

2ª fase da OBMEP 2013: Questão 1 - Nível 3

Professor José Hilário

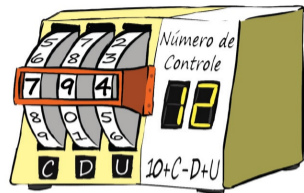
www.ime.ufg.br/obmep

e-mail: jhilario@ufg.br

Goianésia, 4 de setembro de 2014

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

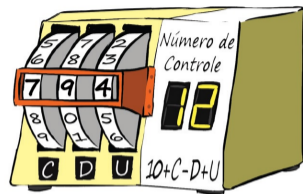


Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

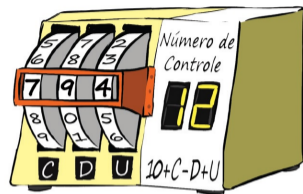
Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.



Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

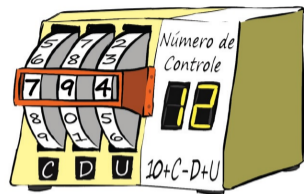
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.



Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

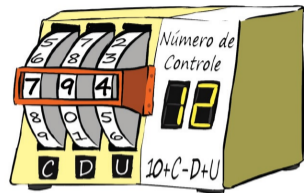
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

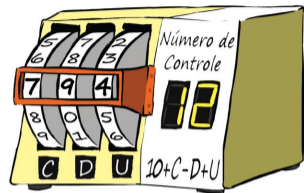
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

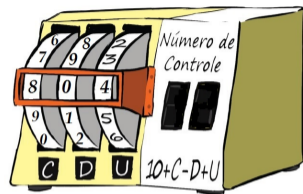


Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

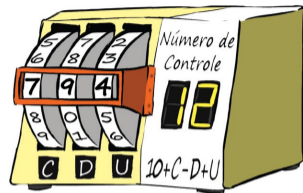
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.



Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

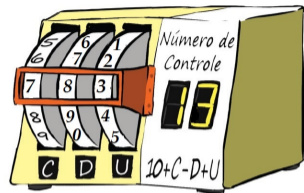
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

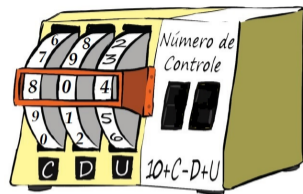
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

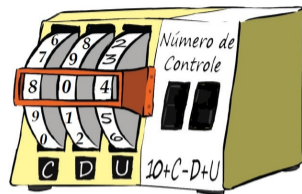


Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

a) Qual é o número de controle quando o visor mostra 804?

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o **número de controle** $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

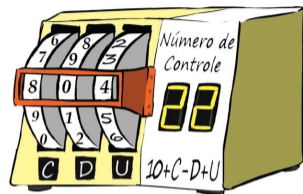


Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

a) Qual é o número de controle quando o visor mostra 804?

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o **número de controle** $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



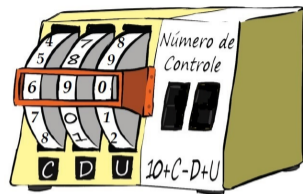
Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

a) Qual é o número de controle quando o visor mostra 804?

Quando o visor mostra 804, o número de controle é $10 + 8 - 0 + 4 = 22$.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.

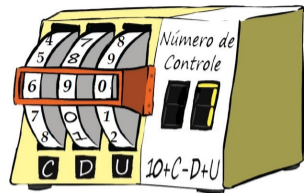


Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

b) Quando o visor mostrava 690, girou-se um dos discos C ou U de uma unidade e o número de controle não se alterou. Qual passou a ser o número do visor?

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.



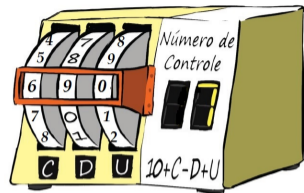
b) Quando o visor mostrava 690, girou-se um dos discos C ou U de uma unidade e o número de controle não se alterou. Qual passou a ser o número do visor?

Quando o visor mostra 690, o número de controle é $10 + 6 - 9 + 0 = 7$. A tabela ao lado mostra todas as possibilidades de giro de uma unidade dos discos C e U:

	C	D	U	controle
Posição inicial	6	9	0	7
C gira para 7	7	0	0	17
C gira para 5	5	8	0	7
U gira para 1	6	0	1	17
U gira para 9	6	8	9	17

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.



b) Quando o visor mostrava 690, girou-se um dos discos C ou U de uma unidade e o número de controle não se alterou. Qual passou a ser o número do visor?

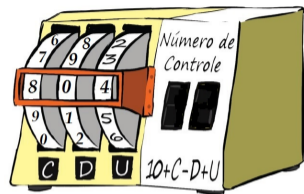
Quando o visor mostra 690, o número de controle é $10 + 6 - 9 + 0 = 7$. A tabela ao lado mostra todas as possibilidades de giro de uma unidade dos discos C e U:

	C	D	U	controle
Posição inicial	6	9	0	7
C gira para 7	7	0	0	17
C gira para 5	5	8	0	7
U gira para 1	6	0	1	17
U gira para 9	6	8	9	17

Como o número de controle não mudou, vemos que o disco C foi girado para 5 e o número no visor passou a ser 580.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

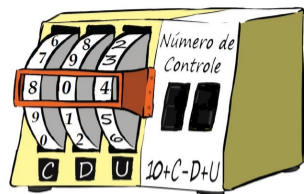
c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

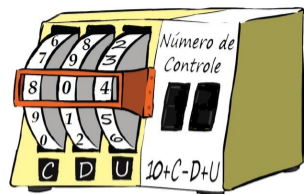


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

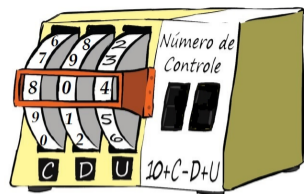


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

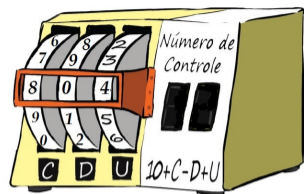


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

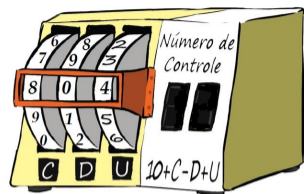


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

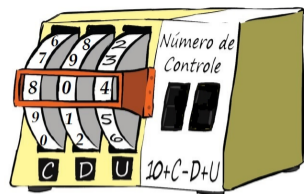


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

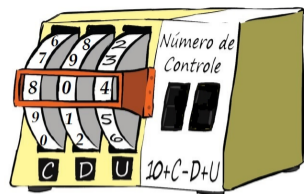


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

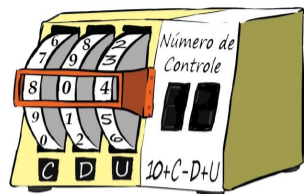


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

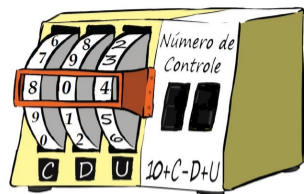


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. **A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$.** Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos

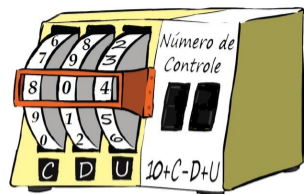


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C+1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos

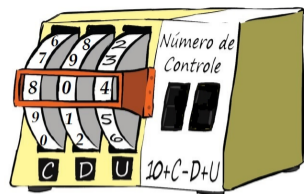


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

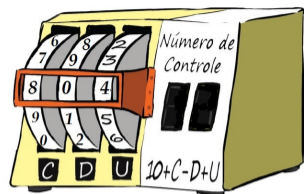


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.



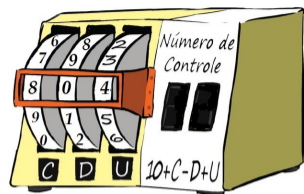
Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo.

Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.

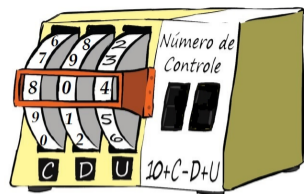


Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

c) Explique por que o algarismo das unidades do número de controle não muda quando se gira qualquer um dos discos C ou U.

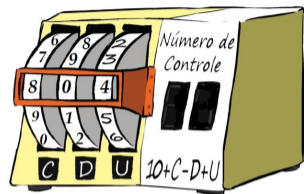
Vamos analisar o que acontece quando giramos o disco C para cima. Se $C \neq 9$, ele passará a mostrar $C' = C + 1$; se $C = 9$, ele passará a mostrar $C' = 0$.

O mesmo acontecerá com o disco D; se $D \neq 9$ então ele passará a mostrar $D' = D + 1$ e, se $D = 9$, ele passará a mostrar $D' = 0$. Nesse processo, o disco U continuará a mostrar U, ou seja, o novo número de controle será $10 + C' - D' + U$. A diferença entre o novo número de controle e o original é então $10 + C' - D' + U - (10 + C - D + U) = (C' - C) - (D' - D)$. Observamos agora que $C' - C$ só assume os valores $(C + 1) - C = 1$ e $0 - 9 = -9$, bem como $D - D'$; desse modo, os possíveis valores de $(C' - C) - (D' - D)$ são $1 - 1 = -9 - (-9) = 0$, $1 - (-9) = 10$ e $-9 - 1 = -10$, todos múltiplos de 10. Logo o algarismo das unidades dos números de controle original e novo é o mesmo. Raciocínio idêntico mostra que o algarismo das unidades do número de controle não muda também nas outras possibilidades de giro dos discos C e U.



Questão 1 - N3 - 2ª fase OBMEP 2013

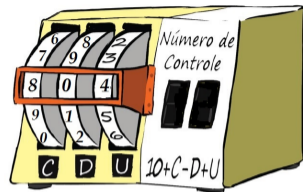
Na figura temos um aparelho com três discos C (centenas), D (dezenas) e U (unidades), nos quais aparecem, em ordem, os algarismos de 0 a 9. O seu visor mostra um número CDU, a partir do qual é calculado o número de controle $10 + C - D + U$. Por exemplo, quando o visor mostra 794, o número de controle é $10 + 7 - 9 + 4 = 12$.



Quando giramos o disco C ou o disco U, o disco D gira junto; não é possível girar o disco D de modo independente. Por exemplo, se o visor mostra 794 e o disco C for girado de uma unidade de 7 para 8, o visor mostrará 804; por outro lado, se o disco U for girado de uma unidade de 4 para 3, o visor mostrará 783.

d) Explique por que é impossível, a partir do número 978 no visor, obter o número 555 através de giros dos discos C ou U.

d) Explique por que é impossível, a partir do número 978 no visor, obter o número 555 através de giros dos discos C ou U.



Quando o visor mostra 978, o número de controle é $10 + 9 - 7 + 8 = 20$; o item anterior mostra que, qualquer que seja o giro dos discos C e U, o algarismo das unidades do número de controle continuará a ser 0. Como o número de controle de 555 é $10 + 5 - 5 + 5 = 15$, não é possível obter 555 a partir de 978.