Nº 10
outubro/2015
ISSN 1518-6075

revista DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olimpíada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 10 (out.2015/set. 2016). Goiânia: Editora da UFG, 2014-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração	**Arte da Capa**
José H. da Cruz	Anderson V. Macêdo (logomarca)
Tiragem	**Postagem**
500 exemplares	2º semestre de 2015

Revista da Olimpíada, nº 10, 2015
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208, Fax: (62) 3521 1180
Versão eletrônica disponível em: www.ime.ufg.br

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, outubro de 2015
Os Editores.

Universidade Federal de Goiás

Orlando Afonso Valle do Amaral
Reitor

Manoel Rodrigues Chaves
Vice-Reitor

Luiz Mello de Almeida Neto
Pró-Reitora de Graduação

José Alexandre Felizola Diniz Filho
Pró-Reitora de Pós-Graduação

Maria Clorinda Soares Fiarovanti
Pró-Reitor de Pesquisa e Inovação

Carlito Lariucci
Pró-Reitor de Administração e Finanças

Geci José Pereira da Silva
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Giselle Ferreira Ottoni Candido
Pró-Reitor de Extensão e Cultura

Elson Ferreira de Morais
Pró-Reitor de Assuntos da Comunidade Universitária

Maurício Donizetti Pieterzack
Diretor do Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Comissão Organizadora
Mauricio Donizetti Pieterzack (Diretor do IME)
Ana Paula de Araújo Chaves (coordenadora) Ticianne Proença Bueno Adorno (vice-coordenadora), Rogério Queiróz Chaves e Ole Peter Smith

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: `omeg@mat.ufg.br` Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180
Site: `www.ime.ufg.br/extensao/olimpiada`

Índice

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 10, outubro de 2015, 1-3

Classificados na XXIII OMEG - 2014

Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

Medalha de Ouro

⋆ *Vinícius de Alcântara Névoa*/Interamérica - Goiânia

Medalha de Prata

⋆ *Ana Vitória Cordeiro Rocha*/Olimpo - Anápolis

Medalha de Bronze

⋆ *Gustavo Mendonça de Freitas*/Santo Agostinho - Goiânia

Menção Honrosa

⋆ *Artur Dantas Roque Pesconi*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Bruno Cordeiro M. Oliveira*/Crescer - Anápolis

⋆ *Camille Andrade Bastos* /Einstein - Goiânia

⋆ *Carolina Simões Santos*/Einstein - Goiânia

⋆ *Gilberto Gonçalves Gomes Filho*/C.E. Jalles Machado - Goianésia

⋆ *João Pedro Cardoso Fernandes*/Externato São José - Goiânia

⋆ *Luís Eduardo Silva Borges* /CPMG Dionária Rocha - Itumbiara

⋆ *Luis Gustavo de Souza*/Santo Agostinho - Goiânia

⋆ *Marcela Costa Stoco*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Mel Alencastro Machado*/Internacional - Goiânia

⋆ *Renato Abrão Helou*/Agostiniano - Goiânia

Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Medalha de Ouro

⋆ *Gustavo Seabra Garcia*/Educandário Goiás - Goiânia

Medalha de Prata

⋆ *Matheus Canguçu de Paiva Queiroz Bueno*/Interamérica - Goiânia

Medalha de Bronze

⋆ *Enzo Paulo Sanches Sato*/Olimpo - Goiânia

Menção Honrosa

⋆ *Carlos Eduardo Pires da Silva*/C.E. Waldemar Mundim - Goiânia

⋆ *Matheus Laureano Nunes Barbosa*/Colégio Ávila - Goiânia

⋆ *Carlos Eduardo Santos Filho*/Educandário Nascentes do Araguaia - Mineiros

⋆ *Daniel Aleixo do Prado Pereira*/Col. Prof. Yolanda - Goiânia

⋆ *Eike João Sanches Sato*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Gíovanna da Mota Santana*/Simetria - Goiânia

⋆ *Luis Henrique Zuin Ruiz*/Studium - Goiânia

⋆ *Luis Vasconcelos Júnior* /E.M. Cristiano Carlos Friaça - São Luis de Montes Belos

⋆ *Marina Figueiredo de Castro Araújo*/Educandário Goiás - Goiânia

⋆ *Samuel de Souza Arraes Rios Pinto*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia

⋆ *Sarah Brennda Bispo Almeida*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia

Nível 3 (Ensino Médio)

Medalha de Ouro

⋆ *João Luís Reis Freitas*/Visão - Goiânia.

Medalha de Prata

⋆ *Felipe Carvalho Lima*/CPMG - Hugo de Carvalho Ramos - Goiânia.

⋆ *Vinícius Augusto Ribeiro*/Progressivo - Goiânia.

Medalha de Bronze

⋆ *Heitor de Sousa Naves* /CPMG - Polivalente Modelo Vasco dos Reis - Goiânia

Menção Honrosa

⋆ *Gustavo Bittar Gonçalves*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Hilquias de Paiva Araújo*/Millenium Classe - Anápolis

⋆ *Joshua Lucas Rocha L. Sardinha*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Leonardo Augusto Garcia Cunha*/Agostiniano - Goiânia

⋆ *Leonardo Veli Cunha*/Olimpo - Goiânia

⋆ *Lucas Emílio Mendes Ferreira*/Dinâmico - Goiânia

⋆ *Marcos Antônio de Oliveira Júnior*/Visão - Goiânia

⋆ *Romeu Davi Benvenutti Filho*/Agostiniano - Goiânia

⋆ *Thiago Lucas Faustino da Silva*/CPMG - Dionária Rocha - Itumbiara

⋆ *Vinícius Gomes de Souza*/Prevest - Unidade Sul - Goiânia

⋆ *Vítor Leite Antonelli*/Integrado Jaó - Goiânia

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 10, outubro de 2015, 4-27

Provas e Soluções Comentadas da XXIII OMEG - 2014

Rogerio de Queiroz Chaves, Ana Paula Chaves, Abiel Costa Macedo e Valdivino Vargas Junior.

Resumo. Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da OMEG de 2014, incluindo boa parte das ideias e argumentos dos próprios estudantes participantes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização e propor outros problemas relacionados. Sugerimos que, antes de ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, apresentamos primeiro somente os problemas e, ao final, as soluções e comentários. Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da OMEG de 2014, incluindo boa parte das ideias e argumentos dos próprios estudantes participantes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização e propor outros problemas relacionados. Sugerimos que, antes de ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, apresentamos primeiro somente os problemas e, ao final, as soluções e comentários.

Provas:

Nível 1

1. Se um número termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais. Por exemplo, 520000 tem quatro zeros terminais, mas 502000 tem apenas três zeros terminais.

(a) Se P é o produto de todos os números naturais de 1 a 10, isto é, $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 10$, quantos zeros terminais P possui?

(b) E o produto de todos os números naturais de 1 a 2014, tem quantos zeros terminais?

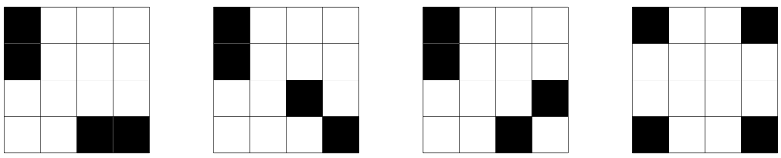
2. Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos, responda os itens a seguir.

(a) Na divisão de 2014 por um certo número, d, o quociente é 12 e o resto é o maior possível para divisões por d. Determine esse número d.

(b) Determine todos os números cuja divisão por 17 deixa resto igual ao quadrado do quociente.

3. Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos e deixar outros em branco, obedecendo à seguinte regra: "todo quadrado de 2×2 quadradinhos, contido no quadrado maior, deve ficar com exatamente dois quadradinhos brancos e dois pretos".

(a) A figura a seguir mostra 4 quadrados maiores em que a tarefa de pintar os quadradinhos foi iniciada. Em cada um deles, mostre uma maneira de completar a tarefa pintando os demais quadradinhos de acordo com a regra ou então explique porque não é possível completar a tarefa.



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

(b) Para cada um dos quadriculados da figura a seguir, determine de quantas maneiras diferentes os quadradinhos podem ser pintados obedecendo à regra.

(I) **(II)**

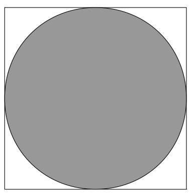
4. Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda. Sabe-se que 7 das mulheres têm à sua direita uma outra mulher, e que 12 mulheres têm à sua direita um homem. Também se sabe que exatamente 3/4 dos homens têm à sua direita uma mulher. Diante destas informações, quantas pessoas estão em volta da mesa?

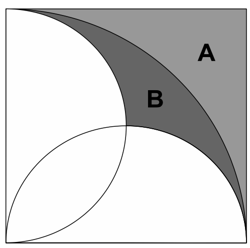
5. No conjunto dos números naturais, determine

(a) três números consecutivos cuja soma seja 24;

(b) todos os possíveis trios de números cuja soma seja 23 e o produto seja 360.

6. Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado (figura abaixo, à esquerda). A figura abaixo, à direita, representa um quadrado que foi dividido em várias regiões por arcos que são todos de metade ou um quarto de círculo. Considerando que o lado do quadrado tenha 14 cm, calcule as áreas aproximadas das regiões marcadas com as letras **A** e **B**.





Nível 2

1. Se um número inteiro termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais. Por exemplo, 520000 tem quatro zeros terminais, mas 502000 tem apenas três zeros terminais.

(a) Se P é o produto de todos os números naturais de 1 a 20, isto é, $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 20$, quantos zeros terminais P possui?

(b) E o produto de todos os números naturais de 1 a 2014, tem quantos zeros terminais?

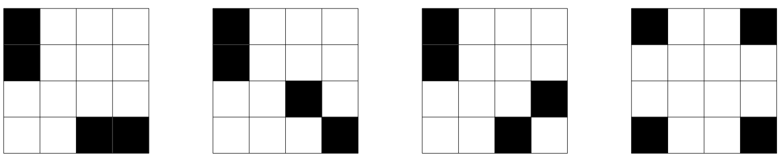
2. Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos, responda os itens a seguir.

(a) Na divisão de x por y, o quociente é 18 e o resto é o maior possível (para divisões por y). Sabendo-se que $x+y = 319$, determine esses dois números, x e y.

(b) Determine todos os números cuja divisão por 17 deixa resto igual ao quadrado do quociente.

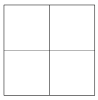
3. Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos e deixar outros em branco, obedecendo à seguinte regra: "todo quadrado de 2×2 quadradinhos, contido no quadrado maior, deve ficar com exatamente dois quadradinhos brancos e dois pretos".

(a) A figura a seguir mostra 4 quadrados maiores em que a tarefa de pintar os quadradinhos foi iniciada. Em cada um deles, mostre uma maneira de completar a tarefa pintando os demais quadradinhos de acordo com a regra ou então explique porque não é possível completar a tarefa.

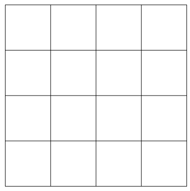


(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

(b) Para cada um dos quadriculados da figura a seguir, determine de quantas maneiras diferentes os quadradinhos podem ser pintados obedecendo à regra.



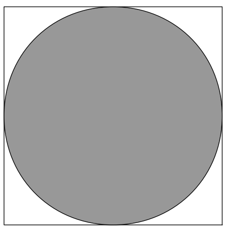
(I)

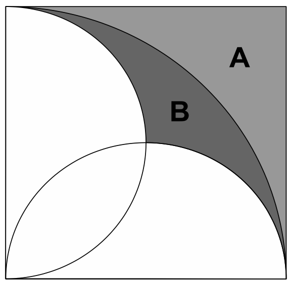


(II)

4. Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda. Sabe-se que 7 das mulheres têm à sua direita uma outra mulher, e que 12 mulheres têm à sua direita um homem. Também se sabe que exatamente 3/4 dos homens têm à sua direita uma mulher. Diante destas informações, quantas pessoas estão em volta da mesa?

5. Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado (figura abaixo, à esquerda). A figura abaixo, à direita, representa um quadrado que foi dividido em várias regiões por arcos que são todos de metade ou um quarto de círculo. Considerando que o lado do quadrado tenha 14 cm, calcule as áreas aproximadas das regiões marcadas com as letras **A** e **B**.



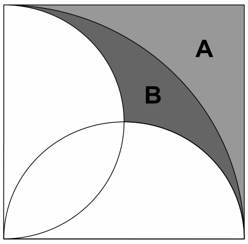


6. Determine todos os possíveis trios de números naturais cuja soma seja 23 e o produto seja 360.

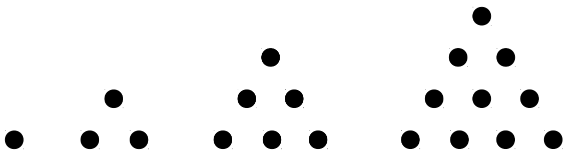
Nível 3

1. Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda. Sabe-se que 7 das mulheres têm à sua direita uma outra mulher, e que 12 mulheres têm à sua direita um homem. Também se sabe que exatamente 3/4 dos homens têm à sua direita uma mulher. Diante destas informações, quantas pessoas estão em volta da mesa?

2. A figura a seguir representa um quadrado que foi dividido em várias regiões por arcos que são todos de metade ou um quarto de círculo. Interessado em estimar as áreas das regiões marcadas com as letras **A** e **B**, um estudante substituiu o número π por um certo número racional e, em consequência disso, obteve exatamente o mesmo valor para as duas áreas. Qual foi esse número racional utilizado no lugar de π?



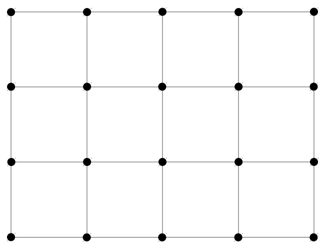
3. Os números 1, 3, 6, 10, 15, ..., chamam-se números triangulares e correspondem ao número de pontos igualmente espaçados e arranjados geometricamente em triângulos equiláteros, como na figura a seguir, que representa os quatro primeiros números triangulares.



(a) Qual é o número triangular mais próximo de 2014?

(b) Denotando por T_n o n-ésimo número triangular determine, em função de n, o valor de $T_n^2 - T_{n-1}^2$, para $n \geq 2$ e utilize este resultado para obter a soma dos cubos dos números naturais até n, ou seja, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, em função de n.

4. O retângulo maior da figura a seguir é composto por doze quadrados menores, idênticos e cujos vértices são os pontos destacados na figura.



(a) Quantos triângulos podem ser formados escolhendo-se os três vértices dentre os pontos destacados?

(b) Quantos retângulos podem ser formados com todos os vértices nos pontos destacados?

5. Ana, Beatriz e Célia, compartilham um carro e, para decidirem quem vai usá-lo no próximo final de semana, usam o seguinte procedimento: quando Ana diz "Atenção, já!", cada uma das três, ao mesmo tempo, apresenta com os dedos um número de um a cinco, como em um jogo de "par ou ímpar". Ana soma o total de dedos apresentados e, então, conta até esse total, começando por ela mesma e apontando para cada uma das três, em sequência, na ordem alfabética de seus nomes. A garota em quem a contagem terminar é a escolhida. Considerando que o número apresentado por cada garota seja escolhido de maneira aleatória, com qualquer dos números de um a cinco tendo a mesma probabilidade de ser apresentado, calcule a probabilidade de cada uma das garotas ser a escolhida.

6. No conjunto dos números inteiros positivos, determine

(a) todos os trios de números cuja soma seja 23 e o produto seja 360;

(b) um par de números, s e p, tal que haja pelo menos três trios distintos com a mesma soma s e o mesmo produto p.

Soluções comentadas:

Nível 1

1. *Se um número termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais...*

Ver resolução do **problema 1** do **nível 2**.

---

2. *Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos...* (baseado na solução apresentada por *Gilberto Gonçalves Gomes Filho*)

(a) O maior resto possível na divisão por d é $d - 1$. Assim, $2014 = 12d + (d - 1) = 13d - 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2015/13 = 155$.

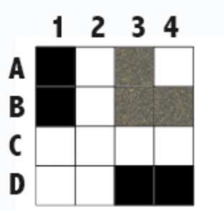
(b) Devemos determinar os números n, inteiros positivos, tais que $n = 17q + q^2$, onde $q^2 < 17$, por ser o resto da divisão. Então q só pode ser 1, 2, 3 ou 4 e, por consequência, $n = 17q + q^2$ pode ser 18, 38, 60 ou 84.

---

3. *Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos...* (baseado nas soluções apresentadas por *Gustavo Mendonça de Freitas*, *Renato Abrão Helou* e na proposta pela comissão da OMEG)

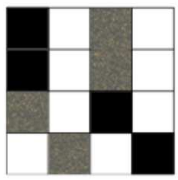
(a) Para facilitar a referência aos diferentes quadrados, podemos nos referir ao quadrado maior como tabuleiro e enumerar suas linhas e colunas com letras e números como indica a figura a seguir.

Para o tabuleiro **(I)**, como as casas A1 e B1 já estão pintadas de preto, as casas A2 e B2 devem ficar brancas, para termos exatamente 2 casas de cada cor neste quadrado 2×2. Por consequência, as casas A3 e B3 devem ser pintadas de preto. Analogamente, como D3 e D4 já estão pintadas de preto, devemos ter C3 e C4 brancas, donde B3 e B4 devem ser pretas. Mas assim o quadrado 2×2 localizado no canto superior direito fica com 3 quadrados pretos, o que não é permitido. Então, não é possível colorir o tabuleiro **(I)** respeitando a regra.

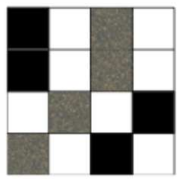


(I)

Os tabuleiros **(II)** e **(III)** podem ser pintados como na figura a seguir.

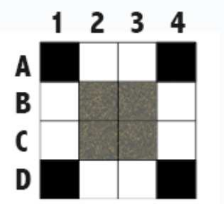


(II)



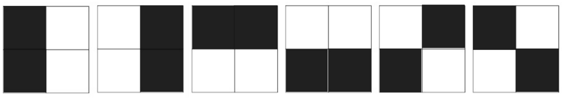
(III)

Para o tabuleiro **(IV)** também não é possível preencher os quadrados segundo a regra. De fato, se B1 for pintado de preto, pelo mesmo argumento usado para o tabuleiro **(I)**, A2 e B2 devem ser brancos e A3 e B3 teriam que ser pretos, o que conflita com A4 já estar pintado de preto. O mesmo argumento vale para C1, e também A2 e A3, que não podem ser pintados de preto. Mantendo todos estes em branco, B2, B3 e C2 deveriam ser todos pretos, o que viola a regra.



(IV)

(b) Para o tabuleiro 2×2, (I), a casa superior esquerda pode ser branca ou preta. Para cada uma dessas escolhas, a casa inferior esquerda também pode ser preta ou branca. Isto dá 4 maneiras de se pintar a coluna da esquerda. Se essa coluna for toda preta ou toda branca, a coluna da direita tem que ser toda da cor oposta. Já se a coluna da esquerda tiver um quadrado preto e o outro branco, a coluna da direita também precisa ter um quadrado preto e outro branco, havendo duas maneiras de se obter isso, em cada caso. Resumindo, o quadrado 2×2 pode ser pintado exatamente de 6 maneiras, detalhadas na figura a seguir.



Para o tabuleiro 3×3, observa-se que, como cada quadradinho da primeira coluna pode ser branco ou preto, há 2^3 maneiras diferentes de pintar esta coluna. Além disso, ou os quadradinhos da primeira coluna são pintados com cores alternadas ou haverá dois ou mais quadradinhos adjacentes da mesma cor, o que permite separar a contagem em dois casos.

Caso 1: Se os quadradinhos da 1ª coluna forem pintados com cores alternadas, para respeitar a regra a 2ª coluna também deve ser pintada com cores alternadas, que podem ser iguais ou opostas às da 1ª coluna. O mesmo argumento também vale para a 3ª coluna. Assim, para cada coluna temos 2 possibilidades, o que nos dá $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ configurações possíveis.

Caso 2: Se na 1ª coluna houver pelo menos duas casas adjacentes pintadas da mesma cor, então as casas da 2ª coluna adjacentes a estas devem ser pintadas com a cor oposta. Por consequência, as demais casas casas da 2ª coluna também devem ser pintadas com a cor oposta à de suas vizinhas da 1ª coluna. Pelo mesmo argumento, esta restrição ocorre também para a 3ª e a 4ª colunas. Neste caso, ao pintar a 1ª coluna, a configuração de todo o restante do tabuleiro fica determinada de maneira única e o número de maneiras de pintar a primeira coluna com pelo menos duas casas adjacentes da mesma cor é $2^3 - 2 = 6$ (o total de maneiras de pintar a primeira coluna menos as duas maneiras de se pintar com cores alternadas, consideradas no *caso 1*).

Portanto há, no total, $8 + 6 = 14$ maneiras distintas de pintar o tabuleiro 3×3 de modo que qualquer quadrado 2×2 tenha exatamente duas casas brancas e duas casas pretas.

Outras variações deste problema podem ser vistas na resolução do **problema 3** do **nível 2**.

---

4. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...* (baseado nas soluções apresentadas por *Bruno Cordeiro Martins de Oliveira*, do nível 1, e por *Lucas Gonçalves de Oliveira* e *Luiz Herique Zuin Ruiz*, do nível 2)

Cada mulher à mesa tem à sua direita um homem ou uma mulher. Como 7 das mulheres têm uma mulher à sua direita, e 12 mulheres têm um homem à sua direita, são 19 mulheres ao todo. Por outro lado, decorre destas condições que exatamente 7 das mulheres estão à direita de mulheres e as outras 12 tem que estar à direita de homens. Como esta quantidade de 12 homens (que tem mulheres à direita) é 3/4 do total, a quantidade de homens é 16. Portanto, estão sentados à mesa $19 + 16 = 35$ pessoas.

---

5. *No conjunto dos números naturais, determine...* (baseado na solução apresentada por *Gilberto Gonçalves Gomes Filho*)

(a) $x + (x + 1) + (x + 2) = 24 \Rightarrow 3x + 3 = 24 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$, logo os três números só podem ser 7, 8 e 9.

(b) Ver resolução do **problema 6** do **nível 2**.

---

6. *Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 2**.

Nível 2

1. *Se um número inteiro termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais...* (Baseado na solução apresentada por *Luiz Vasconelos Júnior*)

(a) Cada zero terminal de P corresponde a um fator de $10 = 2 \cdot 5$ e, consequentemente, um fator de 5. No caso de $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 20$, os únicos fatores 5 vêm de 5, 10, 15 e 20, o que resulta em 4 zeros terminais. Para a versão proposta no nível 1, em que $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 10$, os únicos fatores 5 vêm do 5 e do 10, logo esse número P possui dois zeros terminais.

(b) Considerando-se que cada número par no produto contribui com pelo menos um fator 2, estes estão em maior número que os fatores 5, que só vêm dos múltiplos de 5. Basta, então, contar os fatores 5 do produto. No caso do produto de todos os números naturais de 1 a 2014 o número de fatores múltiplos de 5 pode ser obtido da divisão inteira $2014 \div 5 = 402$ (com resto 4). Além disso, cada fator múltiplo de $25 = 5^2$ contribui com mais um fator de 5 não contado anteriormente, ou seja, $2014 \div 25 = 402 \div 5 = 80$ e sobram 14. De maneira análoga, cada múltiplo de $125 = 5^3$ menor que 2014 contribui com mais um fator de 5 ainda não contabilizado, com $2014 \div 125 = 80 \div 5 = 16$ e sobram 14. Por fim, cada múltiplo de $625 = 5^4$ contribui com mais um fator de 5 não contabilizado anteriormente e $2014 \div 625 = 16 \div 5 = 3$ e sobram 139. Portanto, o número de zeros terminais é $402 + 80 + 16 + 3 = 501$.

---

2. *Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos...* (baseado nas soluções apresentadas por *Carlos Eduardo Pires da Silva*, *Gustavo Seabra Garcia* e *Luiz Vasconelos Júnior*)

(a) O maior resto possível na divisão por y é $y - 1$. Assim,

$$\begin{cases} x = 18y \ + \ y - 1 = 19y - 1 \\ x + y = 319 \end{cases}$$

De onde se obtém $20y - 1 = 319 \ \Rightarrow \ y = 16$ e $x = 303$.

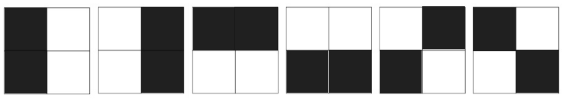
(b) Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

---

3. *Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos...* (baseado na solução apresentada por *Giovana da Mata S. M. Pacheco*, e na proposta pela comissão da OMEG)

(a) Ver resolução do item (a) do **problema 3** do **nível 1**.

(b) Para o tabuleiro 2×2, (I), a casa superior esquerda pode ser branca ou preta. Para cada uma dessas escolhas, a casa inferior esquerda também pode ser preta ou branca. Isto dá 4 maneiras de se pintar a coluna da esquerda. Se essa coluna for toda preta ou toda branca, a coluna da direita tem que ser toda da cor oposta. Já se a coluna da esquerda tiver um quadrado preto e o outro branco, a coluna da direita também precisa ter um quadrado preto e outro branco, havendo duas maneiras de se obter isso, em cada caso. Resumindo, o quadrado 2×2 pode ser pintado exatamente de 6 maneiras, detalhadas na figura a seguir.



Para o tabuleiro 4×4, observa-se que, como cada quadradinho da primeira coluna pode ser branco ou preto, há 2^4 maneiras diferentes de pintar esta coluna. Além disso, ou os quadradinhos da primeira coluna são pintados com cores alternadas ou haverá dois ou mais quadradinhos adjacentes da mesma cor, o que permite separar a contagem em dois casos.

Caso 1: Se os quadradinhos da 1ª coluna forem pintados com cores alternadas, para respeitar a regra a 2ª coluna também deve ser pintada com cores alternadas, que podem ser iguais ou opostas às da 1ª coluna. O mesmo também vale para a 3ª e 4ª colunas. Assim, para cada coluna temos 2 possibilidades, o que nos dá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ configurações possíveis.

Caso 2: Se na 1ª coluna houver pelo menos duas casas adjacentes pintadas da mesma cor, então, pela regra, as casas da 2ª coluna adjacentes a estas devem ser pintadas com a cor oposta. Por consequência, as demais casas casas da 2ª coluna também devem ser pintadas com a cor oposta à de suas vizinhas da 1ª coluna. Pelo mesmo argumento, esta restrição ocorre também para a 3ª e a 4ª colunas. Neste caso, ao pintar a 1ª coluna, a configuração de todo o restante do tabuleiro fica determinada de maneira única e o número de maneiras de pintar a primeira coluna com pelo menos duas casas adjacentes da mesma cor é $2^4 - 2 = 14$ (o total de maneiras de pintar a primeira coluna menos as duas maneiras de se pintar com cores alternadas, consideradas no *caso 1*).

Portanto há, no total, $16 + 14 = 30$ maneiras distintas de pintar o tabuleiro 4×4 de modo que qualquer quadrado 2×2 tenha exatamente duas casas brancas e duas casas pretas.

Agora não é tão difícil generalizar esta idéia e resolver o problema a seguir.

Problema proposto: Quantas são as maneiras de se pintar um tabuleiro quadriculado de $m \times n$, com m e n inteiros maiores que 1, de maneira que todo quadrado de 2×2 quadradinhos do tabuleiro fique com exatamente dois quadradinhos brancos e dois pretos?

---

4. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

---

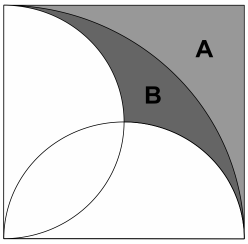
5. *Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado...* (baseado nas soluções apresentadas por *Carlos Eduardo Pires da Silva*, *Gustavo Seabra Garcia*, *Luiz Vasconelos Júnior*, *Matheus Canguçu de Paiva Queiroz* e *Bárbara Custódio Rodrigues da Silva*, do nível 2)

A área de **A** pode ser vista como 1/4 da área que resta de um quadrado de lado 28 quando deste se retira um círculo inscrito (o maior círculo possível, como descrito no enunciado da questão), ou seja,

$$\text{Área}(\mathbf{A}) \approx \frac{1}{4}\left(28^2 - \frac{11}{14}\cdot 28^2\right) = 42\,\text{cm}^2.$$

Para a região **B**, é conveniente dividir o quadrado da figura em quatro quadrados menores, por uma linha vertical e outra horizontal ambas passando pelo centro do quadrado original. Assim, a área da região **B** pode ser obtida subtraindo-se da área do quarto de círculo maior na figura (que é $11/14$ de 14^2, como observado no cálculo de **A**) a área de um quadrado de lado 7 e as de dois quartos de círculo de raio 7, que podem ser obtidas como no cálculo da área **A**. Assim,

$$\text{Área}(\mathbf{B}) \approx \frac{11}{14}\cdot 14^2 - 7^2 - 2\frac{11}{14}\cdot 7^2 = 28\,\text{cm}^2.$$



---

6. *Determine todos os possíveis trios de números naturais cuja soma seja 23 e o produto seja 360.* (Baseado nas soluções apresentadas por *Enzo Paulo Sanches Sato*, *Luiz Vasconelos Júnior* e *Sarah Brennda B. Almeida*)

Se a soma é 23, os três números não podem ser todos maiores que 7. Portanto o menor deles é, necessariamente menor que 8. Além disso, como o produto é 360, cada um dos três números é um divisor de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e o menor dos números não pode ser 7.

Se o menor for 6, os outros dois devem somar 17 e seu produto deve ser $360/6 = 60 = 4\cdot 3\cdot 5$, o que não é satisfeito por nenhum dos possíveis pares de números maiores ou iguais a 6 e que somam 17 (6 e 11; 7 e 10 ou 8 e 9).

Se o menor for 5, os outros dois devem somar 18 e seu produto deve ser $360/5 = 72 = 8\cdot 9$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 72, encontra-se apenas o 6 e 12, que fornece o trio 5, 6 e 12.

Se o menor for 4, os outros dois devem somar 19 e seu produto deve ser $360/4 = 90 = 2 \cdot 9 \cdot 5$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 90, encontra-se apenas o 9 e 10, que fornece o trio 4, 9 e 10.

Se o menor for 3, os outros dois devem somar 20 e seu produto deve ser $360/3 = 120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 120, observa-se que mesmo para o 10 e 10, que tem o maior produto, esse produto não chega a 120.

Para as outras duas possibilidades, ou seja, o menor dos três números ser 2 ou 1, a situação fica ainda menos favorável, pois o produto dos outros dois teria que ser 180 ou 360 enquanto sua soma teria que ser 21 ou 22, respectivamente.

Portanto, os únicos trios cuja soma é 23 e o produto 360 são $\{4, 9, 10\}$ e $\{5, 6, 12\}$.

Observações: Como alguns dos estudantes observaram, esta análise pode ser abreviada pela observação de que um dos números do trio tem que ser múltiplo de 5 e menor que 23, o que reduz as possibilidades a analisar. Em geral, este raciocínio sempre pode ser aplicado ao maior fator primo do produto dos números procurados, pois ele deve estar presente em um dos números. Outras variações interessantes e comentários sobre este problema podem ser vistos na resolução do **problema 6** do **nível 3**.

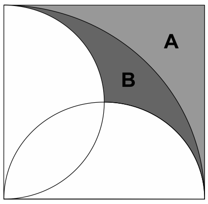
Nível 3

1. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

---

2. *A figura a seguir representa um quadrado que foi dividido em várias regiões por arcos que são todos de metade ou um quarto de círculo...* (baseado nas soluções apresentadas por *Gustavo Bittar Gonçalves*, *Heitor de Sousa Naves*, *Matheus Abrão Abdala*, *Vinícius Augusto Ribeiro* e *Vinícius Gomes de Souza*)



Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, a área de **A** é

$$\text{Área}(\mathbf{A}) \approx \ell^2 - \frac{\pi\ell^2}{4}$$

Para a região **B**, é conveniente dividir o quadrado da figura em quatro quadrados menores, de modo que a área da região **B** pode ser obtida subtraindo-se da área do quarto de círculo de raio ℓ a área de um quadrado de lado $\ell/2$, que fica no canto inferior esquerdo do quadrado original, e as áreas de dois quartos de círculo de raio $\ell/2$, nos cantos superior esquerdo e inferior direito. Assim,

$$\text{Área}(\mathbf{B}) \approx \frac{\pi\ell^2}{4} - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\ell^2.$$

Para que se obtenha o mesmo valor para as áreas de **A** e **B**, é necessário que

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{3\pi}{8} = \frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{10}{3}.$$

Logo, o número racional utilizado no lugar de π é $10/3$.

---

3. *Os números 1, 3, 6, 10, 15, ..., chamam-se números triangulares...* (baseado nas soluções apresentadas por *João Luís Reis Freitas*, *Jóshua Lucas Rocha L. Sardinha*, *Lucas Emílio Mendes Ferreira*, *Marcos Antônio de Oliveira Jr.*, *Rafael Pereira Lima* e *Vinícius Augusto Ribeiro*)

(a) Da definição, deduz-se que o n-ésimo número triangular é

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e, observando que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$, pode se estimar o valor de n que produz um número triangular próximo de 2014 procurando situar o dobro deste número entre os quadrados de dois números consecutivos. Uma rápida inspeção, notando que $2 \cdot 2014 = 4028 = 4 \cdot 1007$, que $30^2 = 900$ e que $32^2 = (2^5)^2 = 1024$, leva a $63^2 = 3969$ e $64^2 = 4096$, de forma que $T_{63} = 2016$ é o número triangular mais próximo de 2014.

Observação: Outra maneira mais simples de se fazer esta busca é utilizando o método da bisseção (ou busca binária, neste caso), que consiste em observar, inicialmente, que $60^2 = 3600 < 4028 < 4900 = 70^2$ e ir dividindo o conjunto de possibilidades sempre ao meio. Neste caso, como $65^2 = 4225 > 4028$, passamos ao 62 ou 63, com $63^2 = 3969 < 4028$ e, então, $64^2 = 4096 > 4028$.

(b) Fatorando $T_n^2 - T_{n-1}^2 = (T_n - T_{n-1})(T_n + T_{n-1})$ e observando que $T_n - T_{n-1} = n$ e $T_n + T_{n-1} = [n(n+1) + (n-1)n]/2 = n^2$, obtem-se $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$, para $n \geq 2$. Então, basta substituir cada cubo na soma dos cubos pela diferença dos quadrados dos números triangulares correspondentes, com o que se obtém

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$= 1 + T_2^2 - T_1^2 + T_3^2 - T_2^2 + T_4^2 - T_3^2 + \cdots + T_{n-1}^2 - T_{n-2}^2 + T_n^2 - T_{n-1}^2$$

$$= T_n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

uma vez que cada termo negativo se cancela com o seu oposto (que fica três posições à esquerda) e o único termo que resta na soma é T_n^2.

---

4. *O retângulo maior da figura a seguir é composto por doze quadrados menores...* (baseado nas soluções apresentadas por *João Luís Reis Freitas* e *Heitor de Sousa Naves*)

(a) Qualquer escolha de três pontos forma um triângulo quando esses pontos não estiverem alinhados. O total de combinações de três pontos que pode ser obtido é $C_{20,3} = 1.140$. Basta, então excluir da contagem os casos em que os três pontos são colineares, que correspondem a quatro casos mutuamente exclusivos.

Caso 1: Os três pontos estão em uma mesma linha, correspondendo a $4 \times C_{5,3} = 4 \times 10 = 40$ combinações.

Caso 2: Os três pontos estão em uma mesma coluna, correspondendo a $5 \times C_{4,3} = 5 \times 4 = 20$ combinações.

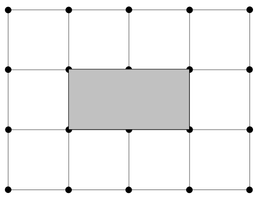
Caso 3: Os três pontos estão em uma diagonal que tem exatamente três pontos. Aqui é preciso contar também os pontos que ficam nas diagonais de cada retângulo 2×4, além das 4 diagonais de quadrados 2×2 resultando em $8 \times C_{3,3} = 8 \times 1 = 8$ combinações.

Caso 4: Os três pontos estão em uma diagonal que contém quatro pontos, correspondendo a $4 \times C_{4,3} = 4 \times 4 = 16$ combinações.

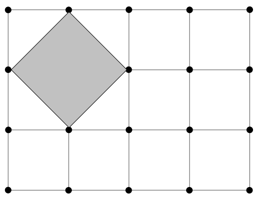
Portanto, o total de triângulos é $1140 - 40 - 20 - 8 - 16 = 1056$.

(b) Seja A o conjunto dos retângulos que podem ser formados. Novamente, é possível dividir em 4 conjuntos disjuntos:

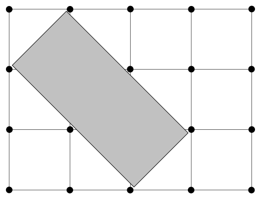
$A_1 = \{$Retângulos em A que possuem lados paralelos aos eixos (vértices em duas linhas e duas colunas)$\}$



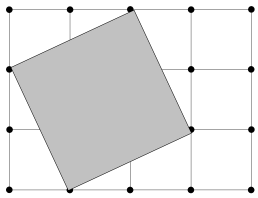
$A_2 = \{$Quadrados em A que possuem vértices em três das linhas e em três das colunas$\}$



$A_3 = \{$Retângulos em A que não são quadrados e que possuem cada vértice em uma linha diferente e cada vértice em uma coluna diferente$\}$



$A_4 = \{$Quadrados em A que possuem cada vértice em uma linha diferente e cada vértice em uma coluna diferente$\}$



Para ver quantos retângulos estão em A_1 usamos o princípio multiplicativo. De fato, existem $C_{4,2} = 6$ modos de escolhermos duas das quatro linhas. Feita a escolha do par de linhas existem $C_{5,2} = 10$ modos de escolhermos duas das cinco colunas. Assim, denotando a cardinalidade de A por $|A|$, tem-se $|A_1| = 6 \times 10 = 60$. As outras contagens podem ser feitas diretamente da figura.

Totalizando as possibilidades, obtém-se $|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 60 + 6 + 4 + 4 = 74$.

---

5. *Ana, Beatriz e Célia, compartilham um carro e, para decidirem quem vai usá-lo no próximo final de semana...* (baseado na solução apresentada por *Thiago Lucas Faustino da Silva*)

Denotando por a, b e c as quantidades de dedos apresentados por Ana, Beatriz e Célia, respectivamente, como cada um pode ser um número de 1 a 5, com iguais probabilidades, qualquer trio (a, b, c), com a, b e c em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem a mesma probabilidade. Pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade desses trios é $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ e, como a contagem que indica a sorteada é feita até atingir a soma $a + b + c$

que pode ir de 3 a 15, Ana será a escolhida nos casos em que esta soma resulte em algum número do conjunto $A = \{4, 7, 10, 13\}$. Para Beatriz ser a escolhida, a soma deve estar em $B = \{5, 8, 11, 14\}$ e para Célia a soma deve estar em $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Resta contar quantos dos trios equiprováveis (a, b, c); $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, têm sua soma em cada um desses três conjuntos.

Para facilitar a contagem, separando os números naturais de 1 a 5 em três conjuntos de acordo com o resto de sua divisão por 3, tem-se $X_0 = \{3\}$, $X_1 = \{1, 4\}$ e $X_2 = \{2, 5\}$. Para que a soma $a + b + c$ esteja em C, por exemplo, que é um conjunto de múltiplos de 3, a soma dos restos das divisões de a, b e c tem que ser 0 ou 3, ou seja, a, b e c têm que estar todos em um mesmo X_i ou cada um em um X_i diferente. Só há uma maneira de estarem todos em X_0, enquanto todos em X_1, pode ocorrer de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ maneiras diferentes e, da mesma forma, para todos em X_2. Para ficarem em X_i diferentes, tem-se $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ maneiras. Somando todas essas possibilidades, tem-se $8+8+1+24 = 41$. Portanto Célia tem uma probabilidade de $41/125$ de ser a escolhida.

Por um argumento análogo, para que $a + b + c$ esteja em A, que é um conjunto de números da forma $3k + 1$, pode se ter um dos 3 números em X_1 (2 possibilidades) e os demais teriam que ser iguais a $3 \in X_0$, o que resulta em $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades. Também pode-se ter dois dos números em X_2 (4 possibilidades) e o outro em X_0 (pode ser a, b ou c), o que corresponde a um total de $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Por fim, pode-se ter dois dos números em X_1 (4 possibilidades) e o outro, que pode ser a, b ou c, em X_2, resultando em mais $4 \cdot 6 = 24$. Assim, para Ana ser escolhida há $6 + 12 + 24 = 42$ das 125 possibilidades, o que dá uma probabilidade de $42/125$.

As demais 42 possibilidades resultam em uma soma da forma $3k + 2$, que favorece Beatriz. Portanto, Ana e Beatriz têm probabilidade de $42/125$, cada uma, de ser a escolhida, enquanto que Célia tem uma chance um pouco menor, com probabilidade de $41/125$.

Observações:

Todo esse argumento pode ser reescrito de maneira equivalente em termos de classes de congruência módulo 3, o que foi evitado aqui em benefício dos leitores que não estiverem familiarizados com este conceito. Para quem estiver familiarizado, é fácil, e um bom exercício, traduzir este argumento em termos de congruências.

Este resultado é duplamente contraintuitivo, uma vez que a primeira impressão é a de que esse sorteio daria iguais chances às três participantes. Depois, observando os conjuntos A, B e C no desenvolvimento da argumentação, a impressão é de que Célia tem maiores chances porque C é o mais numeroso. Curiosamente, nenhuma dessas impressões corresponde à realidade.

Problemas propostos:

1) Uma pequena modificação neste processo de sorteio é admitir a possibilidade de cada participante apresentar o número zero (nenhum dedo). Esta modificação equilibraria as chances das três? Quem deveria ganhar o sorteio quando a soma dos dedos apresentados for zero?

2) Como ficariam distribuídas as probabilidades de cada um se esse sorteio fosse realizado entre quatro pessoas? E entre n pessoas?

---

6. *No conjunto dos números inteiros positivos, determine...* (baseado nas soluções apresentadas por *Juliana Resplande Sant'Anna Gomes*, *Lucas Emílio Mendes Ferreira* e na proposta pela comissão da OMEG, para o item (b))

(a) Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**, observando que uma maneira alternativa de realizar as análises ali envolvidas é, uma vez fixado um dos números, n, do trio, se existirem os outros dois, tendo soma $S = 23 - n$ e produto $P = 360/n$, serão as raízes da equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$. E, para que estas sejam inteiras, $\Delta = S^2 - 4P$ deve ser um quadrado perfeito não negativo. E neste caso, em particular, como o produto dos três números é 360, cujo maior fator primo é 5, pode se levar em conta que um dos números tem que ser múltiplo de 5 e escolher esse número n, fixado, como 5, 10, 15 ou 20. Para $n = 15$ ou 20, obtém-se $\Delta = S^2 - 4P < 0$ enquanto que para $n = 5$ ou 10, obtém-se os trios $\{5, 6, 12\}$ e $\{4, 9, 10\}$.

(b) Para que todos os trios tenham o mesmo produto p, seus elementos devem conter os mesmos fatores primos de p, apenas distribuídos de maneiras diferentes entre os números do trio. Assim, se x, y e z for um dos trios, pode se procurar outros trios que tenham a mesma soma e que troquem entre si alguns fatores de maneira que o produto seja mantido. Por exemplo, em

$$x + y + z \;=\; 2x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{3}z \;=\; 3x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z\,,$$

na primeira igualdade, um fator 2 é transferido de y para x e um fator 3 de z para y. Do primeiro para o terceiro termo, o que se faz é transferir um fator 3 de y para x e um fator 2 de z para y. Da primeira e da última igualdades obtém-se

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \\ x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se $5z = 8y$, o que substituído na primeira equação do sistema acima resulta em $30x = 17y$. No conjunto dos inteiros positivos, a solução mais direta é simplesmente escolher, nesta última igualdade, $x = 17$, $y = 30$ e então, da igualdade anterior, $z = 8y/5 = 48$. Assim, a soma é 95, o produto é 24480 e os três trios, obtidos das duas igualdades iniciais e na ordem em que aparecem ali, são $\{17, 30, 48\}$, $\{34, 45, 16\}$ e $\{51, 20, 24\}$.

Observações: Obviamente outras escolhas são possíveis para os fatores que serão intercambiados nas duas desigualdades iniciais e resultarão em respostas diferentes, que sempre correspondem a soluções inteiras de um sistema linear subdeterminado. Mas é preciso tomar alguns cuidados na escolha desses fatores para se evitar obter trios que são apenas permutações uns dos outros. Além disso, o que garantiu que y e z tenham o mesmo sinal na solução do sistema linear foi que, nas duas igualdades iniciais, os fatores intercambiados entre as parcelas foram escolhidos de maneira que em uma das somas y e z (ou o segundo e o terceiro números) movimentam-se na mesma direção (ambos diminuem) e na outra um aumenta e o outro diminui. Isto garante os sinais opostos para os coeficientes de y e z no sistema linear e permite soluções no conjunto dos inteiros positivos.

Um par de números reais fica determinado de maneira única quando se fixam seu produto e sua soma. Para mais que dois números, este problema mostra que fixar a soma e o produto não determina estes números de maneira única nem mesmo no conjunto dos números naturais, o que não é tão surpreendente assim, uma vez que há apenas duas restrições e mais que duas incógnitas.

A análise deste problema sugere outros problemas interessantes, que detalhamos a seguir.

Problemas propostos (todos no conjunto dos números inteiros positivos):

1) Quais são os menores valores para s e p tais que haja pelo menos três trios distintos com a mesma soma s e o mesmo produto p?

2) Qual é o maior número possível de trios distintos com a mesma soma e o mesmo produto?

Rogerio de Queiroz Chaves, Ana Paula Chaves,
Abiel Costa Macedo e Valdivino Vargas Junior.

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
rogerio@ufg.br, apchaves@ufg.br
abiel@ufg.br, vvjunhior@ufg.br,

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 10, outubro de 2015, 28-32

Congruências

Yuri Lima

Resumo. Aprenderemos aqui a utilizar *congruências* para a resolução de vários problemas, como a solução de equações, a determinação de restos de divisões impossíveis de se fazer no "braço" e problemas de invariância (problemas onde algo, por exemplo a paridade, nunca muda). Tal ideia foi desenvolvida por Gauss em seu trabalho *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801, quando ele tinha apenas 24 anos de idade [1]. Aqui, trabalharemos sempre com os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e os números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

1. Divisibilidade

Definição: Sejam a, b inteiros. Dizemos que a divide b (notação: $a|b$) se existir um inteiro c tal que $b = ac$.

Em outras palavras, dizer que a divide b significa dizer que a divisão de b por a dá exata, ou que o resto dessa divisão é zero. Relembrando a divisão entre dois números, temos (Algoritmo da Divisão ou de Euclides):

$$\begin{array}{l|l} b & \quad a \quad \\ \cline{2-2} & \quad q \quad \longrightarrow \text{quociente} \\ r \longrightarrow \text{resto} & \end{array} \qquad \text{No nosso caso:} \quad \begin{array}{l|l} b & \quad a \quad \\ \cline{2-2} & \quad c \quad \\ 0 & \end{array}$$

$$(b = aq + r) \qquad\qquad (b = ac)$$

Exemplos: 3 divide 12, pois $12 = 3 \times 4$; 7 divide 56, pois $56 = 7 \times 8$.

2. Congruência

A ideia de congruência é a seguinte: quando nos deparamos com um problema que relacione divisões, potenciações, etc., por que não trabalhamos com os restos das divisões ao invés dos próprios números? Quer dizer, por que não nos esquecemos dos números e ficamos apenas com os restos? Uma vez que esses restos são menores do que os números, é de se esperar que isso simplifique a solução dos problemas, o que de fato ocorre! Antes das aplicações, vamos ver um pouco de teoria.

Definição: Se a, b, m são inteiros ($m > 0$), dizemos que a é congruente a b módulo m se $m|(b-a)$. Denotaremos essa situação por $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$.

Dizer que a é congruente a b módulo m significa que a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m.

Exemplos: $21 \equiv 15(\operatorname{mod} 6)$, pois $6|(21-15)$. Observe que o resto da divisão dos dois números por 6 é igual a 5. $4 \equiv 15(\operatorname{mod} 11)$, pois $11|(4-15)$; $32 \equiv 0(\operatorname{mod} 4)$, pois $4|(32-0)$.

Proposição 1: Sejam a, b, c, m inteiros, $m > 0$. Então:

(a) $a \equiv a(\operatorname{mod} m)$;

(b) Se $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, então $b \equiv a(\operatorname{mod} m)$;

(c) Se $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ e $b \equiv c(\operatorname{mod} m)$, então $a \equiv c(\operatorname{mod} m)$.

Demonstração:

(a) Como $m|0 = (a-a)$, decorre que $a \equiv a(\operatorname{mod} m)$.

(b) Se $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, então $m|(b-a)$. Logo $m|(a-b)$, e isso dá que $b \equiv a(\operatorname{mod} m)$.

(c) Vamos utilizar o seguinte fato: se m divide dois números X e Y, então m divide a soma $X + Y$ desses dois números.

Usando esse fato, temos o seguinte:

$$\begin{cases} a \equiv b(\operatorname{mod} m) & \Rightarrow m|(b-a) \\ b \equiv c(\operatorname{mod} m) & \Rightarrow m|(c-b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m|(c-a) \quad \Rightarrow \quad a \equiv c(\operatorname{mod} m).$$

Você já deve estar percebendo que o símbolo $\equiv$ (congruente) funciona de modo parecido ao símbolo $=$ (igual), quer dizer, muitas das manipulações que fazemos com equações podem ser feitas com o sinal de congruência. Abaixo, estão outras dessas propriedades e os equivalentes a elas em equações.

Algumas propriedades úteis:

1) Se $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, então $\begin{cases} a+c \equiv b+c(\mathrm{mod}\, m) \\ a-c \equiv b-c(\mathrm{mod}\, m), \\ ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m). \end{cases}$ para todo $c \in \mathbb{Z}$.

Em analogia com equações, temos: se $a=b$, então $\begin{cases} a+c=b+c \\ a-c=b-c \\ ac=bc. \end{cases}$

2) Se $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ e $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, então $\begin{cases} a+c \equiv b+d(\mathrm{mod}\, m) \\ a-c \equiv b-d(\mathrm{mod}\, m) \\ ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m). \end{cases}$

Em analogia com equações, temos: se $a=b$ e $c=d$, então

$$\begin{cases} a+c=b+d \\ a-c=b-d \\ ac=bd. \end{cases}$$

Como consequência da propriedade 2), temos que se $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, então $a \cdot a \equiv b \cdot b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}\, m)$. Daí, temos $a^2 \cdot a \equiv b^2 \cdot b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^3 \equiv b^3(\mathrm{mod}\, m)$. Prosseguindo dessa forma, concluímos que $a^k \equiv b^k(\mathrm{mod}\, m)$, para todo natural k.

Uma propriedade que não vale é a de "cancelar" termos iguais. Nas equações, se tivermos por exemplo $6A = 6 \times 5$, então podemos "cancelar" o 6, obtendo assim $A = 5$. Na congruência, isso não pode ser feito! De fato, se $A = 3$ então $6A \equiv 6 \times 5(\mathrm{mod}\, 4)$, pois $4|(6A - 6 \times 5) = -12$, mas 3 não é igual a 5. (!!!)

Vamos agora aos exercícios.

Exercícios:

1. Mostre que o quadrado de um número inteiro não pode terminar em 2, 3, 7 ou 8.

2. A soma dos inteiros a e b termina por um zero. Mostre que os quadrados a^2 e b^2 terminam pelo mesmo algarismo.

3. Ache o resto da divisão de 4^{555} por 10.

4. Prove que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

5. (**OBM-2003**) Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

6. Mostre que os inteiros 3^n e 3^{n+4} terminam à direita pelo mesmo algarismo, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

7. A soma de dois quadrados ímpares pode ser um quadrado perfeito? Justifique.

8. Existe um inteiro positivo tal que seus fatores primos pertencem ao conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$ e que termina em 11? Se existir, ache o menor deles. Se não existir, mostre porquê.

9. Sabendo que p e $8p^2 + 1$ são primos, ache o valor de p.

10. Se p e $p^2 + 2$ são primos, mostre que $p^3 + 2$ também é um primo.

11. Mostre que não existem naturais a, b tais que $a^2 - 3b^2 = 8$.

12. (**Rússia**) Ache todos os pares de números primos p, q tais que $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

13. (**Hungria**) Em cada vértice de um quadrado há algumas fichas. Um movimento é escolher um vértice, tirar algumas fichas dele, escolher um vizinho e pôr o dobro de fichas retiradas no vizinho. Se no início há 1, 0, 0, 0 fichas, é possível termos 1, 9, 8, 9 fichas em algum momento?

Fatos que ajudam nos Exercícios:

1) Congruência módulo 10 indica em qual algarismo o número termina. De fato, temos: $17 \equiv 7 \pmod{10}$; $121 \equiv 1 \pmod{10}$; $523 \equiv 3 \pmod{10}$; $102 \equiv 2 \pmod{10}$.

2) A congruência módulo 2 nos dá a paridade do número:
   (i) x é par $\iff x \equiv 0 \pmod 2$;
   (ii) x é ímpar $\iff x \equiv 1 \pmod 2$.

3) Analisando um quadrado perfeito módulo 4, temos:
   (i) $x \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 0^2 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 4$;
   (ii) $x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 1^2 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 4$;
   (iii) $x \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 4$;
   (iv) $x \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Resumindo, se x é par, então $x^2 \equiv 0 \pmod 4$, e se x é ímpar, então $x^2 \equiv 1 \pmod 4$.

4) Analisando agora módulo 3, temos:
(i) $x \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 0^2 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 0 (\bmod 3)$;
(ii) $x \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 1^2 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 1 (\bmod 3)$;
(iii) $x \equiv 2 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 2^2 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 1 (\bmod 3)$.

Logo, não existe um inteiro x tal que $x^2 \equiv 2 (\bmod 3)$.

5) Se p é um número primo maior do que 3, então $p \equiv 1$ ou $5 (\bmod 6)$. De fato, se:
(i) $p \equiv 0 (\bmod 6) \Rightarrow p = 6k \Rightarrow p$ é múltiplo de $6 \Rightarrow p$ não é primo (contradição).
(ii) $p \equiv 2 (\bmod 6) \Rightarrow p = 6k + 2 \Rightarrow p$ é um primo par maior do que 5 (contradição).
(iii) $p \equiv 3 (\bmod 6) \Rightarrow p = 6k + 3 \Rightarrow p$ é primo múltiplo de 3 maior do que 3 (contradição).
(iv) $p \equiv 4 (\bmod 6) \Rightarrow p = 6k + 4 \Rightarrow$ idem a (i).

Se você quiser aprofundar seus conhecimentos, sugerimos um artigo de C. G. Moreira publicado na revista Eureka!, veja a referência [2].

Bibliografia

[1] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801).

[2] C. G. Moreira, Divisibilidade, congruências e aritmética módulo n. *Revista Eureka!* **2** (1998), 41–52.

Autor: Yuri Lima

Endereço: Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS.
Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, França.
e-mail: `yurilima@gmail.com`

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 10, outubro de 2015, 33-50

Contagens Duplas

Samuel Feitosa

Resumo. Em um grande número de problemas de combinatória é relevante contar os elementos de algum conjunto de pelo menos duas maneiras diferentes. Nosso propósito aqui será estudar algumas formas de fazer tais contagens. Recomendamos que o leitor pense bastante em cada problema antes de ver a sua solução. As seções estão organizadas em ordem crescente de dificuldade, sendo a última bem mais avançada que as demais.

1. Grafos

Problema 1. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Solução. Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada exatamente duas vezes. Logo, o número obtido tem que ser par e isso claramente entra em contradição com o valor 63 obtido na primeira contagem.

Será que cada casa estar ligada a exatamente 7 outras foi crucial? É possível revolvermos o problema anterior com um enunciado mais geral:

Problema 2. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Solução. Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

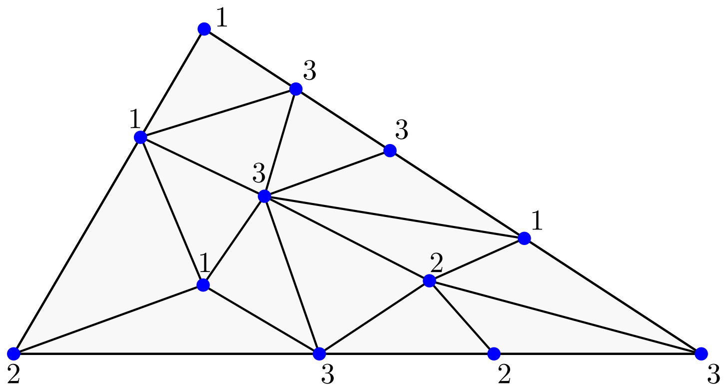
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, uma vez para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

Problema 3. Prove que numa festa com $2n$, pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Solução. Suponha, por absurdo, que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum e seja A um dos participantes da festa. Seja $M = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ o conjunto dos amigos de A. Considere uma nova festa restrita apenas ao conjunto M e preservando as relações de amizade da festa original. Como cada F_i tem um número ímpar de amigos em comum com A, na nova festa, cada F_i possui um número ímpar de amigos. Pelo exemplo anterior, k deve ser par. O mesmo argumento vale para qualquer pessoa na festa e consequentemente todos conhecem um número par de pessoas. Peça para cada um dos amigos de A fazerem uma lista de seus amigos diferentes de A. A soma da quantidade de nomes listados é par, pois é uma soma de uma quantidade par (igual a k) de números ímpares (cada F_i possui um número ímpar de amigos diferentes de A). Agora comparemos o número de aparições de cada uma das $2n-1$ pessoas diferentes de A nessas listas. Se cada uma delas aparecer em um número ímpar de listas, a soma total de todos os nomes em todas as listas seria ímpar (Lembre-se que a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar!). Mas isso é uma contradição. Logo, existem duas pessoas na festa com um número par de amigos em comum.

Problema 4. (Lema de Sperner) Um triângulo é dividido em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulo maior são numerados: 1, 2, 3. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre o lado do triângulo maior oposto ao vértice i ($i = 1, 2, 3$) não podem receber o número i (veja a figura a seguir). Mostre que entre os triângulos menores existe pelo menos um cujos vértices são numerados com os três números 1, 2 e 3.



Solução. Uma boa estratégia é pensar numa versão particular do problema. Olhando para o bordo do triângulo, temos uma situação semelhante ao problema inicial com uma dimensão e uma cor a menos. Consideremos, por exemplo, o lado dos vértices 1 e 3, poderíamos provar que dentre os segmentos da divisão deste lado, sempre existe um número ímpar de segmentos com as cores 1 e 3. Imagine uma pessoa com uma bandeira abaixada no vértice 1 caminhando em direção ao vértice 3. Ao passar por um vértice de número 3, a pessoa deve levantar a bandeira e, ao passar por um vértice de número 1, a pessoa deve abaixar a bandeira. Ao final do trajeto, a bandeira estará abaixada e, consequentemente, a pessoa terá realizado um número ímpar de movimentos de abaixar e levantar a bandeira. Cada movimento de mudança de posição da bandeira corresponde a um segmento com os números 1 e 3. Outro modo de ver isso, é perceber que a adição de um vértice de qualquer um desses dois números, não altera a paridade da quantidade de segmentos com vértices de números diferentes. Agora tentemos usar essa informação para resolver o problema. Contaremos o número de segmentos $\overline{13}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos de vértices $\overline{123}, \overline{133}$ e $\overline{113}$. Digamos que há x triângulos $\overline{123}$, y triângulos $\overline{133}$ e z triângulos $\overline{113}$. Observe que os segmentos internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{13}$ aparecem duas vezes nos triângulos $\overline{133}$ e $\overline{113}$ e uma vez apenas nos triângulos $\overline{123}$. Assim,

$$\begin{aligned} 2 \times \text{segmentos interiores } \overline{13} + \text{segmentos nos lados } \overline{13} &= \\ \text{número de segmentos } \overline{13} &= x + 2y + 2z. \end{aligned}$$

Como existe uma quantidade ímpar de segmentos nos lados, concluímos que x é ímpar.

Exercícios Propostos

1. Em uma festa com 23 pessoas, é possível que cada um possua 1, 3 ou 5 amigos na festa?

2. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecte exatamente 3 outros?

3. Existem 1000 cidades em Brazilândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Brazilândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

2. Identidades Binomiais

Uma excelente maneira de valorizar o significado de um número binomial é, logo após defini-lo, estudar propriedades deste objeto sem necessariamente calculá-lo explicitamente. Façamos o mesmo aqui: O número de maneiras de selecionarmos um subconjunto de r elementos distintos de um conjunto de n elementos distintos, onde a ordem da seleção não importa, é denotado por $\binom{n}{r}$.

Problema 5. Prove as seguintes afirmações:

1. (Relação de Stifel) $\displaystyle\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$.

2. $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$.

Solução.

1. O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $r+1$ pessoas em um grupo de $n+1$. Podemos dividir essas escolhas em dois grupos: aquelas que contém um certo indivíduo previamente destacado ($\binom{n}{r}$) e aquelas que não o contém ($\binom{n}{r+1}$).

2. O lado esquerdo conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas no grupo da $2n+2$ pessoas que estão comemorando o aniversário da Ana e do joão. Essas escolhas se dividem em três grupos, aquelas que não contém Ana e João ($\binom{2n}{n+1}$), aquelas que contém apenas um dos dois ($2\binom{2n}{n}$) e aquelas que contém ambos ($\binom{2n}{n-1}$).

Problema 6. (Teorema das Colunas) Mostre que:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Solução. Suponha que exista uma fila de $n+1+k$ pessoas. As primeiras $k+1$ pessoas são $c_0, c_1, \ldots, c_k$ e estão ordenadas pelas suas alturas. O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas nesse grupo. Certamente precisaremos escolher alguém do conjunto $\{c_0, c_1, \ldots, c_k\} = C$. Seja C_i o conjunto das escolhas em que o menor elemento de C escolhido é c_i. Qualquer escolha faz parte de algum desses C_i's. Para calcular o número de elementos de C_i, veja que c_i deve fazer parte dessa escolha e os outros n elementos devem ser escolhidos dentre os elementos posteriores a c_i, i.e., temos $n+k+1-i$ candidatos. Logo,

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} |C_i| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n}.$$

Problema 7. Mostre que: $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

Solução. Vamos contar o número de maneiras de escolhermos algumas crianças para passearem e, além disso, uma delas para ganhar um sorvete. Como a criança que ganhará o sorvete certamente estará no passeio, podemos começar escolhendo-a. Podemos fazer isso de n maneiras. Das crianças que restaram, devemos escolher algum subconjunto para acompanhar a primeira criança, podemos fazer isso de 2^{n-1} maneiras, isso nos dá o lado direito. Por outro lado, para cada $k \geq 1$, podemos escolher k crianças ($\binom{n}{k}$) e, posteriormente, podemos escolher uma delas para ganhar o sorvete de k maneiras. A soma sobre todos os k, contará todos os conjuntos, como está escrito no lado esquerdo.

Problema 8. (Putnam 1962) Mostre que:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Solução. Vamos construir uma situação semelhante ao problema anterior, sendo que agora seremos mais bondosos, além de escolher uma criança para ganhar um sorvete também escolheremos uma criança para ganhar um caramelo (a criança pode ser a mesma). O lado esquerdo conta essas escolhas como no problema anterior. Agora queremos contar o número de maneiras de primeiro escolhermos as crianças que vão receber as guloseimas e depois aquelas que irão acompanhá-las. Se essas duas crianças são diferentes, temos $n(n-1)2^{n-2}$ escolhas. Se essas crianças são iguais, temos $n2^{n-1}$ escolhas. Agora basta ver que:

$$n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercícios Propostos

1. Prove as seguintes identidades utilizando argumentos de contagens duplas:

   (a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

   (c) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.

   (d) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ e com isso conclua que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(e) (Identidade de Vandermonde) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}$.

2. Considere a sequência de Fibonacci definida por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Prove que:

   (a) O número de maneiras de cobrirmos um tabuleiro $2 \times n$, sem sobreposição, com peças 1×2 é F_{n+1}.

   (b) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k} = F_{n+1}$.

3. Definimos por D_n o número de permutações de $\{1, 2 \ldots, n\}$ sem pontos fixos (um elemento i é um ponto fixo quando ele ocupa a posição i na permutação). Usando o princípio da inclusão-exclusão podemos obter:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

   Mostre que:

$$n! = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}D_{n-r}.$$

4. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

5. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

3. Tabuleiros

Se o que queremos contar está de alguma forma associado à números escritos em um tabuleiro, temos uma contagem dupla extremamente natural: a soma dos números escritos nas linhas é igual à soma dos números escritos nas colunas.

Problema 9. (Olimpíada Russa) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuía 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.

SOLUÇÃO. Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's.

A estratégia do problema anterior foi associar uma matriz com entradas em $\{0, 1\}$ que codificasse o enunciado e realizar as duas somas possíveis do número de uns: pelas linhas e pelas colunas. Outra estratégia importante é contar pares de números de uns ou zeros em uma mesma linha ou coluna. Vejamos uma nova solução para o problema anterior usando essa ideia.

SOLUÇÃO. Suponha que a afirmação é falsa, i.e., para cada par de estudantes, existe pelo menos um problema que não foi resolvido por eles. Façamos uma matriz 200×6 como anteriormente. Para cada par de linhas j e k, cole uma etiqueta E_{jk} ao problema i se ele não foi resolvido pelos estudantes correspondentes. Contemos o número de etiquetas utilizadas. Para cada par de linhas, devemos usar pelo menos uma etiqueta, logo o número mínimo de etiquetas é $\binom{200}{2}$. Como cada problema foi resolvido por pelo menos 120 estudantes, os seis problemas podem receber no máximo $6\cdot\binom{80}{2}$ etiquetas. Como $\binom{200}{2} < 6\cdot\binom{80}{2}$, temos um absurdo.

Problema 10. (Olimpíada Russa) Bruno pintou k casas de um tabuleiro $n \times n$ de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

SOLUÇÃO. Ao pintar duas casas pretas em uma mesma linha, Bruno cria um empreendimento para sua pintura: não poderá pintar outras duas casas pretas nessas colunas. Comecemos contando esses empreendimentos. Denotemos por a_i o número de casas pintadas na linha i, então $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Para cada par de casas pintadas na linha i, associemos uma etiqueta E_{jk} se essas casas estão nas colunas j e k. O número de etiquetas distintas é

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2},$$

pois em cada linha temos $\binom{a_i}{2}$ pares de quadrados pintados. Como não podemos repetir etiquetas, pois assim formaríamos um quadrado, o número máximo de etiquetas é $\binom{n}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i}{2} &\leq \binom{n}{2}\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-a_i}{2} &\leq \frac{n^2-n}{2}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy, $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)n \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = k^2$ e, consequentemente,

$$\frac{k^2}{2n} - \frac{k}{2n} \leq \frac{n^2-n}{2}.$$

Estudando o sinal da inequação do segundo grau em k, obtemos que

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Problema 11. (IMO 1998/2) Num concurso, há a candidatos e b juízes, onde $b \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo passar ou não. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Solução. Façamos um tabuleiro $a \times b$ onde as linhas representam os candidatos e as colunas os juízes. Na interseção de uma linha e coluna, colocaremos um número 1 caso aquele juiz tenha aprovado aquele estudante e o número 0 caso contrário. Se os juízes das colunas i e j concordam com o julgamento do aluno da coluna k, pregamos uma etiqueta E_{ij} nesse aluno. Calculemos o número de etiquetas pregadas de duas maneiras. Primeiramente, para cada par de colunas, sabemos que existem no máximo k etiquetas associadas. Logo, o número de etiquetas usadas é menor ou igual a $\binom{b}{2}k$. Para contar esse número usando as linhas, denotaremos por a_i o número de zeros na linha i. Assim, para cada linha, temos exatamente $\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}$ etiquetas. As duas contagens resultam em:

$$\sum_{i=0}^{a}\left(\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}\right) \quad \leq \quad k\binom{b}{2}$$

Agora vamos fazer outra contagem dupla para estimar o termo

$$\left(\binom{a_i}{2}+\binom{b-a_i}{2}\right).$$

O que ele conta? Conta o número de maneira de escolhermos duas pessoas do mesmo sexo em um grupo de a_i homens e $b-a_i$ mulheres. Esse número também pode ser calculado contando o número escolhas de duas pessoas quaisquer ($\binom{b}{2}$) retirando-se aquelas escolhas mistas ($a_i(b-a_i)$). Como b é impar,

$$\begin{aligned} 1 &\leq (b-2a_i)^2 \\ 1+4a_i(b-a_i) &\leq b^2 \\ a_i(b-a_i) &\leq \frac{b^2-1}{4} \end{aligned}$$

Substituindo na primeira desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{a}\left(\binom{b}{2}-\frac{b^2-1}{4}\right) &\leq k\binom{b}{2} \\ a\frac{b(b-1)}{2}-a\frac{(b-1)(b+1)}{4} &\leq k\frac{b(b-1)}{2} \\ ab-\frac{b+1}{2} &\leq kb \\ \frac{b-1}{2b} &\leq \frac{k}{a} \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. (Olimpíada Russa) Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de n dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente m casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

2. Em um certo comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê possui exatamente três membros. Prove que o número de membros é igual ao número de subcomitês.

3. (Olimpíada Balcânica 1997) Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja S um conjunto com n elementos, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.

4. (Olimpíada Romena 2003) Um inteiro n, $n \geq 2$, é bonito se existe uma família de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que:

   (1) $i \notin A_i$ para todo i.

   (2) $i \in A_j$ se e somente se $j \notin A_i$, para índices distintos i e j.

   (3) $A_i \cap A_j$ é não vazio para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Prove que:

   a) 7 é bonito.

   b) n é bonito se, e somente se, $n \geq 7$.

4. Comitês e Conjuntos

O caso mais comum para usarmos contagens duplas é quando o conjunto que queremos contar possui uma estrutura de produto $A \times B$, pois nesse caso:

$$\sum_{a \in A} |(a, B)| \quad = \quad \sum_{b \in B} |(A, b)|$$

Nesta seção, trataremos de alguns exemplos onde esta estrutura não está tão explícita.

Problema 12. [1]
Há n tipos de doce na loja do Zé. Um dia, m amigos se juntam para comprarem k doces diferentes cada um. Cada tipo de doce é comprado por r dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por t amigos. Prove que:

(i) $mk = nr$;

(ii) $r(k-1) = t(n-1)$.

SOLUÇÃO. O número de doces levados da loja é mk. Como cada doce é levado por r amigos, esse número também é nr. Quantos pares de

[1] Você poderá encontrar mais exemplos como esse estudando Block Designs.

doces são levados? Pela última informação do enunciado, esse número é $t\binom{r}{2}$. Por outro lado, cada amigo leva $\binom{k}{2}$ pares de doces, logo:

$$\begin{aligned} t\binom{r}{2} &= m\binom{k}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= m\frac{k(k-1)}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= \frac{nr(k-1)}{2} \\ r(k-1) &= t(n-1) \end{aligned}$$

Problema 13. [2] Seja X um conjunto com n elementos ($n \geq 1$). Suponha que $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ é uma família de subconjuntos de X com a propriedade que

$$|A_i \cap A_j| = 1,$$

para todos $i \neq j$. Mostre que $m \leq n$.

Solução. Suponhamos inicialmente que $m \geq 2$ (Quando $m < 2$ o problema é trivial). Além disso, suponhamos que nenhum A_i é vazio ou igual ao conjunto todo. Iremos nos concentrar nos pares (x, A) onde $x \notin A$. Suponha que o elemento x pertence exatamente $d(x)$ conjuntos: $\{A_1, A_2, \ldots, A_{d(x)}\}$. Como $|A \cap A_i| = 1$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, d(x)\}$, deve existir um $x_i \neq x$ tal que $x_i \in A \cap A_i$. Além disso, se $i \neq j$, $x_i \neq x_j$ e consequentemente $|A| \geq d(x)$. Se $m > n$, $m - d(x) > n - d(x) \geq n - |A|$ e, portanto,

$$\frac{d(x)}{m - d(x)} < \frac{|A|}{n - |A|}.$$

Para cada tal par (x, A), some o número $\dfrac{|A|}{n - |A|}$. Qual números iremos obter? Fixado A, existem $n - |A|$ possíveis valores de x, logo:

$$\sum_{(x,A)} \frac{|A|}{n - |A|} = \sum_{A} \frac{(n - |A|)|A|}{n - |A|} = \sum_{A} |A|.$$

[2]Este problema é um caso particular da desigualdade de Fischer. Uma solução elementar para este problema pode ser encontrada usando Álgebra Linear

Fixado x, existem $m - d(x)$ possibilidade para A, portanto, a soma anterior deve ser maior que

$$\sum_{(x,A)} \frac{d(x)}{m - d(x)} = \sum_x \frac{(m - d(x)d(x))}{m - d(x)} = \sum_x d(x).$$

Assim obtivemos um absurdo pois $\sum_A |A| = \sum_x d(x)$ (estamos contando os elementos que foram usados nos conjuntos de duas formas). Os casos em que algum dos A_i's é igual ao conjunto todo ou o conjunto vazio é deixado para o leitor.

Problema 14. (Banco IMO 2004) Existem n estudantes em uma universidade, n inteiro ímpar. Alguns estudantes se reunem em clubes (um estudante pode pertencer a clubes diferentes). Alguns clubes se reunem para formar algumas sociedades(um clube pode pertencer a diferentes sociedades). Existem k sociedades. Suponham que aconteçam as seguintes condições:

i) cada par de estudantes está em exatamente um clube.

ii) para cada estudante e cada sociedade, o estudante está em exatamente um clube da sociedade,

iii) cada clube tem um número ímpar de estudantes e, além disso, um clube com $2m + 1$ estudantes ($m > 0$) está em exatamente m sociedades.

Encontre todos os valores possíveis de k.

Solução. Vamos contar o número de triplas (e, C, S) onde e é um estudante, C é um clube e S é uma sociedade. Fixados e e S, existe apenas uma possibilidade para C, assim, em nossa primeira contagem obtivemos nk tais triplas. Fixado uma comissão C, temos $\frac{|C| - 1}{2}$ possibilidades para S e, uma vez que escolhemos C e S, temos $|C|$ possibilidades para e(ele deve ser um estudante em C). Assim, o número de tais triplas é

$$\begin{aligned} nk &= \sum_C \frac{|C|(|C| - 1)}{2} \\ &= \text{total de pares de estudantes nos clubes} \\ &= \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $k = \dfrac{n-1}{2}$. Um exemplo onde este valor é atingindo pode ser produzido considerando-se apenas um clube com todos os estudantes e k sociedades iguais formadas por esse único clube.

Exercícios Propostos

1. Nove cientistas trabalham em um projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abrí-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

   (i) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

   (ii) Na situação do item (i), quantas chaves cada cientista deve ter?

2. (Olimpíada Russa)

   (i) Uma comissão se reuniu 40 vezes. Em cada reunião estiveram presentes 10 pessoas de tal maneira que quaisquer dois dos membros da comissão não estiveram juntos em mais de uma oportunidade. Demonstre que a quantidade de membros da comissão é maior que 60.

   (ii) Demonstre que com 25 pessoas não se pode formar mais que 30 comissões de 5 pessoas cada uma de modo que não existam duas comissões que tenham mais de um membro em comum.

3. (OBM,1992/8) Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo empate, cada jogador ganhou $\frac{1}{2}$ ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor 0 pontos. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número de participantes é um quadrado perfeito.

5. Problemas Suplementares

Os problemas desta seção exigem mais engenhosidade.

Teorema 1. (Erdos-Ko-Rado) Seja X um conjunto com n elementos e $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ uma família de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes condições

1. $|A_i| = k \leq \dfrac{n}{2}$ para todo i.
2. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todos i e j distintos.

Então $p \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Prova. Comecemos com um lema que aparentemente não apresenta nenhuma conexão com o problema:

Lema. Considere um círculo C dividido por n pontos. Um arco de tamanho k consiste de $k+1$ pontos consecutivos e k arestas entre eles. Seja $n \geq 2k$, e suponha que existem t arcos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_t$, todos de tamanho k, tais que quaisquer dois arcos possuem uma aresta em comum. Então $t \leq k$.

A prova do lema será deixada como exercício para o leitor. Seja F uma família como no enunciado do teorema. Cada permutação cíclica dos elementos de X corresponde a uma divisão em pontos e arcos, onde cada elemento do conjunto está entre dois pontos. Cada conjunto de k elementos pode ser visto como um arco de tamanho k formando por elementos justapostos (em uma ordem qualquer). Para cada tal permutação, podemos calcular quantos arcos de tamanho k correspondem a conjuntos da família. Pelo lema, esse número é menor ou igual a k. Como existem $(n-1)!$ permutações, a quantidade máxima de conjuntos que podem ser encontrados nessas permutações é $k(n-1)!$. Certamente nessa contagem, alguns conjuntos foram contados várias vezes. É agora que usaremos uma contagem dupla. Fixado um conjunto A, seus elementos podem estar arranjandos para formarem um arco de tamanho k de $k!$ maneiras. Os outros elementos do conjunto podem ser permutados nas posições que restaram de $(n-k)!$ maneiras. Ou seja, cada conjunto é contado exatamente $k!(n-k)!$ vezes. Como existem p conjuntos, temos:

$$\begin{aligned} pk!(n-k)! &\leq k(n-1)! \\ p &\leq \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Problema 15. (Olimpíada do Leningrado 1987) Sejam A_1, A_2, …, A_s uma família de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $|A_i| = a_i$. Sabemos que nenhum desses subconjuntos contém outro subconjunto da família. Prove que

$$\binom{n}{a_1}^{-1} + \binom{n}{a_2}^{-1} + \ldots + \binom{n}{a_s}^{-1} \leq 1$$

Problema 16. (IMO 2005) Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de $2/5$ dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

Problema 17. Alguns asteriscos estão escritos nas casas de um tabuleiro $m \times n (m < n)$, de modo que existe pelo menos um asterisco em cada coluna. Mostre que que existe um asterisco A tal que $l_A > c_A$, onde l_a e c_A denotam as quantidade de asteriscos na linha e coluna de A, respectivamente.

Problema 18. (Olimpíada Iberoamericana 2001) Sejam S um conjunto de n elementos e $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subconjuntos de $S (k \geq 2)$, tais que cada um deles têm pelo menos r elementos. Demonstre que existem i e j, com $i \neq j$, tais que a quantidade de elementos em comum entre S_i e S_j é maior ou igual a $r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$.

Problema 19. (IMO 1989) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

1. não haja três pontos de S que sejam colineares;
2. para qualquer ponto P de S, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

Prove que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

Problema 20. (IMO 1987) Seja $p_n(k)$ o total de permutações do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que contêm exatamente k pontos fixos. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

Observação: uma *permutação* f de um conjunto S é uma função bijetora de S em S; um elemento i de S é chamado *ponto fixo da permutação* f se $f(i) = i$.

Bibliografia

[1] Aigner, Martin, Günter M. Ziegler, and Paul Erdos. *Proofs from the Book.* Vol. 274. Berlin: Springer, 2010.

[2] Andreescu, Titu, and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies.* Springer Science & Business Media, 2003.

[3] Djukić , D., Janković, V., Mati, I., Petrović, N. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009* Second Edition. Springer Science & Business Media, 2011.

[4] Engel, Arthur. *Problem-solving strategies.* New York: Springer, 1998.

[5] Fomin, Dmitri, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Mathematical Circles.* Universities Press, 1996.

[6] Shine, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica.* Coleção Olimpíadas de Matemática. Ed. SBM: Rio de Janeiro, 2009.

Autor: Samuel Feitosa

Endereço: Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros, s/n, Ondina.
CEP: 40.170-110 - Salvador/BA
e-mail: samuelbf85@gmail.com

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 10, outubro de 2015, 51-57

Princípio da Casa dos Pombos[1]

Bruno Holanda

Resumo. O princípio da casa dos pombos também é conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como *Princípio de Dirichlet* pois, foi o matemático Lejeune Dirichlet o primeiro matemático a usa este método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa ideia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdős e Szekeres. Vamos abordar este princípio da seguinte maneira:

"Se em n caixas são postos $n+1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

Alguns Exemplos:

i. Em um grupo de três pessoas, pelo menos duas delas são do mesmo sexo.

ii. Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas têm o mesmo signo.

iii. Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.

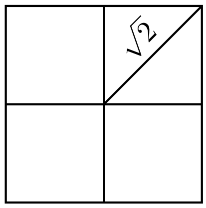
iv. Na cidade de Fortaleza, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Agora vamos ver como algo tão simples pode resolver problemas aparentemente difíceis:

[1]POTI 2012 - Combinatória - Nível 2 - Aula 7:
http://poti.impa.br/index.php/videos/combinatoria

Problema 1. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

SOLUÇÃO. Divida o quadrado em quatro quadrados menores como na figura ao lado. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal, o resultado segue de imediato. $\square$



Passo de Mágica?

Para o aluno iniciante a solução do problema anterior pode ter parecida um pouco mágica. Vamos mostrar que não é bem assim, que existe um método na solução de alguns problemas simples que usam a ideia da casa dos pombos.

A primeira coisa que devemos aprender a reconhecer é quando um problema se trata de um problema sobre casa dos pombos. Isso pode ser ganho com experiencia, mas vamos dar um empurãozinho para você. Um problema de PCP tem quase sempre a seguinte cara:

- *Dado um conjunto de n* **objetos**, *prove que podemos escolher k deles satisfazendo uma* **propriedade**.

Bem, depois de identificar que o enunciado do problema no traz a ideia de usar PCP, devemos nos concentrar em responder as seguintes perguntas:

(i) **Quem são os pombos?**

(ii) **Quantas são as casas?**

(iii) **Quem são as casas?**

Quase sempre as duas primeiras perguntas são as mais fáceis de serem respondidas. Para responder a terceira pergunta devemos pensar no conceito dual de *espaço amostral*. Por um lado, o espaço amostral é o conjunto das possíveis posições dos pombos. Por outro, é a união de todas as casas.

Para finalizar, devemos separar o espaço amostral no número de casas já descoberto. Nessa hora é importante lembrar que as casas devem fletir a propriedade desejada.

Como acabamos de ver, usar o princípio da casas dos pombos não é difícil. O difícil está em achar o que serão nossos "pombos" e "caixas". O próximo problema é, *a priori*, um problema de teoria dos números. Porém, vamos usar o princípio da casa dos pombos para resolvê-lo.

Problema 2. Prove que dados sete inteiros positivos, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de 10.

SOLUÇÃO. Vamos montar seis caixas $C_0, C_2, \ldots, C_5$ onde um inteiro está na caixa C_i se é congruente a i ou a $-i$ módulo 10. Sabemos que existirão dois inteiros na mesma caixa. Dessa forma, se eles forem incongruentes módulo 10, basta somá-los. Caso contrário, faça a sua diferença. $\square$

Problema 3. Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

SOLUÇÃO. Podemos separar os pontos de coordenadas inteiras (que é representado por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) em quatro grupos G_1, G_2, G_3, G_4 como a seguir.

i) $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y \text{ são ambos pares}\}$.

ii) $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y \text{ são ambos ímpares}\}$.

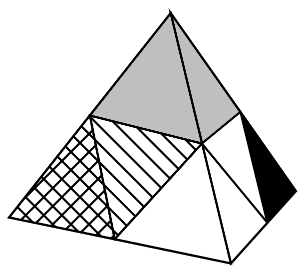
iii) $G_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \text{ é par e } y \text{ é ímpar}\}$.

iv) $G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \text{ é ímpar e } y \text{ é par}\}$.

Observe que pontos que pertencem ao mesmo grupo, possuem pontos médios com coordenadas inteiras. Como temos 5 pontos, o princípio da casa dos pombos nos garante que há pelo menos dois pontos no mesmo grupo. □

Problema 4. Nove pontos são postos sobre a superfície de um tetraedro regular com $1cm$ de aresta. Prove que detre esses pontos é possível achar dois com distância (espacial) não maior que 0,5cm.

Solução. Vamos particionar a superfície do tetraedro em 16 triângulos equiláteros congruentes, dividindo cada face em quatro partes usando suas bases médias. Agora vamos criar 8 regiões pitando esses triângulos de acordo com a seguinte regra: os triângulos que possuem um mesmo vértice do tetraedro serão pintados da mesma cor; dessa forma já usamos quatro cores diferentes para 12 triângulos e os outros quatro vamos pintar usando as demais cores. De acordo com o Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois dos nove pontos estarão na mesma região. Fica apenas faltando que a distância máxima entre dois pontos da mesma região é no máximo 0,5cm. □



Problemas Propostos

Problema 5. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

Problema 6. Em cada casa de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, dentre as oito somas ao longo de uma mesma linha, coluna ou diagonal, existem duas iguais.

Problema 7. Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

Problema 8. Prove que existe uma potência de 3 terminada nos dígitos 001 (na base decimal).

Problema 9. Mostre que um triângulo equilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos equiláteros menores.

Problema 10. (Longlist IMO 1977 - Romênia) Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Problema 11. (Bielorussia 1996) Em um grupo de 29 hobbits existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles se sentaram ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.
a) Prove que pelo menos 10 hobbtis falavam a verdade.
b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

Problema 12. Em cada casa de um tabuleiro 10×10 é posto um inteiro de modo que a diferença positiva entre os inteiros de duas casas vizinhas (lado em comum) é no máximo 5. Prove que dois destes inteiros devem ser iguais.

Problema 13. Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

Problema 14. (Longlist IMO 1979 - Bulgária) Colocamos $4n + 1$ reis em um tabuleiro infinito. Prove que podemos escolher $n + 1$ deles de modo que não existam dois que se ataquem.

Problema 15. Prove que de qualquer subconjunto de $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ é possível escolher dois que sejam primos entre si.

Problema 16. (IMO 1972) Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Problema 17. Quarenta estudantes participaram de uma olimpíada de matemática. A prova consistia de cinco problemas ao todo. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 23 participantes. Prove que deve existir dois participantes tais que todo problema foi resolvido por pelo menos um deles dois.

Problema 18. Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto

$$M = \{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}$$

é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Dicas e Soluções

5. Imite a solução do problema 1.

6. A soma de três números varia no conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ como são 8 somas, pelo menos uma será usada mais de uma vez.

7. Se $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ são os números, considere as somas

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}.$$

   Se uma delas for um múltiplo de 10, teremos encontrado a solução do problema. Caso contrário, como há 9 restos possíveis (distintos de zero) na divisão por 10, pelo PCP, existirão duas destas somas que serão congruentes módulo 10. Se $S_i \equiv S_j \pmod{10}$, então

$$S_i - S_j \equiv a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \equiv 0 \pmod{10}.$$

   Isso conclui a solução.

8. Use PCP para demonstrar que existem duas potências de 3 com o mesmo resto na divisão por 1000.

9. Observe o que acontece nos vértices do triângulo maior.

10. Adapte a solução do problema 3

13. Pinte o tabuleiro usando 8 cores como no diagrama a seguir

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Pelo PCP existirão pelo menos 5 torres em casas de mesma cor. Observe que torres em casas de mesma cor não se atacam.

14. Pinte o tabuleiro usando 4 cores como no diagrama a seguir

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

Repita o argumento anterior.

15. Separe o conjunto em n pares de elementos consecutivos.

Bibliografia

[1] Fomin, Dmitri, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Círculos Matemáticos - A Experiência Russa.* IMPA, 2010.

Autor: Bruno Holanda

Endereço: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA.
Estrada Dona Castorina, 110, Jardim Botânico
CEP: 22.460-320 - Rio de Janeiro-RJ
e-mail: `brunolholanda@yahoo.com.br`

Objetivo e Política Editorial

A Revista da Olimpíada tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e Aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX ou LATEX podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres *ad hoc* e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.