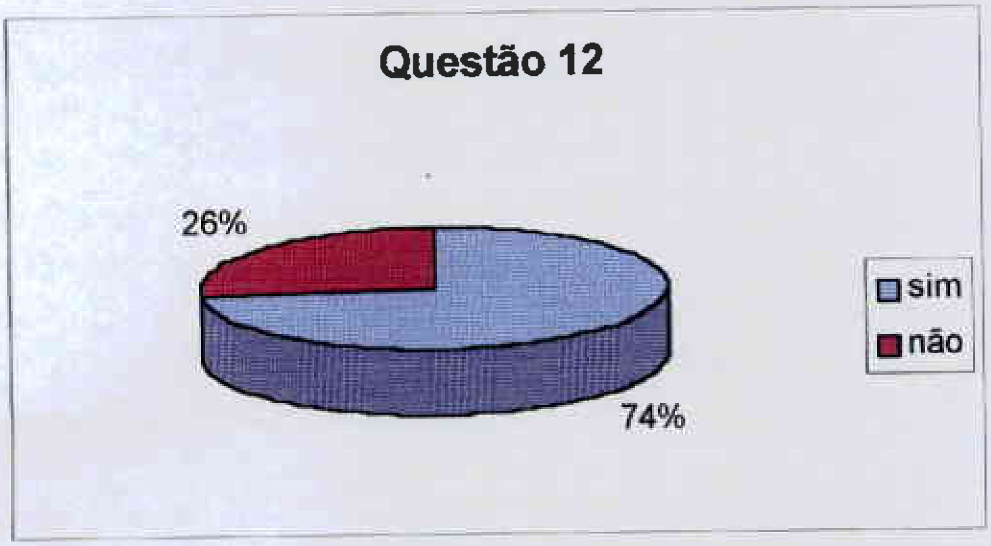


11. $A = \{ x \in \Re \;/\; -2 \leq x \leq 2 \}$ representa um intervalo fechado.

- Sim
- Não

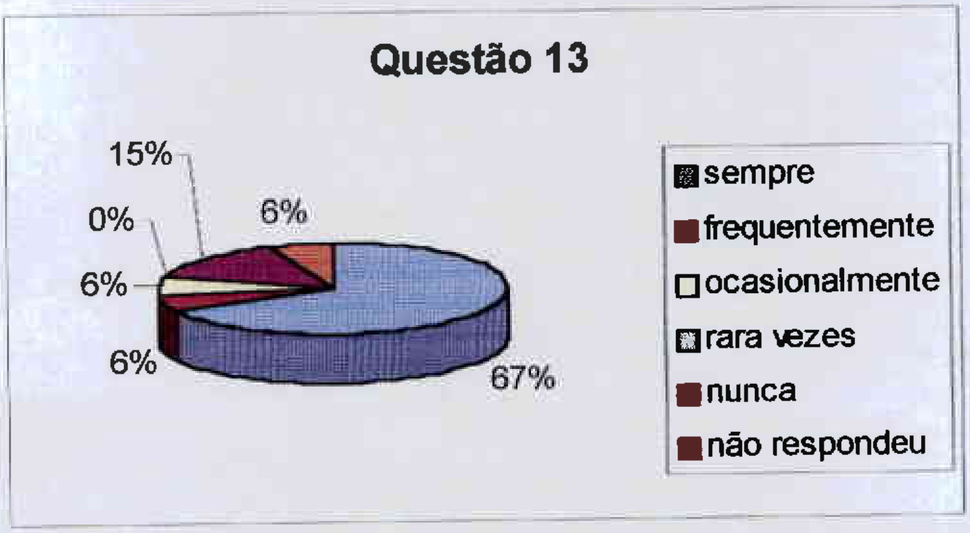
12. B =] - ∞ . 2] representa um intervalo semi – aberto.

- Sim
- Não



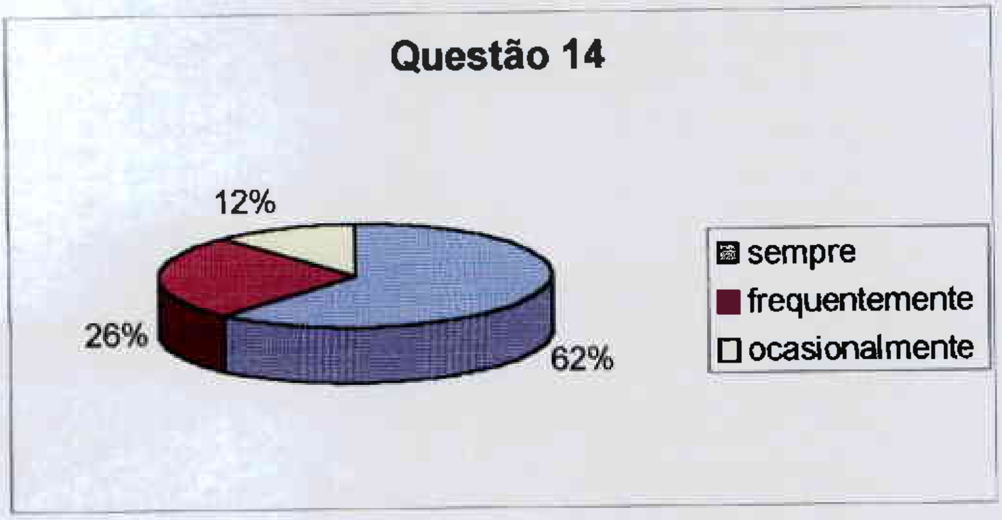
13. A representação abaixo é de um intervalo semi – fechado.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



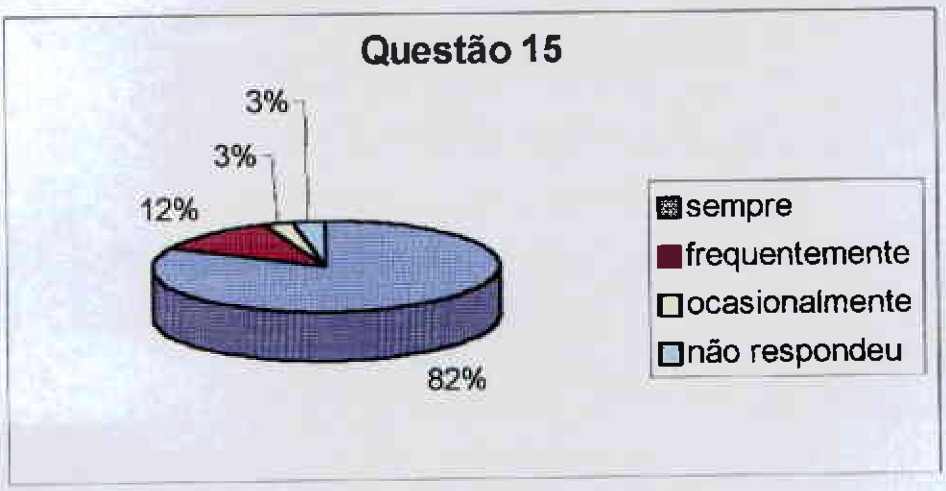
14. Graficamente reconhecemos funções.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



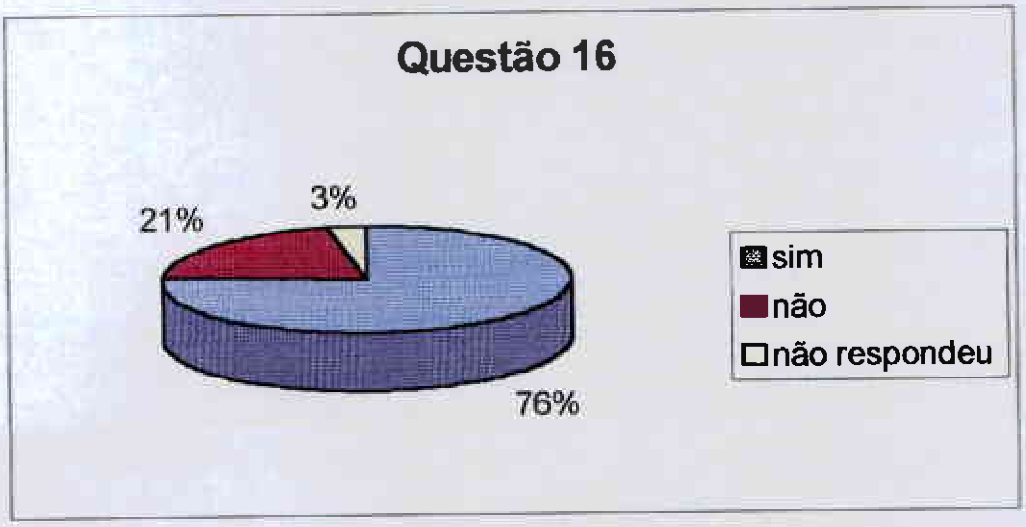
15. Toda função tem uma lei de formação.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca



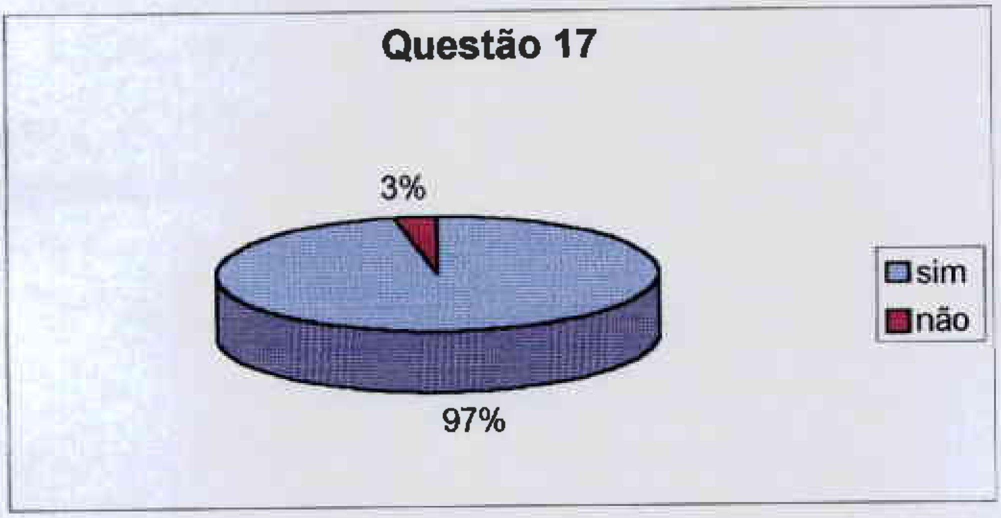
16. Função é uma relação entre duas variáveis.

- Sim
- Não



17. Existe relação entre o gráfico e sua função.

- Sim
- Não

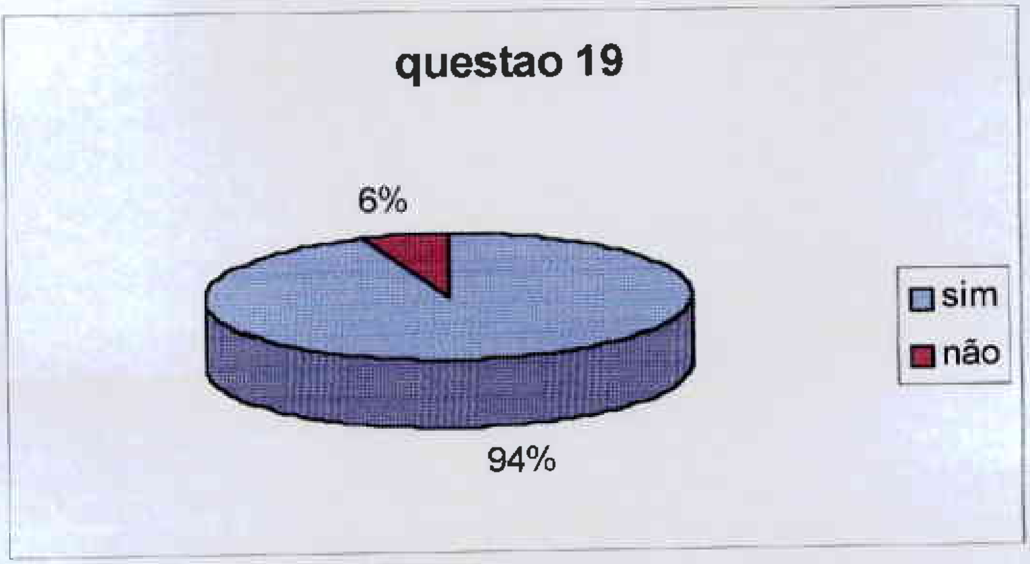


18. F(x) é o valor correspondente à imagem de um ponto de uma função para um valor determinado de x.

- Sempre
- Freqüentemente
- Ocasionalmente
- Raras vezes
- Nunca

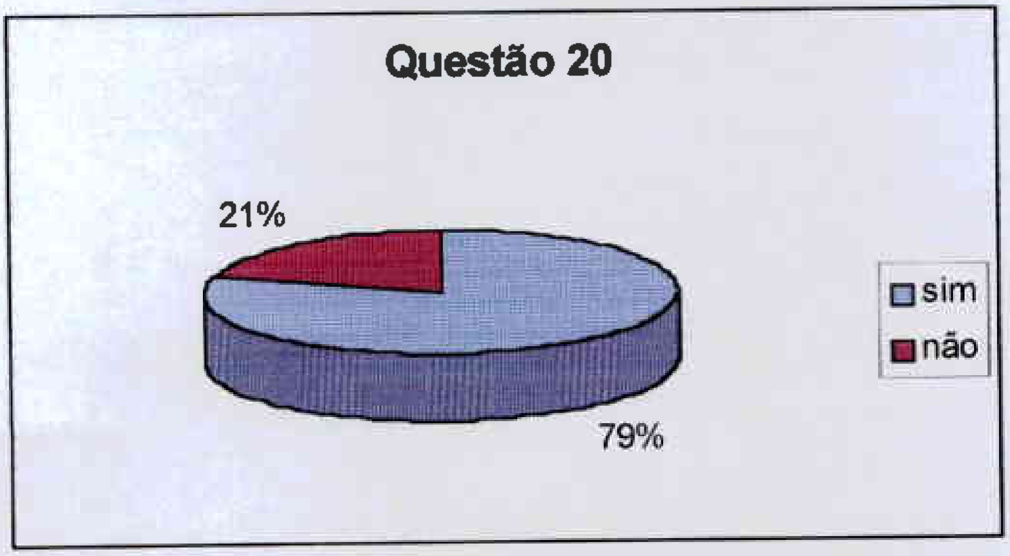
19. Se $f(x) = 3x^2 + 1$, então $f(-3) = 28$.

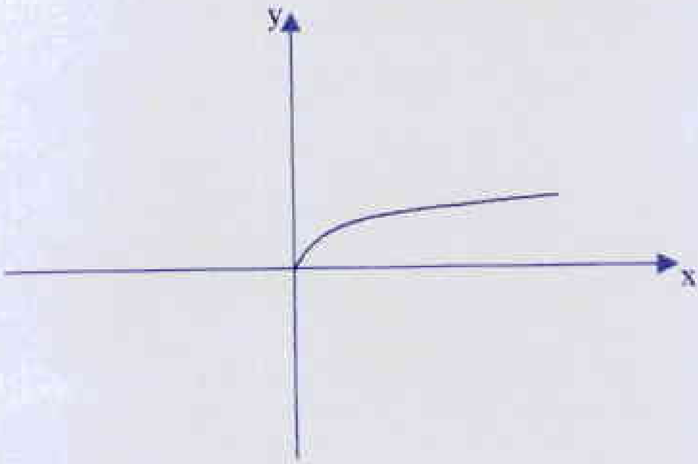
- Sim
- Não



20.O gráfico abaixo representa uma função

- Sim
- Não





ANEXO III – DISTRIBUIÇÃO DO CONTEÚDO

Etapa 01: Estudo das taxas

12 aulas (3 semanas) para se trabalhar desde a noção mais simples, a interpretação do coeficiente angular da reta como um indicador da variação de y por unidade de x, até chegarmos a taxa de variação no ponto, a derivada, passando também pelo estudo da taxa média. Durante esta etapa, foi feita também a revisão de funções.

ETAPA 02: O ESTUDO DO LIMITE

10 aulas (2 semanas e meia) – esta etapa compreendeu desde a idéia intuitiva de limite - a explicação geométrica da derivada - até a formalização deste conceito.

ETAPA 03: CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

4 aulas (1 semana) onde se formalizou ambos os conceitos. Enfatizando as relações entre eles : limite, derivada e continuidade de uma função em um determinado ponto.

Etapa 04: Derivada – Regras de derivação

2 aulas (½ semana)para o estudo de todas as regras de derivação – incluindo a regra da cadeia.

ETAPA 05 : DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

4 aulas (1 semana) – Voltando a enfatizar as regras de derivação.

ETAPA 06: APLICAÇÕES DA DERIVADA

14 aulas (3 semanas e meia) – desde a construção de gráficos até ao estudo de problemas que envolviam aplicações da derivada , retorno à taxa de variação.

6 aulas – avaliações formais – 1, 5 semana
2 aulas - 1 semana – aulas exclusivamente de exercícios .

Organização dos conteúdos – ordem em que foram trabalhados e número de aulas

1. Funções – introdução através de três problemas práticos. Definição de função como uma relação entre grandezas. (2 aulas)
2. Estudo das taxas de variações proporcionais – estudo inicial das funções de 1° grau.(2 aulas)
3. Finalização do estudo das funções de 1° grau com a utilização do Graphmatica .(2 aulas)
4. Estudo da taxa de variação média – utilizando uma função de 2°grau.(2 aulas)
5. Finalização do estudo de taxas de variações médias com revisão das funções: exponencial, hipérbole e logarítma.(2 aulas)
6. Taxa de variação no ponto – a derivada.(2 aulas)
7. Aula com o Graphmatica – estudo das funções que não são do 1° grau : quadrática e hipérbole.(2 aulas)

8. Primeira avaliação formal (2 aulas)
9. Estudo mais formal da Derivada – introdução do conceito de limite (intuitivamente)(2 aulas)
10. Estudo de limite (intuitivo / formal). (2 aulas)
11. Formalização completa do estudo do limite, incluindo a existência do limite, limites laterais e os limites de funções polinomiais e racionais. (4 aulas)
12. Limites envolvendo funções trigonométricas.(2 aulas)
13. Estudo da derivabilidade e da continuidade de uma função.(2 aulas + 2 aulas)
14. (Antes da prova 2aulas)
15. Segunda avaliação formal.(2 aulas)
16. Regras de derivação.(4 aulas)
17. Derivadas de funções implícitas.(3 aulas)
18. Derivadas – Crescimento e Decrescimento de funções – Primeira aula de estudo de sinal da derivada.(4 aulas)
19. Problemas com aplicação das regras de derivação.(2 aulas)
20. Estudo dirigido em cima destes problemas para melhorar a compreensão.(2 aulas)
21. Problemas com taxa de variação (retomada ao conceito) e derivação implícita.(2 aulas)
22. Estudo no graphmatica – as utilizações do limite e da derivada (seus sinais) – nas construções de gráficos de funções diversas.(4 aulas)
23. Terceira avaliação formal(2 aulas)

ANEXO IV - GIBIS

Gibi 01: alunos – 01,08,24

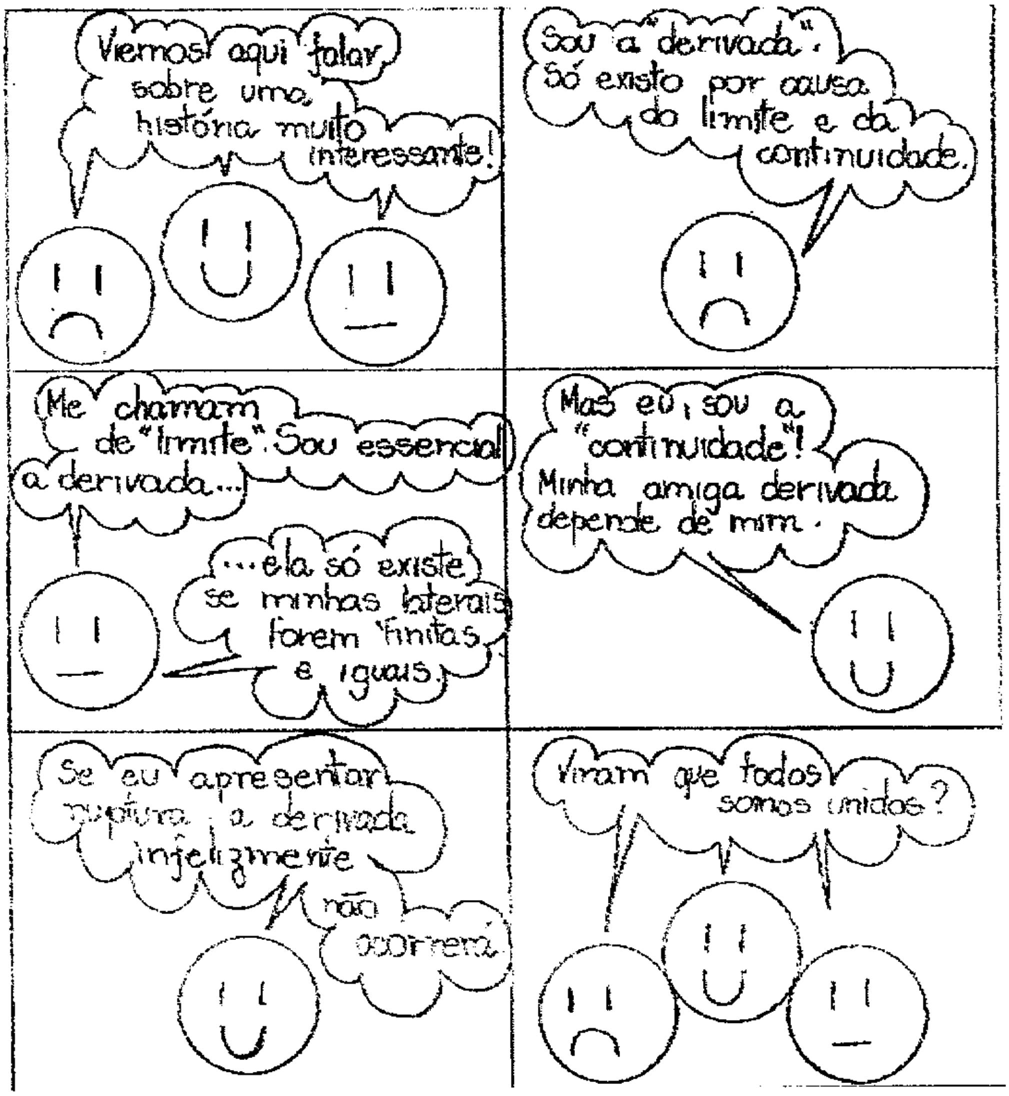
Título do trabalho: ***Falando de Matemática***

A estratégia utilizada por este grupo foi colocar cada conceito se "apresentando" para o leitor.

Associaram a existência da derivada ao limite e a continuidade, frisando que a derivada só existiria se os limites fossem finitos e iguais. Aqui o grupo deixou clara a relação entre o limite e os limites laterais.

Falam sobre a dependência da derivada com relação à continuidade ressaltando que quando ocorre ruptura não haverá derivada.

De uma maneira geral, o grupo conseguiu estabelecer relaçoes importantes entre as teorias estudadas, tendo demonstrado também criatividade ao criarem uma legenda própria, eles se utilizaram de uma moeda para fazerem os desenhos.



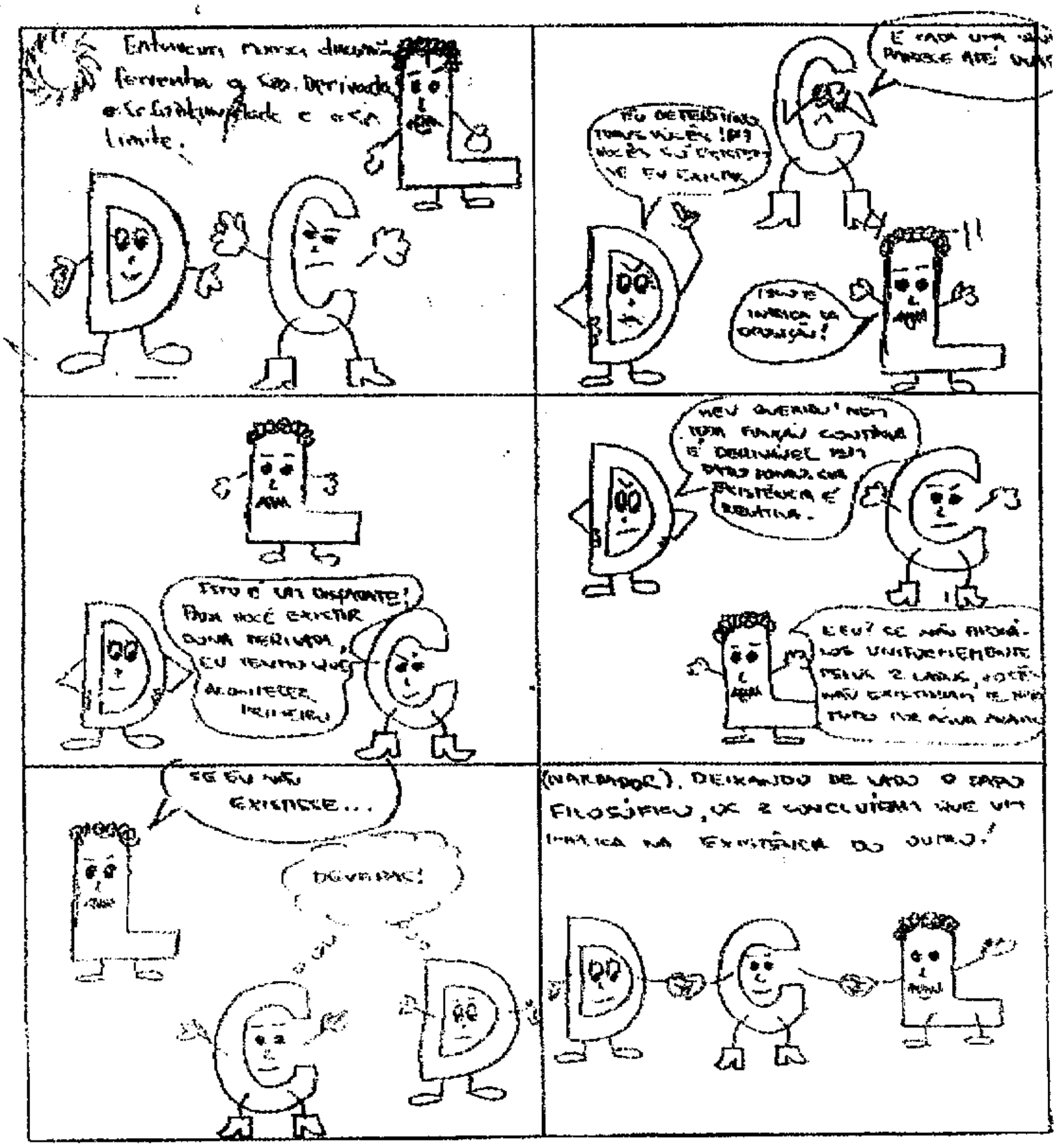
😐 **Limite**

☺ **Continuidade**

☹ **Derivada**

THE END!!!

Gibi 02: alunos – 05, 11, 06
Título do trabalho: ***Era uma vez na Matematicolândia...***
Este grupo simulou uma discussão entre os conceitos.
No meio desta discussão eles explicitam muito bem as relações entre os conceitos, mostrando quais são os que dependerão do outro.
É interessante perceber que o limite entra na "estória" quase no final, e percebe-se que o grupo deu a ele (ou não seria, a este conceito) uma importância relevante, inclusive finalizando a discussão.
A apresentação gráfica foi excelente. O grupo desenhou letras para cada conceito.



The End !

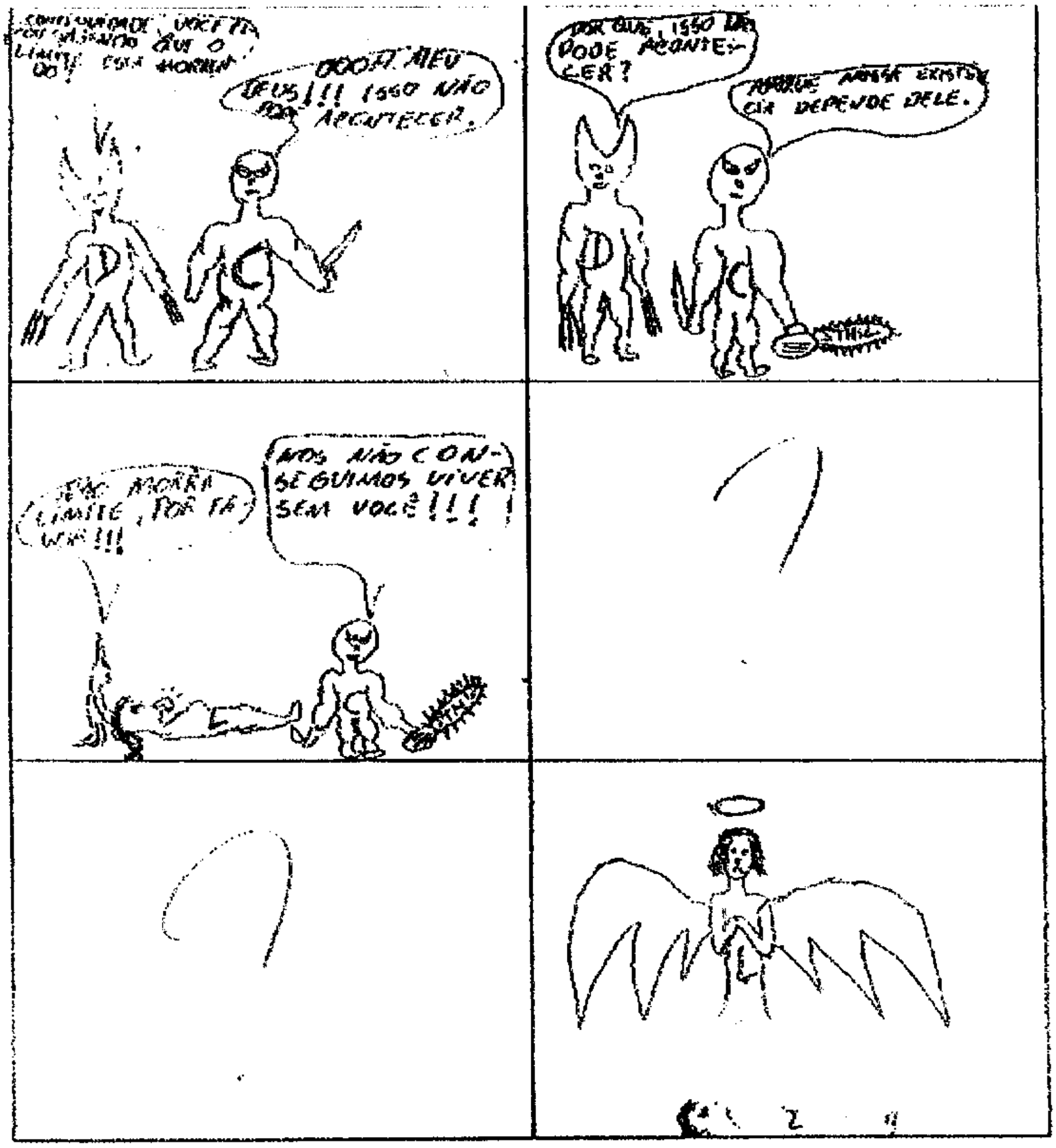
Gibi 04: alunos – 12, 23

Título do trabalho: ***Higlaser – retornando pro inferno.***

Este grupo teve grande resistência a este trabalho. Perderam boa parte da aula dizendo-se incapazes de realizarem a tarefa proposta. Depois de algumas argumentações, deixe-os livres, e eles próprios, percebendo que os outros grupos trabalhavam, resolveram produzir.

A única relação estabelecida por este grupo foi entre o limite e a continuidade e de forma bastante superficial, com a derivada também. Acredito que a resistência ao trabalho estava relacionada ao fraco domínio de conhecimento destas relações.

Grafcicamente eles criaram personagens para a derivada e para a continuidade. O limite só apareceria no final (morto).

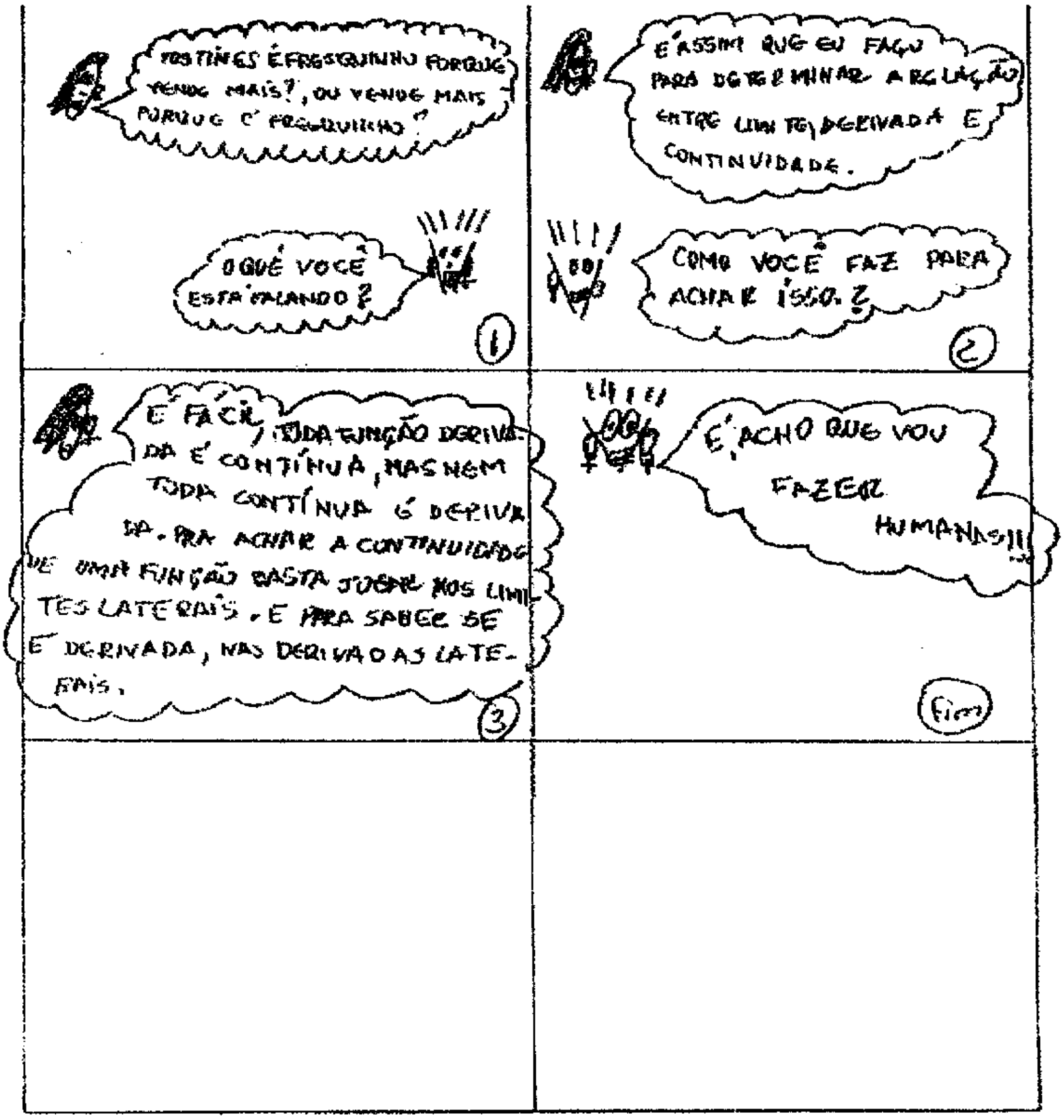


The End !

Gibi 03: alunos – 07, 15, 28

Título do trabalho: ***Comparações***

Este grupo fez uma caricatura de uma mulher (acredito que da professora). Utilizaram-se inicialmente de uma brincadeira utilizada por mim, em sala de aula, durante as aulas expositivas (primeiro quadrinho). De forma bastante sintetizada o grupo fez as relações em um único quadrinho (número 3). Aqui, ficou claro, os caminhos práticos procurados por estes alunos para responderem à questão inicial.



The End !

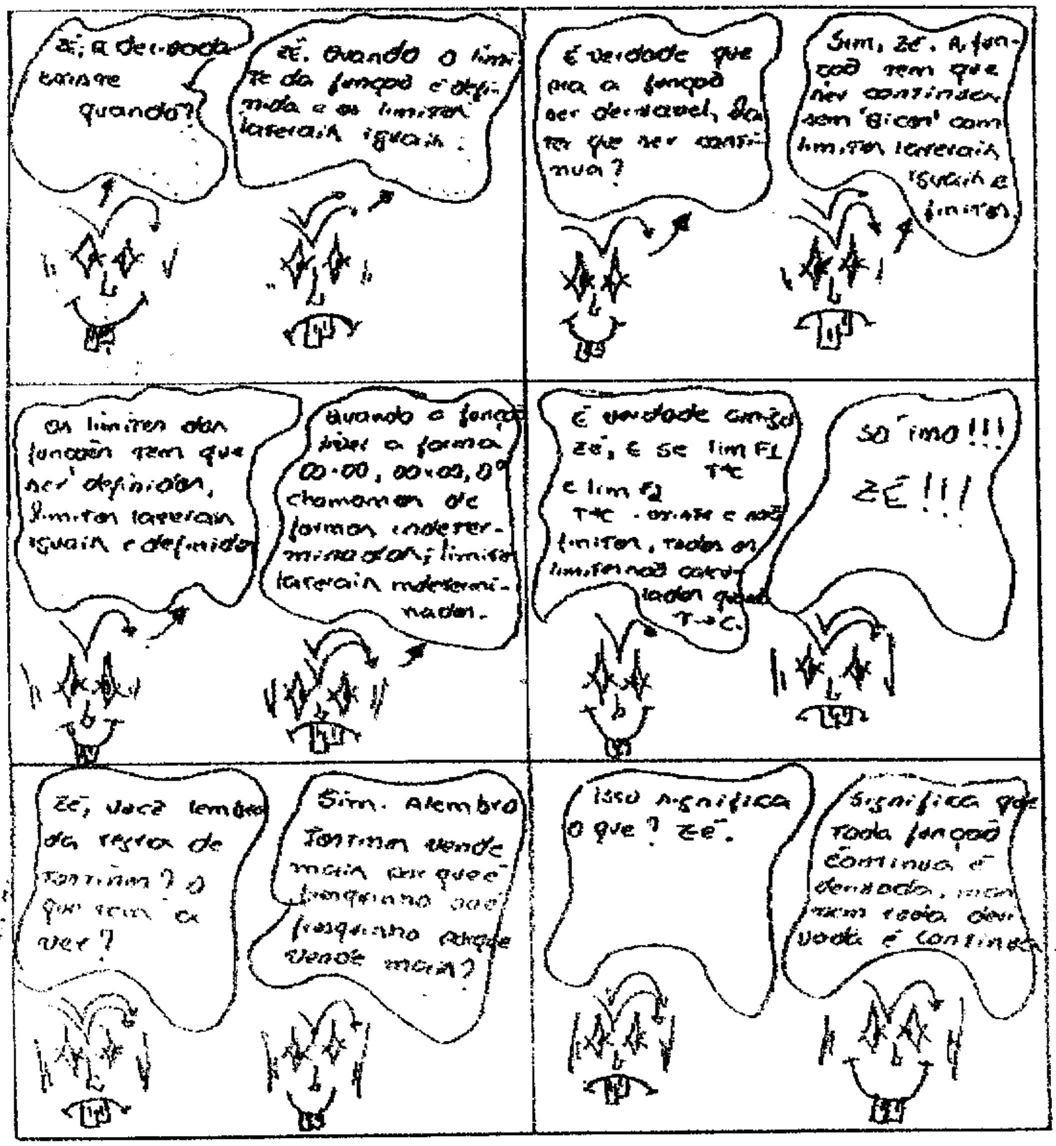
Gibi 06: alunos – 10, 04

Título do trabalho: ***Zé e Zé – Loucuras da Matemática***

Este grupo Foi um dos que mais falaram dos conceitos estudados. Explicaram quando é que existia o limite de uma função, o fato de que nem toda função contínua é derivável, falaram sobre os limites indeterminados, formas indeterminadas. Alguns fatores comprometeram o trabalho, como notações e expressões, o que de certa forma, não deixam as idéias que eles colocaram.

Uma das relações foi feita com a utilização do "jargão" usado por mim em sala de aula.

Graficamente eles fizeram um bom trabalho, criaram dois personagens quase idênticos.



The End !

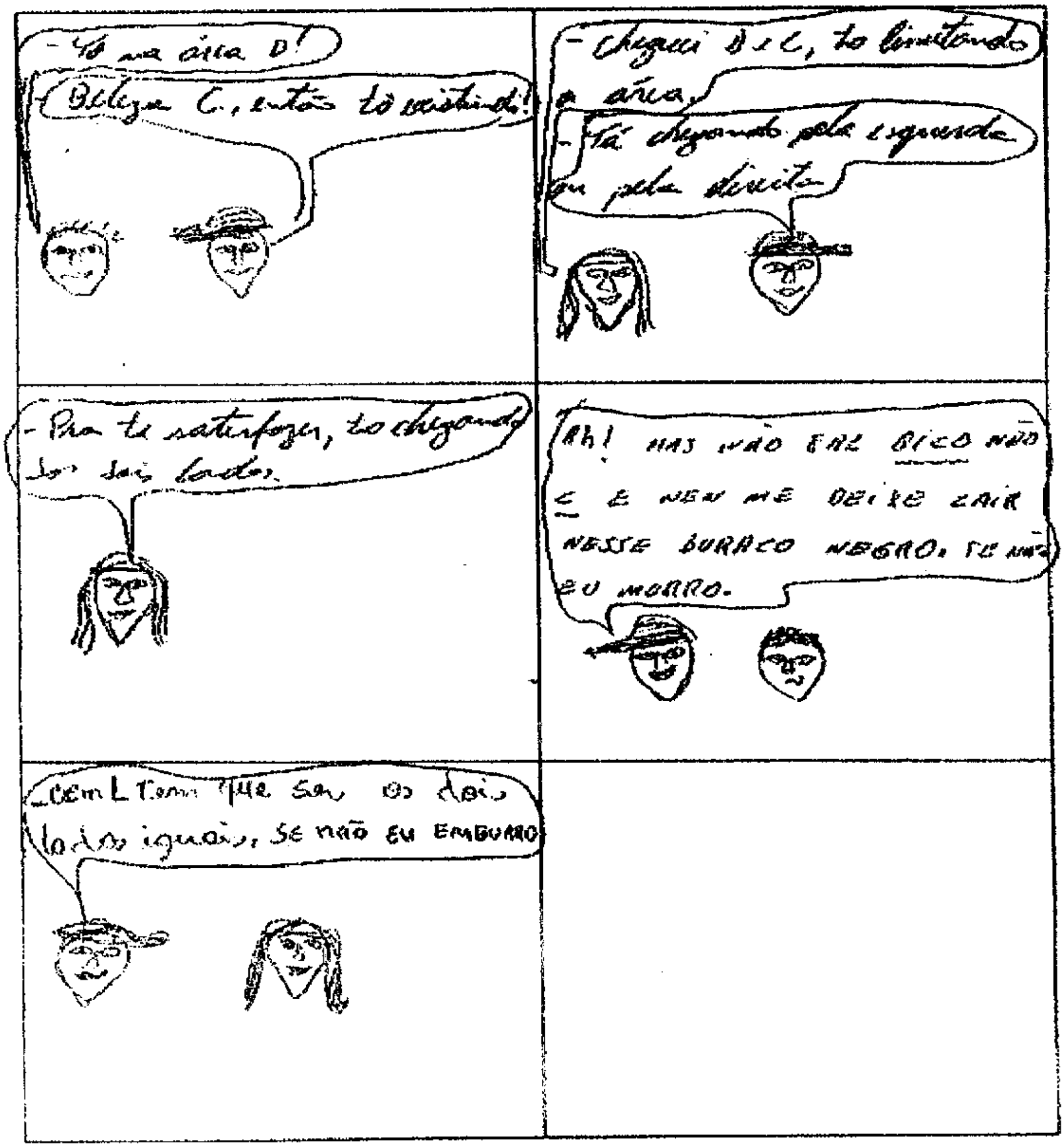
Gibi 08: alunos – 14, 27

Título do trabalho: ***Triangulo Amoroso***

Este grupo apresentou alguns dos aspectos matemáticos esperados, mas de forma confusa.

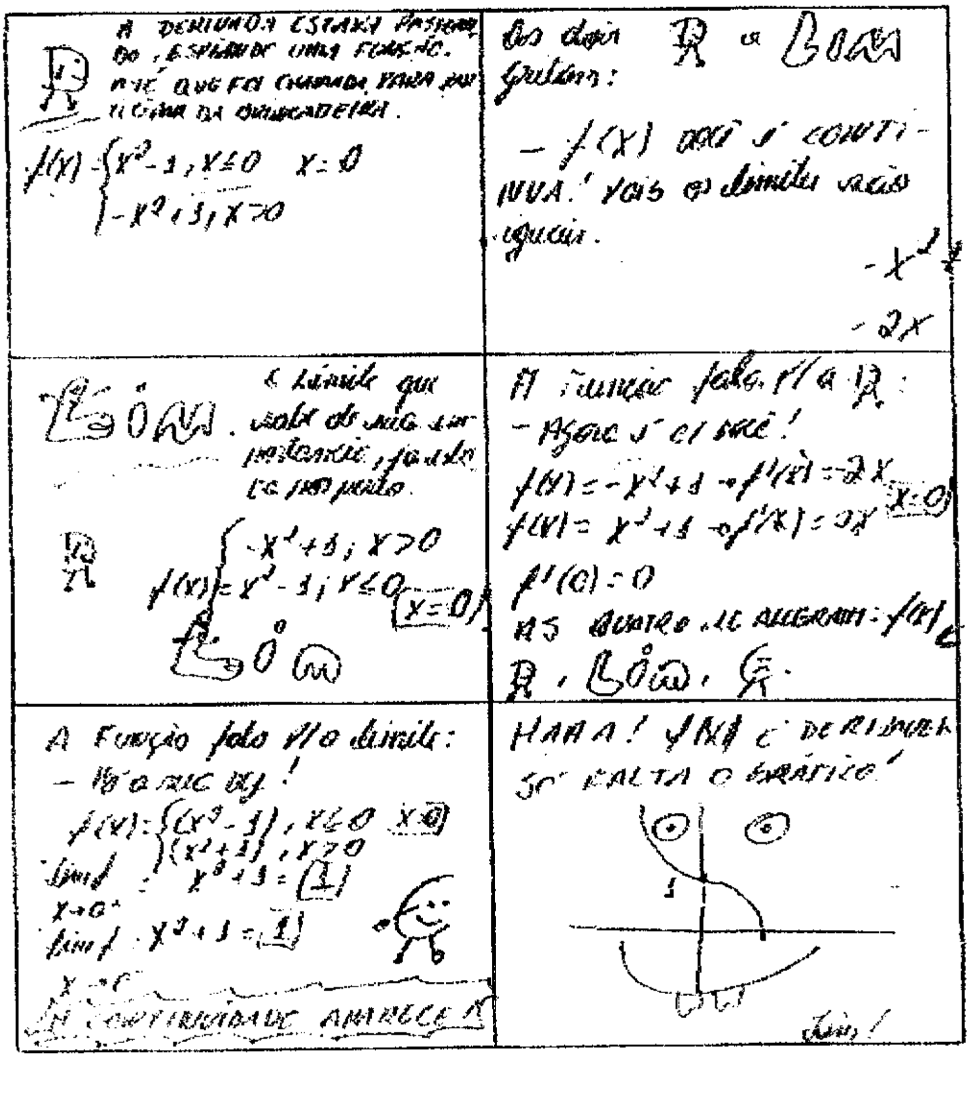
Ficou clara no primeiro quadrinho a relação entre a derivabilidade e acontinuidade. Eles falaram do limite que deve ser analisado pelos "dois lados" – limites laterais.

Graficamente, as diferenciações dos personagens por eles criados não ficaram muito claras.



The End !

Gibi 09: alunos – 21, *, 16
Este grupo não deu um título o trabalho, não conseguiu demonstrar relações entre os conceitos estudados, utilizou-se muito de elementos matemáticos: a função, o limite, a derivada; mas não demonstrou domínio destes conteúdos.

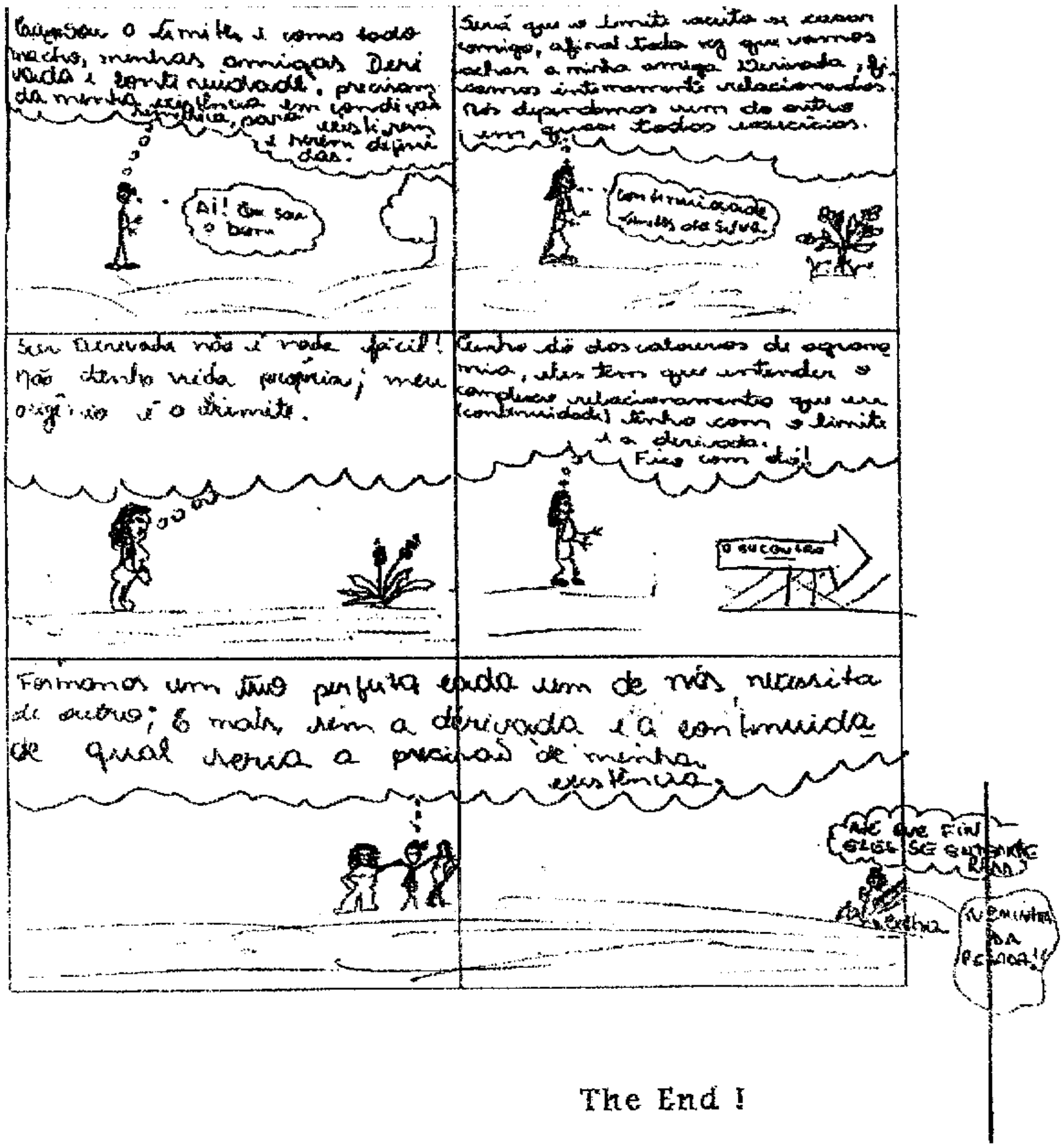


The End !

Gibi 11: alunos – 26, 25, 22

Título do trabalho: ***Os três matematiqueiros***

Este grupo começou falando da importância do limite para a determinação da derivada e da continuidade. Apesar de bastante geral, o grupo demonstrou ter compreendido as relações e se utilizou do gibi para expressar seus sentimentos, desenhando inclusive a professora ao final.



ANEXO V

Atividade desenvolvida no Laboratório de Informática: Funções Lineares e Afim

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Disciplina: Matemática
Professora : Maria Bethânia S. dos Santos - **βetha**
Curso : Agronomia

Aluno (a) :____

Estudo de gráficos

Utilizando-se do Graphmatica, faça o que se pede . Siga o roteiro cuidadosamente, qualquer dúvida, solicite a ajuda da professora.

1. Trace o gráfico de y = x
2. Trace o gráfico de y = x + 3
3. Trace o gráfico de y = x – 3
4. Trace o gráfico de y = - x + 3
5. Trace o gráfico de y = - x – 3

Responda :
1.O que você pode perceber com relação ao comportamento desses gráficos?
2. Existe alguma relação entre os gráficos 2 e 4 ?
3. Existe alguma relação entre os gráficos 3 e 5
4. E o gráfico 1 com os outros gráficos restantes?

Continuando nossos estudos , trace agora os seguintes gráficos :

1. y = 1
2. y = 2
3. x = -3
4. x = 5
5. y = 0
6. x = 0

Comente sobre os gráficos que você desenhou. O que você pode perceber em cada um deles?

Para finalizar, trace os gráficos de :
1. y = 2x
2. y = - 5x
3. y = ½ x

ANEXO VI

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA: APLICAÇÕES DA DERIVADA

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Matemática
Turma : Agronomia – "C"
Professora: Maria Bethânia - βetha

☺Estudo com o Graphmatica

Em aulas anteriores vocês receberam uma lista para que construíssem os gráficos utilizando-se dos pontos críticos e através dos cálculos dos limites - gráficos de várias funções. O objetivo do estudo de hoje é que vocês verifiquem estes gráficos, comparando-os com os que vocês fizeram, sem a utilização do Graphmatica.

Importante: Se vocês não fizeram estes cálculos, faça-os e em seguida compare o que vocês acharam algebricamente com os gráficos.

Exercícios da Primeira Lista !!!!

1. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e esboce os gráficos (calcule para isto os limites necessários)

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$
d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

2. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$
c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

3. Esboce os gráficos. (Novamente aqui a idéia é de que vocês comparem com o que já deveriam ter feito.. se não fizeram, o momento é este!)

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$
c) $f(x) = x^4 - 2x^2$
d) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

☺ Após esta primeira parte, responda:

1. Vocês encontraram dificuldades em determinar as regiões de crescimento e decrescimento nos primeiros exercícios? Quais?
2. Os limites auxiliaram na hora de esboçar os gráficos?
3. Vocês sabem diferenciar os pontos de máximo e mínimos locais, bem como os pontos de inflexão? Sentem-se seguros na utilização, por exemplo, do teorema da Segunda derivada?

☺ **Segunda Parte!!!!!**

Vá em View, em seguida em Graph Paper e escolha lá Trig.

Vocês vão estudar, agora, máximos e mínimos e pontos de inflexão de algumas funções trigonométricas.

Determine : as regiões de crescimento e decrescimento , os pontos críticos de cada uma das funções abaixo, não se esquecendo de que:

No Graphmatica : seno = sin
cosseno = cos
tangente = tan

E as relações : cotangente é o inverso da tangente
cosecante é o inverso do seno
secante é o inverso do cosseno

1. f(x) = sen(x)
2. f(x) =cos (x)
3. f(x) = tag(x)
4. f(x) = sec(x)
5. f(x) = cosec(x)
6. f(x) = cotag(x)

☺ ☺ **<u>Para finalizar !!!!!!!!</u>**

Crie um gráfico e em seguida um problema para ele.

Utilizando-se da teoria estudada resolvam o problema que vocês propuseram, fazendo o estudo necessário para isso.

ANEXO VII

ESTUDO DIRIGIDO REFERENTE À CONTINUIDADE

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Matemática
Professora: Maria Bethânia - βetha
Turma: Agronomia – "C"

Estudo Dirigido referente à Continuidade e Derivabilidade

Primeira Parte.

Durantes todo este tempo estivemos estudando conceitos importantes do Cálculo I.Começamos com revisões de várias funções (afim, linear, quadrática,exponencial etc). Em seguida, estudamos de maneira direta a derivada. Quando estudamos o conceito formal da derivada nos utilizamos de limite (outro conceito importantíssimo).Até a aula anterior estávamos trabalhando limite, mas durante este estudo outro conceito novo foi surgindo: a continuidade.

O objetivo do estudo de hoje é "fechar"estes três conceitos, verificando as ligações de um com o outro.

Leia este pequeno resumo que se segue, mas não deixe de recorrer ao seu livro.Estude os exemplos e depois responda às questões para serem entregues à professora. Em caso de dúvida, recorra à ela.

Continuidade

Os matemáticos de antigamente diziam que uma função era considerada contínua quando o seu gráfico não apresentava qualquer ruptura. A definição moderna de continuidade depende da noção de limite.

☺Livro texto (definição 4.1 pág 68)

Dizemos que uma função é contínua no ponto x = a se f(x) aproximar o valor f(a) com x tendendo ao valor a. Para mostrarmos que uma função é contínua em um ponto x_0, devemos constatar:

1. f estar definida em x_0
2. existir o lim f(x) quando $x \to x_0$
3. limite de f(x) for igual a $f(x_0)$ quando $x \to x_0$

A interpretação gráfica da continuidade é a idéia de um gráfico sem saltos,quebra ou ruptura.

☺Definição 4.2 (livro texto – pág 68)

"Dizemos que f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os pontos desse intervalo."

Derivabilidade

O fato de uma função ter derivada num ponto implicará na continuidade dela nesse ponto, ou seja, toda função derivável num ponto x = a é contínua nesse ponto.

☺Livro texto (Teorema 4.1 – pág 71)

A derivada está associada a idéia de se apoiar uma reta tangente à curva em um determinado ponto, mas quando isso poderá ocorrer ?

Para isso, se faz necessário que a função não apresente angulosidade ou ponta. (tente imaginar isso graficamente!! Se uma função possui "bico" poderíamos apoiar várias retas tangentes à curva neste ponto e não uma única !!).

Quando procuramos determinar a derivada de um função num ponto x = a, pode acontecer que a razão incremental tenda para um valor quando h→0 positivamente (pela direita) e a outro quando h→0 negativamente (pela esquerda). Isso mostra que a razão incremental que estamos considerando realmente tem dois limites laterais diferentes, dizemos que a função tem derivadas diferentes, à direita e à esquerda (as chamadas derivadas laterais) no ponto considerado, logo esta função não terá derivada no sentido ordinário, isto é , com h→0 por valores positivos e negativos.

☺Livro texto - Definição 4.3 – pág 75

- Definição 4.4 – pág 75

Se já está seguro desta primeira parte, peça a segunda !!!

Responda com cuidado e atenção..na dúvida, retome à esta primeira parte para nova leitura.

Segunda parte

Julgue cada frase abaixo em verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha.

1. Toda função contínua é derivável.
2. A continuidade está associada a idéia de se poder mover um ponto ao longo de uma curva.
3. Para sabermos se uma função é contínua ou não em um ponto basta verificar se ela está definida neste ponto.
4. Para uma função ser derivável em um ponto ela só precisa estar definida neste ponto, ou seja, ser contínua neste ponto.
5. Se os limites laterais de uma função forem diferentes em um determinado ponto, isso indicará que a função não terá derivada neste ponto considerado.

☺ Para finalizar:

1. Mostre algebricamente e graficamente que a função sentença f(x) = $\begin{cases} x^2, 0 \le x < 1 \\ (x-2)^2, 1 \le x \le 2 \end{cases}$ em x = 1 é contínua e derivável neste ponto.

2. Mostre que a função abaixo é contínua e derivável em no ponto x = 0. Trace o gráfico da função e também da reta tangente a esta curva no ponto neste mesmo ponto.

$$G(x) = \begin{cases} x^2+1, x \le 0 \\ -x^2+1, x > 0 \end{cases}$$

3. Mostre que a função abaixo não é contínua em x = 0 e, portanto, também não é derivável neste ponto.

$$H(x) = \begin{cases} -x+1, x \le 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

ANEXO VIII

ESTUDO DIRIGIDO REFERENTE A LIMITE

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Disciplina: Matemática
Professora; Maria Bethânia - βetha
Turma: Agronomia – "C"
Estudo dirigido referente a Limite

Na aula anterior discutimos sem muita formalização o conceito de limite, trabalhando essencialmente as idéias intuitivas. A finalidade deste estudo é melhorar esta idéia e conseqüentemente o seu aprendizado com relação a este novo conceito.

Primeira parte: Leia atentantemente a teoria, destacando o que você considera mais importante e marcando aquilo que não esteja muito claro para você.Solicite a ajuda da professora quando você julgar necessário.
Livro do Mauro Urbano – Capítulo 3 - págs 45 à 60.
Livro do Geráldo Ávila – Capítulo 4 -págs 76 à 84.

Segunda parte :

Responda as questões:

1. O que você entendeu por limite?
2. Qual a importância de se olhar os valores para quais x está tendendo pela direita e pela esquerda? Qual a importância destes limites laterais ? Será que poderemos sempre calcular estes limites ? Por exemplo : Pense na função f (x)= $\sqrt{x}$ (exercício deixado na aula anterior) , se pedíssemos para você calcular o limite desta função com x tendendo a zero, o que você faria? Poderíamos determinar estes limites ? Tanto com x tendendo a zero pela esquerda quanto pela direita ?
3. Quando é que podemos afirmar que o limite de uma função existe? (Recorra às definições!!)
4. Você acha que podemos ver a continuidade de função algebricamente , pelo cálculo do limite da função no ponto considerado ? Por que ? Exemplo: Estude a função da letra c do exercício deixado na aula anterior.
5. O que você entendeu por formas indeterminadas?

Terceira parte:

Determine os seguintes limites :

☺ Use a calculadora !!!!

a) Da função f(x) = $\frac{1}{x}$, com x tendendo a 0 pela esquerda e pela direita.

b) Da função g (x) = $\frac{1}{3-x}$, com x tendendo a 3 pela esquerda e pela direita.

c) Da função h (x) = $3x^2 + 4x + 1$, com x tendendo a infinito $+\infty$.

d) Da função r (x) = $3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, com x tendendo a $+\infty$.

e) Da função t(x) = $\frac{2-x}{1+3x}$, com x tendendo a $\pm\infty$.

Agora responda :

1.Que diferenças você pôde perceber entre os resultados ?
2.Pelos exemplos que você trabalhou, diferencie Limites Infinitos de Limites no Infinito.

ANEXO IX
DIÁRIO DA PESQUISADORA

Diário da Pesquisadora

Turma : Agronomia – C
2 aulas semanais de 1,5 h de duração
Ano: 1999

19/04

Meu primeiro contato com a turma. Foram pouquíssimos alunos (12). Expliquei o programa da disciplina e como seriam feitas as avaliações. Os alunos (calouros) estavam muito tímidos ainda.
Passei um questionário para eles. Uma das garotas já foi dizendo que não sabia nada de matemática e que a odiava também.
Durante o resto do tempo tentei sondar o que eles sabiam, mas a maioria já foi logo dizendo que não se lembravam de nada com relação a funções.
Alguns disseram gostar de matemática

26,28/04 – Sem aula – Calourada

03/05

Neste dia ocorreu um imprevisto, fui para o mini - auditório e ele estava trancado, todos os alunos esperando na porta. Perdi um certo tempo até descobrir onde buscar a chave, abrir a sala etc.
A turma este dia apareceu.
Retomei algumas coisas ditas na aula anterior, passei a bibliografia mínima. Com base nas respostas dos 12 reestruturei outro questionário e passei para a turma (incluindo os 12 da 1ª aula). Percebi alguma resistência para responder o questionário, tive que explicar várias vezes que este era para que eu pudesse conhecê-los melhor e tirar parâmetros para minhas aulas iniciais ressaltando que eles não se preocupassem com o que não soubessem, pois estaríamos retomando estes conteúdos.
O objetivo desta aula era começar a revisão de função afim e linear.
Utilizei-me de dois problemas (do botijão de gás e do táxi) e achei que foi bem interessante. Apesar da timidez, alguns alunos começaram a participar mais. Com a heurística fiz com que eles "acordassem" mais.
Nesta aula já se destacou a diferença dos domínios das funções quando estas estão em um problema real.
Alguns alunos disseram não se lembrarem de mais nada daquilo.
Comecei a fazê-los interpretar o c.a como uma taxa de variação de y por unidade de x, isso causou um certo espanto na turma, mas pelas respostas dadas com relação às perguntas que faziam, percebi que eles começaram a entender.
O último exemplo, do campo de futebol, eles já tentaram resolver sozinhos, sendo que só alguns conseguiram de fato. Houve dúvidas com relação ao gráfico e à sua interpretação.
Ao final da aula, deixei alguns exercícios para que eles trabalhassem sozinhos, 5 exercícios (lista 01).

05/05

Nesta aula, passei um pequeno resumo (estudo dirigido) para eles retomando à interpretação do c.a como uma taxa de variação e explicando o que seriam grandezas diretamente proporcionais.
Usei como motivação inicial o texto da pipa (RPM) e eles gostaram muito !!
O trabalho foi bom, houve um pouco de conversa mais alta do que o permitido, mas achei que eles estavam empolgados com este tipo de atividade.
Muitos alunos "choramingaram": - ai, tá muito difícil
- Não estou entendendo nada.
Outros se manifestaram dizendo que sabiam entender, mas não sabiam escrever, explicar o que estava acontecendo.
A participação foi muito boa, ia auxiliando-os nas carteiras. Sempre respondia seus questionamentos com outras perguntas para que eles refletissem sobre o assunto que estava sendo estudado.
Eles trabalharam em dupla (1ª parte)
Depois resolveram 4 exercícios individualmente para serem entregues ao final da aula.
Percebi que eles têm muito forte a idéia de coeficiente angular e só !
Entender este coeficiente como uma taxa é o que eles têm tido certa dificuldade.
Também em explicar o que seriam grandezas diretamente proporcionais.
Quando eles se sentiam inseguros, pedia para que eles pensassem em exemplos que eles classificavam como diretamente proporcionais e tentassem identificar elementos que dessem a eles parâmetros para classificá-las assim.
Ficou bem perceptível a dificuldade em escrever sobre isso <u>e principalmente o medo de escrever, o medo de errar.</u> Estou tentando fazer com eles comecem a adquirir mais confiança em si mesmos, evitando de me mostrarem tudo que escrevessem.

10/05

Aula no laboratório de informática com a utilização do Graphmatica
Tive receio em programar esta aula achando que poderia não dá certo, mas minhas expectativas foram superadas.
Houve uma intensa participação da turma. O único problema foi que só houve tempo para ser dada uma das atividades que havia programado (afim, linear etc) , ficou a parábola para depois.
Os alunos se empolgaram muito, houve muitas manifestações positivas com relação ao aprendizado deles próprios.
No início eles não entenderam bem o que era para ser feito, mas expliquei que o objetivo da aula era o aprofundamento dos nossos estudos anteriores. No final da aula deu tempo para eles trabalharem superficialmente com a parábola.

12/05

Nesta aula (expositiva), fechei com eles todo o estudo feito para funções do 1º grau, ressaltando como achar equações gerais das retas.
Alguns alunos, na aula anterior, relembraram as condições de paralalelismo e perpendicularismo.Deixei para eles estudarem a equação da reta por determinante.
Nesta aula trabalhei a taxa de variação média, ou seja, grandezas não – proporcionais.
Através de uma parábola, mostrei que a forma de calcular a taxa continua a mesma, a

única diferença é que esta taxa é média, a variação de y por unidade de x de intervalo para intervalo não é mais constante como na do 1° grau.
Deixei um pouco da aula para eles olharem os trabalhos anteriores feitos para mim. Não houve quase nenhuma reclamação.
Os alunos demonstraram vontade de ir para o laboratório novamente.
Achei que eles ficaram com certa dúvida no fato de $x = x_0$ não ter coeficiente angular. Vamos ver se daqui uns dias minhas suspeitas se confirmarão.

P. S Nesta tarde 2 alunos foram à minha sala e quando questionados por mim não souberam dizer o por quê de $x = x_0$ não Ter coeficiente angular.

17/05

Nesta aula os alunos voltaram a fazer cálculos relativos à taxa de variação média, só que desta vez, noutras funções.

- Eles determinaram a taxa de variação média em dois intervalos, estabeleceram o domínio e a imagem de cada uma das funções (exponencial, hipérbole, logarítma). Este estudo foi feito de maneira individual, pedi para os alunos que tivessem dúvidas que chamassem e eu os ajudaria na carteira.

A aula foi muito boa, percebi várias dificuldades deles neste momento. Alguns exemplos:

- confundiram a notação de intervalo com par ordenado. Ao verem [-2, 4], acharam que tinham x e y.
- algumas dificuldades (poucas) em traçarem o gráfico (inseguros se o desenho era aquele mesmo).
- Outros não reconheceram a hipérbole
- Alguns falaram nunca terem visto tais gráficos
- Nas explicações individuais pude perceber que a grande maioria não tinha domínio sobre a definição de tais funções e, mesmo após a leitura destas, não se sentiam seguros.
- Houve surpresa na hora que explicava para eles que a exponencial era a inversa da função logarítma. Para um bom número de alunos isso foi uma novidade. A questão de fazer a pergunta para a função na hora de resolvê-la algebricamente.

$F(x) = 2^x$ - se o meu x vale -3, qual será o valor de $f(-3)$?
$F(x) = \log_2 x$ – a pergunta aqui muda para : A que número eu devo elevar o dois para que eu ache x ? Por exemplo, quando o meu x é 1/8, qual deverá ser o expoente para x para que possamos achar 1/8?
Eles realmente se surpreenderam com tais questões e senti muito interesse e participação da turma nesta aula.
Para encerrar entreguei uma lista com exercícios gerais (determinar equações, coeficientes, retas paralelas, perpendiculares etc) para eles trabalharem nos minutos finais e terminarem em casa.

19/05

Nesta, trabalhamos a idéia de variação no ponto. Através de questionamentos gerais e paralelos entre a função de 1° grau e a do 2° grau , perguntava:

- se a taxa média, na função de 2°grau, por exemplo, não me dá jeito de achar a variação em um ponto, o que fazer??

Um dos alunos sugeriu: "Vamos começar a fazer média das médias!".

Através de exemplos, discutimos o fato de que na função de 2° grau, as taxas mudam muito de intervalo para intervalo.
Retomei `a idéia de coeficiente angular da reta (na do 1°grau) e comecei a induzi-los à idéia de aproximação de pontos pela curva, secante que vai virando tangente (porque esta tangente retorna à idéia da função do 1°grau, sua variação que é a). Comecei a falar de uma reta tangente no sentido de "aproximação" . Aqui já começa a idéia intuitiva de limite --Brinquei com eles usando expressões da forma:

- "Como medir a inclinação de uma curva? A curvatura de uma curva?"

Ao dizer que "aquilo" era a derivada, notei que eles me olharam como se perguntassem : - 'É só isso??? A tão famosa derivada????Impossível !
Ao serem questionados com relação ao entendimento deste conceito, poucos se manifestaram dizendo não terem entendido. Tentei solucionar estas dúvidas ainda me utilizando dos exemplos que havíamos trabalhado.
Meia hora antes da aula acabar pedi que redigissem uma carta para alguém explicando o conteúdo que estávamos estudando desde a 1ª aula: taxa de variação, taxa de variação média e taxa de variação no ponto – a derivada – a "choradeira" foi grande, mas eles acabaram fazendo quando explicitei os meus objetivos com relação a este trabalho.
Durante a aula, brinquei com eles no sentido de "começarmos a falar difícil". Passei para eles a definição (algébrica) da derivada e eles gostaram muito. Durante todo o tempo deixei claro que estaríamos estudando mais profundamente <u>limite.</u>
Eles fizeram exercícios (exemplos) para achar a derivada da função pelo limite da razão incremental – como conseqüência – mostrei para eles de onde vinha a 1ª regra de derivação e como ficava fácil o cálculo da função derivada pela regra. Percebi curiosidade da parte deles em saberem estas regras. Um dos alunos afirmou:

- "Que bom ! não vamos precisar fazer essa contaiada "

Percebi também certa angústia, mas tranquilizei-os dizendo que aquela era a nossa 1ª aula de derivada, que estaríamos retomando este estudo ainda várias vezes, e o que não tivesse ficado claro, outras oportunidades seriam dadas para sanar estas dificuldades.
Uma das alunas chorou na hora de escrever a carta. Tive que convencê-la , ela se julgava totalmente incapaz de realizar tal atividade.

26/05

A proposta desta aula era colocar alunos com níveis de dificuldade variados para trabalharem juntos.
O estudo dirigido foi feito 3 a 3.
A participação foi muito boa e tirei as dúvidas grupo a grupo.
Só alguns dependentes conseguiram me irritar nesta aula.

31/05

Fiz novamente aula no laboratório de informática. Trabalhamos a parábola e a hipérbole.
Desta vez deixei o estudo mais livre, entreguei o roteiro, mas não exigi que me entregassem ao final da aula.
Alguns alunos terminaram antes do prazo, mas continuaram no laboratório estudando as outras funções (logaritma, exponencial, trigonométrica).
Percebo que os alunos ainda não adquiriram confiança em si mesmos. A todo momento (inicialmente) tive que reforçar a idéia de <u>estudo</u> , que eles estavam no laboratório para investigar gráficos, fazer comparações , analisar, interpretar e <u>só depois disso concluir.</u>

Com relação à 1ª aula de laboratório percebi que os alunos estão mais desenvoltos no programa (graphamatica), mas o medo de fazer tentativas é algo incrível, até mesmo no manuseio do aplicativo.
Eles ainda têm bastante forte a idéia do:
- Faz para eu ver como é que é !
- Eu não vou dar conta
- O que você quer que eu fale sobre isso??

E eu tive que estar reforçando:
- Fale sobre o que você está vendo !
- Que alterações você está percebendo?
- Você nota diferenças? Quais são elas?

Durante este período ia deixando claro o que esperava deles ao final da aula - os meus objetivos .
Como é que se faz para inverter a parábola?
E para deslocá-la ? E para modificar a amplitude ?
Vocês têm que dar conta de responder tais questões ! Só de olhar a expressão, comparando – a com a nossa "mais simples" – (a mais simples seria a parábola com o eixo em y e vértice (0,0).

Idem para a hipérbole.
Os alunos sentiram maiores dificuldades neste estudo, mas isso eu já havia previsto.
A próxima aula será avaliação de todo este conteúdo.
Eles ficam muito surpresos quando percebem que suas deduções estão corretas, parecem não se acreditarem capazes de fazerem descobertas.
Ao final da aula houve muitos questionamentos com relação à prova, como seria – vou me pautar nas coisas que estivemos fazendo .
Disse um dos alunos :
- O problema é perguntar essas coisas simples, a gente sempre erra, agora pergunte coisa difícil que a gente acerta!

02/06

Fiz uma avaliação com a turma (uma prova), percebi o quanto eles tem medo deste tipo de avaliação. Na hora de entregar a prova, alguns alunos (uns 5 ou 6) diziam:
- Não olhe agora, por favor
- Deixe pra ver em casa
- Não olha não !
- Você me confundiu, errei umas coisas de bobeira !!! Como é que pode? (fala de um aluno que é dependente)

07/06

Alguns alunos "mataram" aula, acredito que em conseqüência do feriado na Quinta-feira passada.
Comecei a aula falando do desempenho deles na prova (que a maioria tinha se saído bem), mas que eu tinha percebido alguns erros que haviam me deixado desnorteada.
Questão por questão da prova fui perguntando como se resolvia, as formas diferentes de se resolver e ia falando dos erros encontrados durante a correção.
Eles ficaram muito atentos, de vez em quando exclamavam:

- Ah !!! Não é possível !! Errei isso?
- Professora, teve algum zero??
- Isso eu errei !!!
- Isso eu acertei !!
- Não professora ! Pára com isso, não quero mais nem saber !!!
- Entrega logo a prova !

Em um dado momento um dos alunos me "acusou" de não Ter explicado a questão da função constante ter derivada zero. Fui ao quadro, desenhei um gráfico e o fiz recordar as conclusões que ele mesmo havia chegado durante o estudo.

- Vocês se lembram que quando fizeram análise da função constante vocês disseram que ela não tinha "variação"?? O que isso significava??? Vocês mesmo concluíram.

Uma das alunas ressaltou a diferença entre a função constante e a expressão
X = 2 (Isso não é uma função !)
Depois disso passamos para o estudo inicial (idéia intuitiva de limite). Usando a heurística, retomei a aula da derivada e fiz questionamentos do tipo:

- E se a função tivesse um buraco? Teria jeito de eu Ter "caminhado" na curva até chegar tão próximo do ponto a ponto de a reta secante se transformar na reta tangente???
- Por que estudar limite???
- O que limite tem a ver com continuidade???
- Vamos começar a relacionar estas coisas agora : derivada, limite e continuidade.

Briquei com eles fazendo comparações com aquele comercial da Tostines: "Por que é que vende mais??"
O que implica em que???

- Toda função contínua é derivável ??

Os alunos prestaram muita atenção na aula, só se exaltaram quando faltavam 10 minutos para a aula acabar, pois havia combinado de ler as notas neste horário.
Reclamaram (como sempre) dos exercícios – que estavam com preguiça de pensar, etc.

P. S . Neste dia , 6 alunos foram ver as provas na minha sala. Nenhum reclamou da nota recebida. Ficavam chateados ao perceberem que podiam Ter se saído melhor...

Ao trabalhar limite, comecei fazendo perguntas com relação à palavra:

- O que é limite? O que vocês pensam quando lêem limite?

Existem expressões do tipo:

- impor limites
- sua mãe lhe impõe limites?
- É no sentido de delimitar??

Nesta aula expliquei também o que era uma função-sentença me utilizando do exemplo:

$$\begin{cases} -x^2, x \leq 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

Uma das alunas disse: - nunca vi isso na minha vida!!!
Mostrei para eles como era simples e que para saber bem uma função-sentença, bastava dominar as funções que havíamos estudado.
Que ela não era assim tão diferente e complicada.
Não percebi <u>nenhuma</u> dificuldade para os alunos entendê-la.

09 / 06

O objetivo desta aula de hoje era realizar um estudo dirigido aprofundando o estudo de limite iniciado na aula anterior.
Não consegui atingir meus objetivos.
Havia colocado eles para trabalharem dois a dois, sendo entregue o trabalho individualmente.
Houve transtorno já no início da aula, pois fomos obrigados a ir para outra sala (bem menor) . Os alunos ficaram muito dispersos e agitados.
Existe também uma grande resistência por parte de alguns alunos em realizarem um estudo como esse. Sempre reclamam, dizem – se incapazes, afirmam que não vão dar conta, etc.
Um medo de errar tremendo !
Medo de não estarem percebendo o que é certo em UMA ÚNICA LEITURA.
Ao final da aula expliquei o objetivo deste tipo de estudo e deixei que me entregassem o trabalho na próxima aula.
Outra coisa que atrapalhou foi o fato de muitos deles ainda estarem sem o livro.
Frisei a importância de terem um livro texto. Alguns disseram ter deixado o livro em casa, pois não havíamos trabalhado muito com ele até então.
Esta também foi outra falha minha, esquecer de avisá-los que usaríamos o livro nesta aula.
Espero que em casa eles possam tentar responder as questões propostas.

- Outros alunos foram à minha sala verem suas provas, pediram explicações sobre alguns itens. Nenhum reclamou da nota recebida e mais uma vez afirmaram ter consciência de terem errado só "bobeiras".

Na aula seguinte vou fazer questões (orais) com relação ao trabalho para ver os resultados deste estudo que acabou virando "trabalho".
Obs: já foram várias as vezes que tivemos que mudar de sala na Quarta-feira e encontramos a outra sala fechada na Segunda-feira.

14/06

Nesta aula formalizei todos os conteúdos referentes a limite – de funções polinomiais, racionais, etc - Operações com limite.
Os alunos já de início me entregaram o trabalho deixado na aula anterior, reclamando mais uma vez:

- Ah..não dei conta de fazer tudo !
- Você vai considerar o trabalho mesmo errado?
- Precisa entregar mesmo?

É incrível como tenho que estar repetindo o tempo todo que avalio de formas variadas e o porquê de se fazer tais trabalhos.
Eles se tranqüilizaram quando disse:

- Na aula de hoje vou explicar tudo!! E o objetivo não era o de não dar esta aula ! Se quisesse que vocês dessem conta de fazer TUDO sozinhos já estava dando outro conteúdo !

Ao explicar o conteúdo e me utilizar de exemplos mais uma vez percebi o problema com a matemática básica:

- Dificuldades em colocar um termo em evidência
- Dificuldades em operar com potências de mesma base.

Mas, de maneira geral, a aula foi boa. Percebo que alguns alunos estão perguntando mais.
Eles ficaram intrigados com as formas indeterminadas !

- Mas, ∞ / ∞ não dá pra determinar?
- E 1 elevado à ∞ não é 1 ?

Usei outras perguntas para fazer eles pensarem mais:

- Como é que eu posso saber que ∞ / ∞ é 1 ?? Pode ser que tenha um infinito maior que o outro, não ? (falei dos números naturais e números reais).

Infinito é um número tão grande, tão grande que eu não posso tentar aplicar nele as mesmas regras que usei com os números que eu conheço !
Ao final da aula eles me disseram:

- Até que tá fácil até agora – se não se complicar mais na frente...
- Como vamos saber resolver os limites?

Vamos ter que fazer muitos exercícios !!!

- Não passe difíceis, só fáceis (comentário a respeito da lista que vou elaborar para a próxima aula).

16 / 06

A atividade de hoje teve o objetivo de finalizar parte do conteúdo.
Na primeira parte da aula entreguei o roteiro com as orientações a respeito da carta que eles deveriam escrever para mim, que conteúdos ela deveria abordar.
Deixei claro que não queria que eles refizessem o trabalho para mim. Usei do argumento que pela carta eles poderiam me convencer de que eles teriam reestruturado idéias que poderiam estar confusas na aula anterior à última dada.
Algumas resistências ocorreram, medo de errar – gritante ! medo de falar sobre o que pensam !
Aos que iam terminando, entregava uma lista (grande – 40 exercícios) para serem resolvidos começando naquele momento.
A participação foi boa ! Com exceção de 2 alunos, o restante da turma respondeu bem à aula.
Tirei as dúvidas individualmente.

21 / 06

Nesta aula, utilizando-me do retroprojetor expliquei para a turma o limite fundamental nas funções trigonométricas.
Provei passo a passo porque o lim. de sen(x) sobre x quando x tende a zero é 1. Eles prestaram bastante atenção.
Um dos alunos comentou:

- Isso está fácil demais para ser verdade.

Durante a explicação falei das funções trigonométricas, grande parte da turma disse não saber nada de trigonometria. Outros falaram nunca terem estudado tais conteúdos.
Tranqüilizei-os dizendo que, tais conteúdos, estaríamos estudando logo em seguida- funções trigonométricas.
Mostrei através de um exemplo como utilizar o limite fundamental e deixei o outro para eles estudarem sozinhos.

Às 10: 18 subimos para o laboratório para que eles estudassem as funções trigonométricas.
Desta vez entreguei os roteiros para o estudo e pude perceber que mesmo não pedindo que eles me entregassem ao final da aula, eles participaram muito bem. Eles aprenderam que estão no laboratório para um estudo e sendo este estudo feito em duplas, percebo que isso aumentou o interesse e a participação. O tempo todo que eles ficaram no laboratório foi discutindo o assunto, comparando gráficos, fazendo análises. Não tive nenhum problema com alunos querendo entrar em outros programas ou dispersos.

23/06

O objetivo desta aula foi trabalhar a compreensão de leitura.
Fiz um pequeno resumo com as definições principais e teoremas e dei para que eles fizessem a leitura.
Eles sempre têm resistência na hora de fazer a leitura, mas com minhas argumentações eles se convenceram e começaram a trabalhar. Tirei as dúvidas individualmente. Percebi que os alunos querem aprender tudo e entender tudo muito rápido. Com uma única leitura queriam entender tudo.
À medida que ia percebendo isso, ia fazendo perguntas, mostrando a necessidade de terem que ler mais de uma vez !
Na segunda parte, pude constatar isso de novo ! Por terem lido pouco ficaram com dúvidas nas questões. Tive que falar o tempo todo de "sabermos ler" e ler o tanto de vezes que fosse preciso para entender.
Um dos alunos comentou : - professora a sra sempre tem resposta pra tudo, né?
Estou sempre lembrando o exemplo da leitura do artigo que falava da pipa dizendo que não quero que eles façam aquele tipo de leitura.
O medo de errar é tanto que eles têm medo de escrever. Alguns chegaram a perguntar se com respostas erradas eles perderiam ponto no trabalho.
Deixei claro que a avaliação tinha outro objetivo. E que eles se tranqüilizassem, pois estaríamos retomando estas questões na aula seguinte.

28 / 06

Nesta aula distribui o trabalho anterior para eles. A idéia era que eles corrigissem o trabalho de um colega e me devolvesse para que recebessem, desta maneira, o seu trabalho com dois comentários (o meu e o do colega).
Fui corrigindo no quadro exercício por exercício. Eles gostaram muito da idéia e tiraram as dúvidas. Notei que nesta aula eles já não tiveram medo de pedir para explicar novamente trechos que não haviam entendido.
Terminando esta atividade, para finalizar o trabalho com os conceitos passamos para a elaboração de gibi. Eles ficaram MUITO SURPRESOS com aquela atividade. Houve vários comentários. Apenas dois alunos estavam resistentes, mas quando viram os outros trabalhando começaram a fazer (e fizeram !).
Ao final da aula avisei que a próxima aula seria inteiramente de exercícios, já que vai ser a última aula antes das férias.

30 / 06

Como esta foi a última aula antes das férias, elaborei uma lista de exercícios retomando inclusive conteúdos trabalhados anteriormente,
Alguns alunos mataram aula.
A turma trabalhou bem, sem encontrarem grandes dificuldades nas resoluções. Alguns alunos resolveram a lista quase toda.
Ouvi muitos comentários no sentido de :

- Nossa vou estudar muito mais !!!
- Quero sair bem em agosto !!

(Isso veio do fato de termos adiado a prova para agosto)
Como foi aula de exercícios, transcorreu sem problemas. Os alunos participaram muito bem ! E são bem empolgados com relação às descobertas.
Percebi que um dos grupos (deixei eles trabalharem livremente) chegou a discussões intensas, mas o mais interessante é que só quando se esgotavam TODOS os argumentos entre eles é que me chamavam...
A parte interessante do trabalho em grupo é esta, ao se questionarem, eles próprios percebem onde estão mais seguros ou inseguros. Um dos alunos (deste grupo) comentou:

- Ah !! não professora ! Esse cara faz cada pergunta ! Quando eu penso que estou certo, ele me convence que não estava, mas depois que penso mais vejo que quem estava errado era ele.

Gostei de ouvir isso, pois este é um dos meus objetivos com os trabalhos em grupo.
Outra aluna, ontem me disse:

- Professora você força demais a gente a pensar ! parece que quer fazer suquinho de nós !

Depois terminou dizendo:

- Eu acho isso bom porque eu só pego "no tranco".

E a aluna 01 concordou dizendo que também só "aprendia" assim.

AGOSTO – RETORNO ÀS AULAS

09 / 08

Na aula de hoje levei todas as atividades anteriores para se fazer uma retrospectiva do que foi visto.
Montei 7 grupos, distribui 7 pastas, pedi para que cada grupo elegesse um coordenador para tomar anotações.
A aula não rendeu o que eu queria.
Não sei se por ser a 1ª aula após as férias, os alunos estavam apáticos, mas depois de instigá-los começaram a trabalhar. Todos os alunos, depois da "chamada" começaram a se envolver, mas não quanto eu esperava.
Acredito que falta ainda maturidade na turma para este tipo de trabalho.
3 alunos me deram bastante trabalho. Se queixaram muito da atividade proposta, choramingaram em excesso. Uma das alunas disse algo que me impressionou.

- Professora por que vc faz isso? Toda aula sua a gente tem que ficar pensando e pensando. Eu não agüento mais.

Usei todos os meus argumentos com eles até desistir de convencê-los e fui auxiliar os grupos que estavam trabalhando.

Outro fator que atrapalhou muito foi o fato de ter prova na próxima aula.

Queriam , por toda e qualquer justificativa, adiar a prova para semana que vem. Lembre – lhes que eles haviam estipulado a data, eu havia aceito e que, por isso mesmo, não ia alterar.

Alguns se queixaram de terem esquecido as "coisas" e eu argumentei dizendo que a atividade proposta era justamente para retomarmos esses conteúdos, sanar as dificuldades, discutir com (e aprender) o colega.

Ao final da aula conversei com eles, reafirmando que muitas coisas eles já sabiam, só precisavam melhorar alguns aspectos e que uma nova leitura da teoria e exercícios ajudaria.

Amanhã à tarde reservei 2 horas para os alunos que quisessem tirar dúvidas. Alguns alunos ficaram com seus trabalhos para estudarem, entre eles, a aluna que reclamou muito durante a aula de hoje.

12 / 08

Avaliação geral referente aos conteúdos : Limite, continuidade e derivada.

16 / 08

Aula expositiva das regras de derivação

Fui colocando regra por regra e dando exemplos. Os alunos fizeram comentários do tipo:

- Bom demais pra ser verdade.
- Mais na frente deve complicar.

Como gastei pouco tempo, acabei explicando também a regra da cadeia (me utilizando de funções compostas).

Expliquei que gostaria que eles tivessem domínio sobre estas regras e não íamos mais utilizar limite da razão incremental para determinar a derivada de uma função. Que as regras vieram para agilizar o processo pois, pela derivada, iríamos resolver mais coisas de agora para frente.

O que me surpreendeu foi o fato de alguns alunos (inclusive um que está fraco em seu desempenho) terem entendido a regra da cadeia tão rapidamente.

Ao final da aula passei 10 exercícios para eles aplicarem as regras. Alguns confundiram, querendo usar a regra da cadeia, mesmo em funções que não eram compostas.

Achei isso normal, já que foi a 1ª vez que eles viram tais regras.

Percebi dificuldade em potenciação.

Li as notas deles da prova.

Alguns se surpreenderam . Chamei a atenção daqueles que não estavam bem. Alguns destes vieram conversar comigo, dizendo que irão me procurar no horário de atendimento.

18 / 08

A aula transcorreu normalmente, só levei uma lista de exercícios para eles trabalharem.
As maiores dificuldades foram em potenciação, eles não lembravam (a grande maioria) das propriedades de potenciação.
Deixei que eles trabalhassem livremente. Alguns formaram grupos, outros preferiram trabalhar individualmente.
Com o problema da greve dos motoristas, alguns alunos não compareceram , fiquei tirando as dúvidas individualmente.
Foram inúmeras dúvidas.
A matéria da 7ª série parece que nunca foi vista por eles. Um deles falou:

- Ah! Professora, quando eu fazia aquela série eu lembrava de tudo, mas agora .

A dificuldade não ficou por conta das regras, mas de conteúdos que apareceram nas resoluções.

23 / 08

Com o intuito de que eles aprendessem derivação implícita, elaborei um estudo dirigido, com exemplos para que eles lessem individualmente e tirassem suas dúvidas comigo.
Eles ficaram, no início, muito confusos, tive que estar frisando o tempo todo que o nosso y agora era diferente, que para cada valor de x, tínhamos mais de um valor de y. ..E por isso derivávamos implicitamente, pois muitas vezes não seria algo fácil *explicitar* o y, para trabalhar da forma que vínhamos fazendo.
Aos poucos eles foram entendendo isso e passaram a resolver os exercícios.
A tendência natural e já esperada por mim, foi eles esquecerem as regras que já haviam aprendido, querendo derivar de outra forma. Tive que chamar a atenção deles com relação a isso.
Por exemplo, a derivada deste produto, alguns queriam fazer da seguinte forma:

$$(x \,.\, y^2)' = x \,.\, 2y \,.\, \frac{dy}{dx}$$

Expliquei e eles refizeram.
Cometi um erro na hora de derivar o y – a maioria chegou em 1 e eu confirmei.
Pude ver este erro se repetir nos exercícios que me foram entregues, mas a culpa foi toda minha. Na próxima aula resolverei um dos exercícios no quadro para retomar em :

$$Y \quad - \quad y' \quad - \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \text{não} \quad 1 \quad !!!$$

Vi o erro ao final da aula, mas preferi deixar para corrigir na aula seguinte para não confundi-los.

25 / 08

Inicie a aula retomando a derivação implícita e corrigindo o erro da aula anterior.
Frisei várias vezes que a derivada de y é . $\frac{dy}{dx}$ e não 1, como havíamos feito na aula anterior.
Resolvi 2 exercícios no quadro, tirando dúvidas com relação a isso.

A derivada de x em relação a y é 1, mas a de y é sempre $\frac{dy}{dx}$.

Depois disso entreguei o resumo de crescimento e decrescimento, após ter explicado no quadro, usando a heurística, a relação entre a derivada, seu sinal e o crescimento e decrescimento da função.

Quando entreguei o resumo, percebi mais uma vez a dificuldade em entenderem o que estava escrito, apesar de ser praticamente A MESMA COISA que havia sido dita na explicação geral do gráfico posto no quadro.

Achei os alunos meio dispersos, e muitos alunos "mataram" aula. Farei atividade valendo nota na próxima aula.

Com relação aos exercícios entregues – eles trabalharam bem, tirando dúvidas. Alguns em grupo, outros de maneira individual.

30 / 08

Hoje retomei ao estudo do crescimento e decrescimento de funções.

Me utilizando da heurística trabalhei basicamente dois exemplos na sala.

Mais uma vez pude constatar que a dificuldade deles está mais na matemática básica do que no cálculo em si.

Combinei com eles que a próxima aula será de exercícios, revisão geral.

Frisei também que estaríamos retornando a esta teoria e que a hora agora era deles ficarem mais "metidos", construindo gráficos se utilizando-se dos pontos críticos e limites da função.

Passei uma lista ao final da aula para eles trabalharem estas questões.

01 / 09

Iniciei a aula retomando um exemplo trabalhado na aula anterior.

Fiz perguntas gerais e depois expliquei a utilização do teorema para o estudo da concavidade da função.

Em seguida, deixei que eles trabalhassem mais um exemplo, indo ao quadro só no final para fechar o exercício.

A participação deles foi muito boa, o fato de eles confundirem, inicialmente, as concavidades foi algo que depois virou brincadeira.

Uma das coisas que têm me chamado a atenção é uma brincadeira que a turma vem fazendo há algumas aulas.

Assim que terminamos de discutir algum assunto, e após eles terem feito seus questionamentos, eles "fecham" me perguntando:

- Não tem nada mais difícil aí não?
- Ah ! Não Betha, tem dó – manda uma coisa mais complicada!

O restante da aula, coloquei eles para trabalharem em trios em 3 exercícios que eles deverão apresentar para mim (nas aulas de reposição que farei depois do feriado).

Deixei claro que os 3 tinham que saber os 3, pois iria escolher aleatoriamente na hora de apresentar.

Dos exercícios:

1 – de gráfico

2 – de problema

3 – regra da cadeia

Eles participaram ativamente. Acho que estava passando da hora de fazer esse tipo de trabalho com eles.

08 / 09

Comecei a aula, entregando uma atividade com redação.
O dia estava insuportavelmente quente, os alunos estavam muito dispersos e tiveram bastante resistência em fazer a atividade (*).
Em seguida, deixei que os trios trabalhassem e foi um problema, pois alguns alunos "mataram" aula, teve trio em que só estava presente um aluno e isso atrapalhou muito o andamento, pois houve grupos que trabalharam bem e outros praticamente não fizeram nada.
A dificuldade deles com problemas está sendo muito grande, o que vem reforçar o que afirmou Vygotsky ! Mas, ainda sim, pude perceber alguns grupos bem próximos das respostas. Vou reestruturar tudo ! Na aula que vem entregarei as resoluções de todos para um estudo dirigido !
Apresentarei mais 3, utilizando ainda o estudo dos sinais e deixarei para cada grupo apresentar.
Mandei avisar que a próxima aula quem perder ficará sem nota na participação para evitar que mais alunos "matem" aula e os grupos se estabeleçam como eu espero.

(*) Com o feriado do dia 07 / 09 acredito que muitos viajaram.
Outro fator prejudicial foi que demorei muito tempo sem dar uma atividade com redação matemática.

10 / 09

Nesta aula entreguei as resoluções comentadas para que o trio estudasse, fizessem a parte referente à comparação com suas resoluções e as apresentadas.
Em seguida, entreguei mais 6 problemas para que eles escolhessem 3 para fazerem.
Alguns fizeram, outros não.
Tenho ouvido muito durante estes dias:
- Meu problema é português !!!

O medo em resolver problemas diminuiu um pouco quando eles perceberam que não estavam tão longe das resoluções que lhes foram apresentadas.

13 / 09

Estudo dirigido com questões relacionadas aos problemas .

15 / 09

Trabalho (leitura com perguntas)
Teste de regras de derivação

17 / 09

Aula no laboratório de Informática (reposição de 4 aulas / 2 dias) que foi perdida no início do ano com a semana da calourada

20 / 09

Avaliação final
Em dupla (sem consulta)
Individual (com consulta)