

2ª fase da OBMEP 2013: Questão 4 - Nível 3

Professor José Hilário

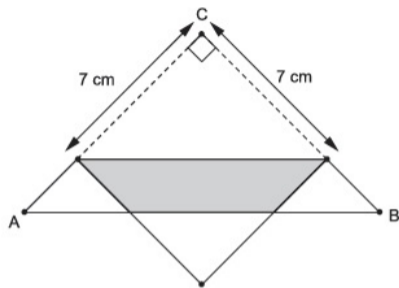
www.ime.ufg.br/obmep

e-mail: jhilario@ufg.br

Goianésia, 4 de setembro de 2014

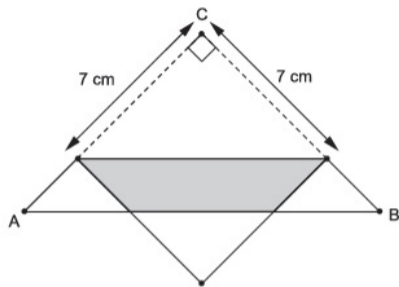
Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2 , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2 , é $f(7)$.



Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2 , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2 , é $f(7)$.

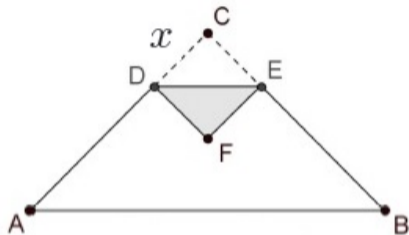


a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

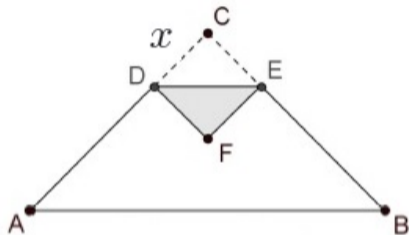
Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB , segue que $CDFE$ é um quadrado de lado $CD = x$ cm; a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado $CDFE$. Temos $(CDFE) = x^2$ e então $(DEF) = \frac{x^2}{2}$.



Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB , segue que $CDFE$ é um quadrado de lado $CD = x$ cm; a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado $CDFE$. Temos $(CDFE) = x^2$ e então $(DEF) = \frac{x^2}{2}$.

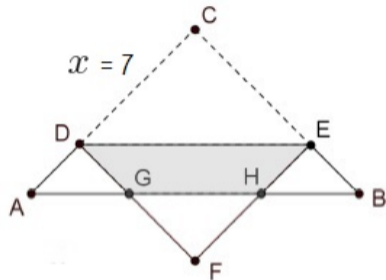


Para $x = 2$ o triângulo DEF representa a região de sobreposição, logo, $f(2) = 2$; analogamente, para $x = 5$ temos $f(5) = \frac{25}{2}$.

Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

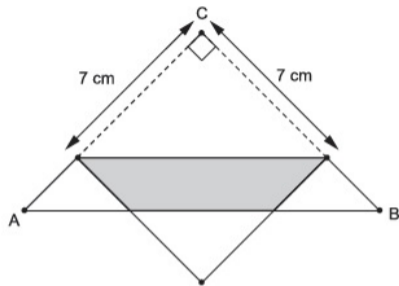
Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB , segue que $CDFE$ é um quadrado de lado $CD = x$ cm; a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado $CDFE$. Temos $(CDFE) = x^2$ e então $(DEF) = \frac{x^2}{2}$.



No caso $x = 7$, a área de sobreposição, representada pelo trapézio $DEHG$, é igual a $(DEF) - (GHF)$. O triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 3$ cm; como $DF = 7$ temos $GF = 4$. Logo $(DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{7^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{33}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $f(7) = \frac{33}{2}$.

Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

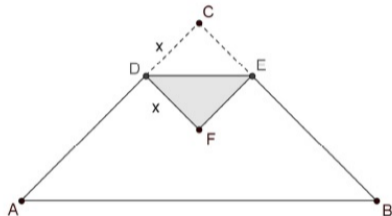
A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm^2 , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2 , é $f(7)$.



b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.

Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

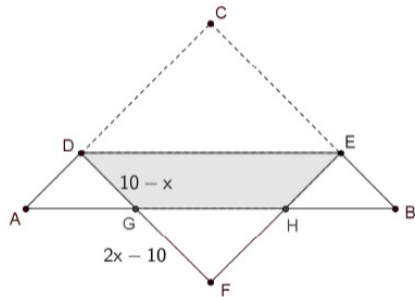
A figura ilustra a região de sobreposição para $0 < x \leq 5$.



Neste caso, CDFE é um quadrado de lado x e a área de DEF é metade da área desse quadrado, ou seja, $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Questão 4 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

A figura ilustra a região de sobreposição para $5 < x \leq 10$.



Neste caso, o triângulo ADG é isósceles com $AD = DG = 10 - x$; logo $GF = DF - DG = x - (10 - x) = 2x - 10$ e temos $f(x) = (DEHG) = (DEF) - (GHF) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 40x - 100)$.