Funções

1.1 Função Real de Variável Real

A noção de função é imprescindível no decorrer do estudo de Cálculo e para se estabelecer essa noção tornam-se necessários:

1. Um conjunto não vazio para ser o domínio;
2. Um conjunto não vazio para ser o contradomínio;
3. Uma lei que de alguma forma associe a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio.

Se chamarmos de D o domínio, C o contradomínio e f a lei citada no terceiro item acima, usaremos a seguinte notação para indicar uma função:

$$f: D \to C$$

$$y = f(x)$$

Na notação acima x representa um elemento qualquer do conjunto D (domínio) e y é o elemento do conjunto C (contradomínio), associado a x por f e, por isso, chamado de *imagem* de x por f. Também chamamos x de variável independente (x é um dentre os demais elementos do conjunto D) e y de variável dependente (ele é determinado em C pela ação de f sobre x). O subconjunto de todos os elementos y de C, que são imagens de algum x por f, é chamado de *conjunto imagem* da função.

Exemplos de funções podem ser pensados e construídos sob as mais variadas formas, restringiremo-nos, no entanto, às funções para as quais o domínio e contradomínio são subconjuntos de números reais. Neste caso, ao falar em função, estaremos falando em *função real de variável real*. Usualmente, quando no texto ficar claro qual é o domínio e qual é o contradomínio da função, usaremos apenas a lei de correspondência para definir a função. Daremos duas situações que esclarecerão essa ideia (lembre-se que trabalharemos apenas com função real de variável real).

Exemplo 1.1

1. A função "elevar ao quadrado" ou o "quadrado de x", ou ainda $f(x) = x^2$.
2. A função "raiz quadrada positiva de x" ou $f(x) = \sqrt{x}$.

Em casos como esses, quando pensarmos no domínio da função, deveremos pensar no subconjunto de todos os números reais (o mais amplo possível) ao qual tem sentido aplicar a operação subentendida pela lei dada na função. Assim, no caso (1) o domínio da função é o conjunto R de todos os números reais. No caso (2) tal fato não ocorre porque a raiz quadrada de um número negativo não é um número real, portanto, o domínio daquela função é o conjunto R_+ dos números reais não negativos. Em qualquer caso (e isso sempre poderá ser feito) o contradomínio da função é o conjunto R de todos os números reais.

Exercício 1.1

Em cada caso descreva o domínio da função.

1. $f(x) = 2x$
2. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x+2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$
6. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x+1}$

1.2 Intervalos – Valor Absoluto

A descrição do domínio de uma função é feita através de subconjuntos de números reais. Uma maneira cômoda de fazer isso, quando possível, é através de "intervalos". Geometricamente podemos "olhar" os números reais como pontos de uma "reta orientada", ou seja, uma reta na qual tomamos uma origem e um sentido de percurso como positivo (usualmente da esquerda para a direita). Fazemos a origem coincidir com o número ZERO e, escolhendo-se uma unidade de comprimento, marcamos os números inteiros positivos à direita (indicados sem o sinal "+") e os números negativos à esquerda da origem (sempre precedidos do sinal "-"). Entre os números inteiros vão sendo "acomodados" os demais números racionais e os não racionais, de forma tal que a reta fique "totalmente preenchida". A reta orientada com os números reais nela representados recebe a denominação de *reta real* e os números reais são denominados *abscissas* do dos pontos que os representam.

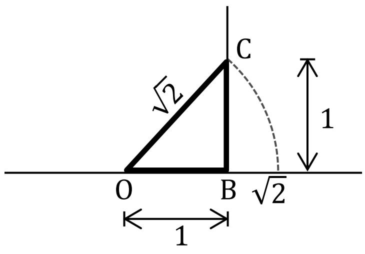
Exemplo 1.2

O número 2 corresponde ao ponto afastado duas unidades à direita de 0 e -2 à esquerda, em posição simétrica ao 2 em relação à origem.

Exemplo 1.3

A posição de qualquer número racional e de "alguns" números não racionais pode ser determinada geometricamente na reta orientada com o uso de régua e compasso. Os números reais que possuem essa propriedade são denominados *números construtíveis com régua e compasso*. Esses números fazem parte de um conjunto mais amplo cujos números são denominados *números algébricos*[1]. O número $\sqrt{2}$ é um desses números e a sua representação na reta orientada é construída como a seguir:

[1] Sugerimos ao leitor consultar alguma literatura sobre os *números algébricos construtíveis com régua e compasso*. Há sites na internet e muitos livros interessantes sobre o assunto. Uma referência clássica com tradução em português é a obra dos autores *Richard Courant* e *Herbert Robbins* : ***O que é Matemática?*** , publicada pela Editora Ciência Moderna.



Na *reta real* a partir da origem O marcamos o ponto B, de forma que OB=1. Daí traçamos uma vertical e, em seguida, marcamos nela o ponto C distante uma unidade do eixo horizontal. O triângulo de vértices em O, B e C é retângulo e, pelo Teorema de Pitágoras, sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$. Usando um compasso centrado na origem O descrevemos um arco a partir de C e marcamos na reta orientada um ponto cuja abscissa é $\sqrt{2}$.

Exercício 1.2

Construa uma reta orientada, escolha uma unidade de comprimento e marque sobre ela cada um dos números a seguir. Para cada caso faça um representação geométrica utilizando régua e compasso.

1. $\dfrac{2}{3}$
2. $-\dfrac{5}{4}$
3. $\sqrt{3}$
4. $1+\sqrt{3}$
5. $1-\sqrt{5}$
6. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

Definição 1.1

Dados dois números a e b, com $a \leq b$, chama-se de:

a) ***Intervalo Fechado*** de extremos a e b o conjunto de todos os números reais que são, ao mesmo tempo, maiores ou igual a a e menores ou igual a b.

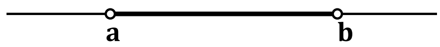
Notação: $[a, b]$ ou $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$ (lê-se: conjunto de valores x pertencentes a R tal que x é maior ou igual a a e menor ou igual a b).

Interpretação geométrica:

b) ***Intervalo Aberto*** de extremos a e b o conjunto de todos os números reais que são ao mesmo tempo maiores do que a e menores do que b.

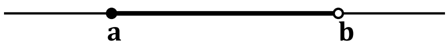
Notação: (a, b), $]a, b[$ ou $\{x \in R: a < x < b\}$ (lê-se: conjunto dos valores x pertencentes a R tal que x é maior do que a e menor do que a b). Para evitar confusão com a representação de pares ordenados, que será utilizada a partir do parágrafo 1.3, não usaremos a notação (a, b) para representar o intervalo aberto de extremos a e b.

Interpretação geométrica:



Quando somente um dos extremos ***a*** ou ***b*** pertencer ao conjunto, este será chamado de ***Intervalo Semifechado*** ou ***Intervalo Semiaberto***. Neste caso, teremos duas alternativas:

1) $[a, b[$ ou $\{x \in R: a \leq x < b\}$



2) $]a, b]$ ou $\{x \in R: a < x \leq b\}$

É comum o aparecimento de intervalos representados por: $]-\infty, a[$; $]-\infty, a]$; $]a, \infty[$; $[a, \infty[$ e $]-\infty, \infty[$. O que se faz nesses casos não é dar um caráter de número aos símbolos $-\infty$ ou ∞, mas apenas tornar mais cômoda a representação dos conjuntos:

1. $]-\infty, a[= \{x \in R: x < a\}$
2. $]-\infty, a] = \{x \in R: x \leq a\}$
3. $]a, \infty[= \{x \in R: x > a\}$
4. $[a, \infty[= \{x \in R: x \geq a\}$
5. $]-\infty, \infty[= R = conjunto\ dos\ números\ reais$.

Exercício 1.3

Encontre a interseção e a união dos intervalos. Faça em cada caso uma interpretação geométrica e dê a sua resposta nas duas formas alternativas.

1. $[-2,3]$ e $]1,4[$
2. $]0,3]$ e $[2,5[$
3. $]-\infty, 4[$ e $[-2,10[$
4. $]-2,4[$ e $]0, \infty[$
5. $]-\infty, 8]$ e $]-10, \infty[$
6. $\{x \in R: 2 < x\}$ e $\{x \in R: x < 5\}$

Exercício 1.4

Represente com notação de intervalos o domínio das funções abaixo.

1. $f(x) = \sqrt{x+5}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2 - x - 2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$
5. $y = \sqrt{x^2 - 4}$
6. $y = \sqrt{x^3 + 4x^2 + x - 6}$
7. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$
8. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 4}$
9. $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$
10. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x^2 + 4x2}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 4x^2 - x - 4}}$
12. $y = \sqrt{\dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}}$
13. $y = \sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2}$
14. $y = \dfrac{\sqrt{(x + 2)(x + 5)}}{x + 3}$
15. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$
16. $h(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$
17. $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 6x + 5}$
18. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
19. $y = \sqrt{3 + x} - \sqrt[5]{x + 2}$
20. $y = \begin{cases} 3x + 2, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
21. $y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$
22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{2 - x}}}$
23. $y = \dfrac{1}{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}$
24. $y = \sqrt{\dfrac{4x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 8x - 12}}$

Definição 1.2

A qualquer número real ***a*** pode-se associar um número real não negativo chamado ***Valor Absoluto*** ou ***Módulo*** de ***a***, denotado por |a|, da seguinte forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & se\ a > 0 \\ 0, & se\ a = 0 \\ -a, & se\ a < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.4

1. Se $a = -2$ então $|a| = |-2| = -(-2) = 2$
2. Se $a = 3$ então $|a| = |3| = 3$
3. Se $|x| = 4$ então $x = -4$ ou $x = 4$

A interpretação geométrica do *valor absoluto* de um número está implícita no processo de marcar pontos na reta orientada, ou seja: o $|x|$ é a distância de 0 a x ou, geometricamente, a medida do segmento de reta de extremos 0 e *x*. De maneira geral, dados dois números *a* e *b*, $|a - b|$ é definida como a distância entre *a* e *b*.

Exemplo 1.5

1. $|10 - 12| = |-2| = 2$ é a distância entre 10 e 12.
2. $|4 - (-1)| = |5| = 5$ é a distância entre 4 e -1.
3. $|-6 - (-3)| = |-3| = 3$ é a distância entre -6 e -3.

Utilizando-se a noção de distância entre dois números podemos, por exemplo, resolver o problema como o apresentado a seguir.

Exemplo 1.6

Determinar x de modo que a sua distância a 3 seja menor do que 1. Em outras palavras queremos determinar todos os valores de x de modo que $|x - 3| < 1$.

Solução:

a) Se x estiver à direita de 3 ou se for igual a 3 ($x \geq 3$) teremos que $x - 3$ é positivo ou nulo e, por definição de valor absoluto, teremos $|x - 3| = x - 3$. Daí, $x - 3 < 1$ ou $x < 4$. Conclui-se, nesta parte, que $3 \leq x < 4$.

b) Se x estiver à esquerda de 3 ($x < 3$) teremos que $x - 3$ é negativo e, portanto, teremos $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$. Daí $-x + 3 < 1$ ou $x > 2$. Conclui-se, nesta parte, que $2 < x < 3$.

c) A solução é a reunião dos dois resultados e, assim, a resposta do problema é dada por $\{x \in R : 2 < x < 4\}$.

Geometricamente, para determinarmos a solução do problema anterior basta-nos tomar um segmento de reta orientada de comprimento 2, com ponto médio em 3 e, e seguida excluir os extremos. Em geral, dados dois números a e b ($b > 0$), o conjunto dos valores x que satisfazem a relação $|x - a| < b$ é dado por:

$$\{x \in R: -b + a < x < b + a\}$$

Exercício 1.5

Descreva os valores x que satisfazem as relações a seguir:

1. $|x + 2| < 3$
2. $|x| \leq a\ (a > 0)$
3. $|3x + 1| < 2$
4. $|x - 1| \leq 1$

Exercício 1.6

1) Prove, como no Exemplo 1.6, que os valores x cuja "distância entre x e 3 é maior do que 1" são dados por $\{x \in R: x < 2\ ou\ x > 4\}$.

2) Descreva os valores x que satisfazem as relações a seguir:

a) $|x| > a\ (a > 0)$.

b) $|x + 2| > 3$

c) $|x - 1| > 1$

d) $|3x + 1| > 2$

e) $|x - a| \geq b\ (b > 0)$

f) $|2 - 4x| \geq 8$

1.2.1 Propriedades do Valor Absoluto

Os valores absolutos dos números reais, representados genericamente por a e b, satisfazem as propriedades:

1. $|-a| = |a| \; e \; |a| \geq a$
2. $|a.b| = |a|.|b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
4. $a^2 = |a|^2$
5. $|a| < |b| \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2$
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular)
7. $|a| - |b| \leq |a-b|$

Cada propriedade enunciada anteriormente pode ser verificada a partir da Definição 1.2 e da utilização das propriedades anteriores. Como exemplo vamos demonstrar a validade da *desigualdade triangular* (propriedade 6) de duas maneiras diferentes. Em primeiro lugar será usada apenas a Definição 1.2 e a propriedade (1) para explorar a validade da desigualdade em todos os possíveis casos em que os números reais a e b podem ser considerados:

1) $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Nesse caso $a+b \geq 0$ e, portanto, $|a+b| = a+b = |a| + |b| \leq |a| + |b|$.
2) $a \geq 0$, $b < 0$ e $|a| > |b|$. Assim, $a+b > 0$ e, portanto, $|a+b| = a+b \leq a + (-b) = |a| + |b| \leq |a| + |b|$.
3) $a \geq 0$, $b < 0$ e $|a| < |b|$. Daí, $a+b < 0$ e, portanto, $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = -a + |b|$. Como $-a \leq |-a| = |a|$, segue-se que $|a+b| \leq |a| + |b|$.
4) $a < 0, b \geq 0$ e $|a| < |b|$. É idêntico ao caso (2).
5) $a < 0, b \geq 0$ e $|a| > |b|$. É idêntico ao caso (3).
6) $a < 0$ e $b < 0$. Finalmente, nesse último caso, teremos: $a+b < 0$ e, portanto, $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$.

Outro método para demonstrar a desigualdade triangular faz uso das propriedades anteriores e de conhecimento da matemática elementar. Para tanto, notemos que:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = |a|^2 + |b|^2 + 2ab.$$

Como $ab \leq |a.b| = |a||b|$, teremos:

$$|a+b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Portanto,

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

como queríamos demonstrar.

O leitor deve destacar, em cada passagem da demonstração anterior, as propriedades utilizadas.

Exercício 1.7

Demonstre as propriedades restantes.

Exercício 1.8

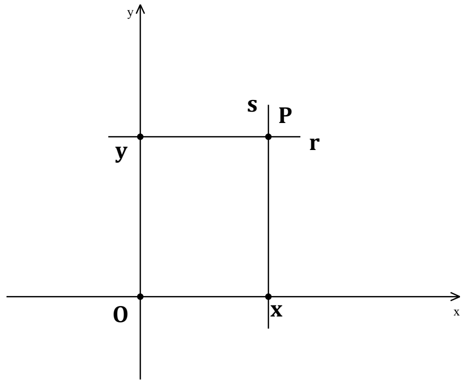
Descreva o conjunto de valores $x$que satisfazem as relações a seguir:

1. $|2x+1| = 3$
2. $|(x+1)(x-2)| \geq 2$
3. $|x^2+1| < 3$
4. $|x-1|^2 < 4$
5. $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| < 2$
6. $\dfrac{|x+1|}{|x-1|} < \dfrac{1}{2}\ (x \neq 1)$
7. $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| = -\dfrac{x-1}{x+2}$
8. $\left|\dfrac{x+5}{x^2-4}\right| = \dfrac{x+5}{x^2-4}$
9. $|4x+5| < 3$
10. $|2x-3| > 5$
11. $|2x^2-1| \leq x+1$
12. $\big||x|-3\big| > 2$
13. $|(x+1)(x+2)| < 3$
14. $\left|\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\right| \leq 1$
15. $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$
16. $\big||x|+4\big| < 5$
17. $x^2 - |x| - 6 = 0$
18. $|x^2-4| \leq 2x+1$
19. $|x+1| = |2x-3|$
20. $|x^2-1| \geq \dfrac{1}{2}$
21. $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$
22. $|(x-1)(x+2)| = 2$

1.3 Pontos no Plano

No parágrafo anterior tivemos a oportunidade de representar os pontos de uma reta orientada por números reis. Trataremos agora da representação dos pontos do plano. Para conseguir esta representação tomaremos, inicialmente, duas retas orientadas no plano, perpendiculares entre si e com origens coincidentes. Como se faz usualmente, tomaremos na reta horizontal, como positivo, o sentido da “esquerda para a direita” e, na reta vertical o sentido de “baixo para cima” como positivo.

Tomemos agora um ponto P no plano (veja a figura) e tracemos por P duas retas, uma horizontal e outra vertical, que denotaremos por r e s, respectivamente. Denotemos por x a interseção de s com a reta orientada horizontal e por y a interseção de r com a vertical. Os números reais x e y serão chamados de *coordenadas* de P, sendo x a *abscissa* e y a *ordenada*. O ponto P será denotado pelo par ordenado (x, y) ou, simplesmente, par (x, y), sendo que o primeiro componente do par sempre representará a *abscissa* e o segundo a *ordenada* do ponto.



A reta orientada horizontal será chamada de *eixo das abscissas* e a vertical, *eixo das ordenadas*.

A representação de um ponto no plano por um par de coordenadas foi primeiramente apresentado pelo filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650) que, fundindo a álgebra com a geometria, criou o que hoje se denomina Geometria Analítica. Em sua homenagem dá-se o nome de *sistema de coordenadas cartesianas*[2] ao sistema de representação de pontos por coordenadas de números reais.

No que foi exposto ficou clara a existência da correspondência: a cada ponto do plano podemos associar um par ordenado de números reais. A relação inversa pode-se também ser claramente obtida. Escolhendo-se um valor real para x e outro para y, marcam-se esses valores nos respectivos eixos e proceda-se a construção do ponto P a partir dos eixos: levanta-se uma perpendicular ao eixo horizontal por x e outra por y e, na interseção delas, encontra-se o ponto P que tem por representação o par ordenado (x, y). Como consequência, entenderemos por plano o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Assim chamaremos um par ordenado de ponto ou inversamente.

1.4 Gráfico de Função

A noção de par ordenado e, consequentemente, a sua representação gráfica são ferramentas indispensáveis para o trato de funções, pois enquanto o par ordenado estabelece o relacionamento *domínio* ↔ *imagem* a sua representação gráfica dá uma visualização geométrica da função. Isto é obtido colecionando-se todos os pares da forma $(x, f(x))$e representando-os no plano conforme vimos no parágrafo anterior. É claro que, quando falamos em "colecionar todos os pares da forma $(x, f(x))$" não

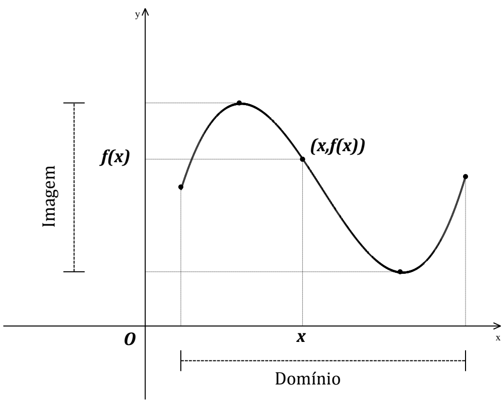
[2] A palavra *cartesiana* atribuída aos sistemas de coordenadas em homenagem *René Descartes* é derivada da denominação latina do nome de Descartes: *Renatus Cartesius*, como se encontra mencionado na *Wikipédia – a enciclopédia livre*. Vale a pena visitar a página da *Wikipédia* ou outras referências postadas na *internet* para conhecer um pouco da vida e obra de *Descartes*.

pretendemos marcar geometricamente todos esses pontos, tarefa na maioria das vezes inviável. O que faremos é construir um conjunto que englobe todos aqueles pontos através de uma lei bem definida. Assim, dada uma função $y = f(x)$, o conjunto $\{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$ é um conjunto bem definido. Esse conjunto será chamado de *Gráfico da Função* $y = f(x)$. Note-se que na própria denominação do conjunto está reforçada a correspondência *par ordenado* $\leftrightarrow$ *pontos do plano*. É através dessa correspondência que teremos a visualização geométrica da função. Na maioria dos casos, é na visão geométrica que estaremos interessados, assim, quando nos referirmos ao gráfico de uma função o faremos à respeito do aspecto geométrico do conjunto anteriormente definido.

O esboço do gráfico de uma função não é tarefa simples, salvo nos casos em que os conjuntos envolvidos (domínio e contradomínio) são finitos, ou quando as propriedades geométricas referidas são fáceis de serem interpretadas. Portanto, são de grande valia o domínio e o uso de algum programa computacional (software) para a construção de gráficos de funções. Existem vários softwares livres, de downloads gratuitos, disponíveis no mercado. Na reelaboração deste livro estamos fazendo uso do programa denominado *Winplot (v.1.41)*[3], que se tem revelado uma excelente ferramenta.

Uma das consequências da teoria que iremos desenvolver é o estudo minucioso do comportamento de um grande número de funções e, consequentemente, a construção dos seus gráficos e, assim, não deverá ser preocupação do leitor, no momento, a construção de gráficos. Entretanto, a metodologia utilizada no desenvolvimento desse livro tem forte apelo físico e geométrico é importante que o leitor tenha sempre em mente os gráficos e as propriedades de funções elementares tais como a função de primeiro grau, $f(x) = ax + b$, a função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, bem como o conhecimento de propriedades algébricas e geométricas de algumas curvas planas a exemplo da circunferência, parábola e elipse.

Dado o gráfico de uma função, podemos visualizar o seu domínio projetando o gráfico no eixo das abscissas. Projetando o gráfico no eixo das ordenadas teremos o conjunto imagem, como pode observar no gráfico seguinte.



No gráfico podemos encontrar o valor da imagem $y = f(x)$ de um ponto x do domínio imaginando um movimento que parta de x, verticalmente, até encontrar o gráfico da função e, em seguida, horizontalmente, até encontrar o eixo vertical, obtendo-se, assim, $y = f(x)$. O ponto sobre o gráfico é dado pelo par $(x, f(x))$ no plano. Muitas vezes citaremos apenas a abscissa x para denotar o ponto $(x, f(x))$, pois desde que a lei de formação de f seja dada pode-se conhecer a imagem *f(x)*.

[3] A ferramenta *Wimplot* foi desenvolvida por *Richard Parris* (rparris@exeter.edu), da *Phillips Exeter Academy*, Exeter, New Hampshire, EUA. A versão em português foi elaborada por *Adelmo Ribeiro de Jesus* (adelmo@ufba.br). Versões atualizadas do software podem ser obtidas através do endereço eletrônico *http://math.exeter.edu/rparris*.

Exemplo 1.7

Uma vez que cada número real possui um único valor absoluto ou módulo pode-se compreender a definição dada anteriormente como sendo uma função que "a cada número real associa um número real positivo". Assim, teremos:

$$f: R \to R$$

$$f(x) = |x|$$

De acordo com a definição podemos reescrever $f(x) = |x|$ como sendo:

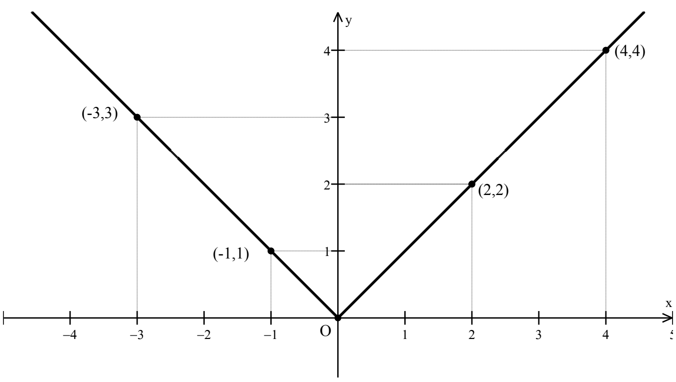
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Com o auxílio de uma *tabela de valores* podemos determinar alguns pontos do gráfico da função que serão úteis para o esboço do gráfico.

Tabela de Valores de $f(x) = |x|$

x	$f(x) = \|x\|$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = 3$	$(-3, 3)$
-1	$f(-1) = 1$	$(-1,1)$
0	$f(0) = 0$	$(0, 0)$
2	$f(2) = 2$	$(2, 2))$
4	$f(4) = 4$	$(4, 4))$

Gráfico da Função $f(x) = |x|$



Exemplo 1.8

"Um automóvel, ao atingir um trecho retilíneo de uma estrada, mantém a sua velocidade constante e igual a 80 km/h durante um quarto de hora. Esboçar um gráfico que visualize a variação do espaço em relação ao tempo".

Problema como esse aparece frequentemente na Física. Uma maneira de resolvê-lo é construindo uma função e esboçando o seu gráfico. Com está caracterizado um movimento retilíneo e uniforme há uma lei física que o rege: $S = vt$, onde v é a velocidade constante, t o tempo de duração do movimento e S é o espaço percorrido que é, portanto, função do tempo.

Neste caso, teremos:

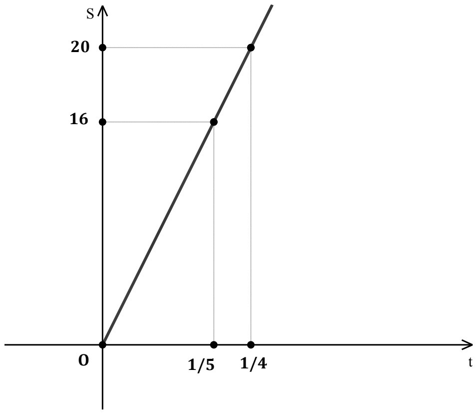
$$S: [0, 1/4] \to R$$

$$S(t) = 80t$$

Tabela de valores para $S(t) = 80t$

t	$S(t) = 80t$	$(t, S(t))$
0	$S(0) = 0$	$(0, 0)$
$1/5$	$S(1/5) = 16$	$(1/5, 16)$
$1/4$	$S(1/4) = 20$	$(1/4, 20)$

Gráfico da Função $S(t) = 80t$



Exemplo 1.9

A função "raiz quadrada positiva de x" pode ser formulada assim:

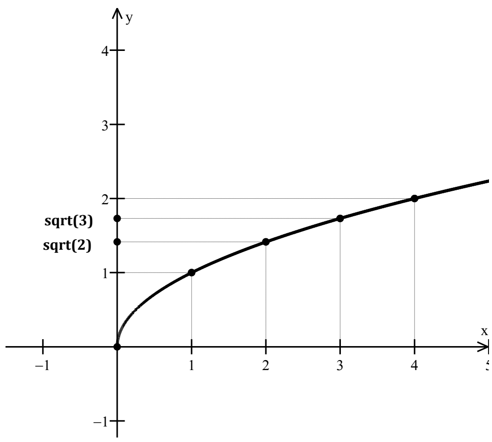
$$f: R^+ \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Tabela de valores para $f(x) = \sqrt{x}$

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = \sqrt{2}$	$(2, \sqrt{2})$
3	$f(3) = \sqrt{3}$	$(3, \sqrt{3})$
4	$f(4) = 2$	$(4, 2)$
9	$f(9) = 3$	$(9, 3)$

Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$



Obs. Em razão de configuração do software (*Wimplot, v.1.41*) utilizado na edição do gráfico as referências sobre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ aparecem como *sqrt(2)* e *sqrt(3)*, respectivamente.

Exercício 1.9

1) Esboce os gráficos das funções dadas.

a. $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$

b. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

c. $f(x) = |x + 2|$

d. $f(x) = |2x^2 + 4x - 30|$

e. $g(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$

f. $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \leq -2 \\ |x^2 - 4|, & -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x > 2 \end{cases}$

i. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$

j. $f(x) = [x]^*$

*$[x]$ denota o maior inteiro que é menor do que o número real x.

2) Esboce o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq -1 \\ 3x + 4 & -1 < x \leq 3 \\ x + 5 & x > 3 \end{cases}$

e encontre os valores de $f(-10)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ e $f(\pi)$.

3) Determine o domínio e esboce o gráfico das funções:

a. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

b. $f(x) = |-x^2 + 3x + 4|$

c. $f(x) = |2x + 3|$

d. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

e. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

f. $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$

g. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10, & x \leq 5/2 \\ -x^2 + 6x - 5, & x > 5/2 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

i. $f(x) = \begin{cases} 6x + 7, & x \leq -2 \\ 4, & -2 < x \leq 3 \\ 4 - x, & x > 3 \end{cases}$

j. $f(x) = |x| + x$

4) Resolva os problemas a seguir.

a. Construa uma função que expresse a área A de um círculo em termos de seu raio r. Qual é o domínio dessa função?
b. Uma escada de 3m de comprimento está apoiada em um muro vertical. Se uma pessoa empurra a extremidade inferior a extremidade superior mudará de lugar. Escreva um função que expresse a distância da extremidade superior ao solo e termos da distância da extremidade inferior à parede. Qual é o domínio dessa função?
c. A soma de dois números positivos é 4. Expresse, em termos do primeiro número, a função que indica a soma do primeiro com o quadrado do segundo. Dê o domínio dessa função.
d. Um arame de 100 cm de comprimento é cortado em duas partes. Uma delas é dobrada em forma de um quadrado e a outra em forma de um círculo.
   I. Construa uma função que expresse a soma da área do quadrado com a do círculo, cuja variável independente seja o raio r do círculo. Qual é domínio dessa função?
   II. Faça o mesmo que no item anterior considerando como variável independente o lado l do quadrado.