

Lista de Exercícios Mecânica Clássica II

1. Considere uma partícula de massa constante. Mostre que

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

onde T é a energia cinética da partícula e $\vec{F}$ é a força total aplicada sobre a partícula e $\vec{v}$ é a velocidade desta partícula. Suponha agora que a massa da partícula não seja constante. Mostre que

$$\frac{dMT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{p},$$

onde p é o momento da partícula.

2. Mostre que é possível que um corpo no qual não atue nenhuma força, seja dotado de uma aceleração constante a . Como deve ser a força externa aplicada a este corpo para anular esta aceleração? (Dica: Considere a segunda hipótese do exercício anterior.)
3. Mostre detalhadamente que as leis de Newton implicam nas equações de Euler-Lagrange. (Em outras palavras, refaça a demonstração feita na sala de aula).
4. Considere um sistema de N -partículas, com massas m_i , $i = 1, \dots, N$. O Centro de Massa do sistema partículas tem coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i x_i}{M}, \\ y_{CM} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i y_i}{M}, \\ z_{CM} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i z_i}{M}, \end{aligned}$$

onde M é a massa total do sistema.

- (a) Se o potencial V só depende das coordenadas $\Delta x_i = x_i - x_{CM}$, $\Delta y_i = y_i - y_{CM}$, $\Delta z_i = z_i - z_{CM}$, então a lagrangiana L do sistema se decompõe em $L = L_{CM} + L_{rel}$, onde L_{CM} é a lagrangiana do centro de massa e L_{rel} é a Lagrangiana das coordenadas relativas.
 - (b) Mostre que a mesma situação acima ocorre caso o potencial V só dependa das coordenadas do centro de massa.
 - (c) Mostre que a mesma situação ocorre se o potencial V depender somente das diferenças de posições entre as partículas.
5. Mostre que se $L(q, \dot{q}, t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt},$$

onde $F(q, t)$ é uma função diferencial arbitrária de q e t , também satisfaz as equações de Euler-Lagrange. (Dica use a regra da cadeia)

6. Mostre que as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

onde T é a energia cinética e Q_j é a força generalizada associada j -ésima coordena generalizada.

7. Suponha de N graus de liberdade, cuja lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ satisfaça as equações de Euler-Lagrange. Suponha que existe um outro conjunto de coordenadas generalizadas $s_1, \dots, s_N$, relacionado com o primeiro, por

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_N, t).$$

Mostre que no novo sistema de coordenadas generalizadas, a Lagrangiana também satisfaz as equações de Euler-Lagrange. (Dica: Use a regra da cadeia sistematicamente.)

8. Duas partículas de massa m estão conectadas por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento l . O centro da barra pode se mover ao longo de uma circunferência de raio a . Expresse a energia cinética do sistema em coordenadas generalizadas.
9. Considere que a lagrangiana de um sistema em particular seja dada por

$$L_1 = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

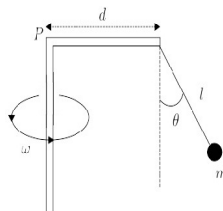
onde a, b, c são constantes tais que $b^2 - ac \neq 0$. Obtenha as forças e os momentos generalizados. Escreva as equações diferenciais para as equação do movimento e as resolva. Que tipo de sistema físico o sistema acima descreve?

10. No sistema acima, considere a mudança de coordenadas $u = ax + by$ e $v = bx + cy$. Reescreva a lagrangiana neste novo sistema de coordenadas e mostre que as mesmas equações de movimento podem ser obtidas. Discuta o resultado usando o exercício 7.
11. Se L_1 é a Lagrangiana do exercício 9, mostre explicitamente que as mesmas equações de movimento podem ser obtidas se a lagrangiana do sistema fosse $L = L_1 + (x + y)\cos(\omega t)$. Compare o resultado com o exercício 5.
12. Duas partículas de massas m_1 e m_2 movem-se sob a ação de atração gravitacional entre elas e em um campo gravitacional externo uniforme cuja aceleração é g . Usando coordenadas cartesianas X, Y, Z para o centro de massa e coordenadas polares para descrever a posição relativa de m_2 em relação a m_1 , escreva as equações para a energia cinética, para as seis forças Generalizadas, e para os seis momentos generalizados. Escreva as equações de Lagrange para o movimento.
13. As massas m e $2m$ estão suspensas por uma corda de comprimento l_1 que passa por uma polia. As massas $3m$ e $4m$ também estão suspensas por uma corda de comprimento l_2 que passa por uma outra polia. Ambas as polias estão presas nas extremidades de uma terceira corda de comprimento l_3 , que passa por uma terceira polia fixa. As cordas tem massa desprezível
- Considerando que as polias tem massa desprezível, escreva as equações de lagrange para o problema e determine as equações de movimento de cada uma das massas.
 - Repita o exercício anterior agora considerando que as polias possuem momentos de inercia I_1, I_2 e I_3 respectivamente e que as cordas não deslizam sobre as polias.
14. Use as equações de Lagrange para obter as equações de movimento de um pendulo esférico, i.e. uma massa pontual suspensa por uma haste rígida não massiva.
15. Use as equações de Lagrange para obter as equações de movimento de um pendulo duplo.
16. Considere uma partícula de massa m se movendo em uma única dimensão de modo que sua lagrangiana seja dada por

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V_1(x) - V_2(x),$$

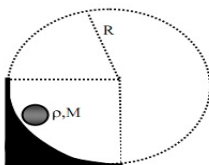
Onde $V_1(x)$ e $V_2(x)$ são funções diferenciáveis de x . Escreva expressões para o momento desta partícula e para a força que atua sobre esta partícula. Obtenha a equação de movimento para $x(t)$ e descreva a natureza física deste sistema.

17. Um corpo de massa m suspenso por uma corda gira em torno do eixo vertical, conforme mostra a figura: ¹



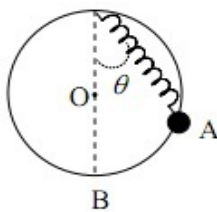
Qual deve ser a tensão T para que a corda de comprimento l com o corpo suspenso faça um ângulo θ com a vertical? Nas condições definidas no item a), obtenha a frequência angular? Determine a Lagrangiana do sistema (Considere a origem do sistema de referência no ponto P). Usando o formalismo de Lagrange obtenha a equação de movimento e analise o caso $\theta = \text{constante}$.

18. Uma esfera de raio r e massa M rola sem deslizar sobre a parte interna de $\frac{1}{4}$ de uma casca esférica de raio R .²



Encontre o momento de inércia da esfera. Monte o Lagrangeano do sistema. Determine a equação de vínculo do sistema. Utilizando as equações de Euler-Lagrange encontre a aceleração do centro de massa e a aceleração angular da esfera.

19. Um corpo de massa m está preso em um aro circular vertical de raio R e ao topo por uma mola de constante elástica k . Na posição relaxada da mola o corpo está no ponto mais baixo do aro, ponto B. Soltando o corpo a partir do repouso no ponto A pede-se:



Se o ângulo inicial entre $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ for de $\frac{\pi}{3}$, qual a velocidade do objeto em B? Escreva a Lagrangeana do sistema. Quais as equações de movimento do sistema? Qual a frequência de oscilação para pequenos ângulos? ³

¹Problema da Prova do processo seletivo para a Pós-Graduação em Física da UFU para o ingresso no segundo semestre de 2009

²Problema da Prova do processo seletivo para a Pós-Graduação em Física da UFU para o primeiro semestre de 2008

³Problema da Prova do processo seletivo para a Pós-Graduação em Física da UFU para o segundo semestre de 2008