Nº 3
Abril/2002
ISSN 1518-6075

revista DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

Índice

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 3 (jan./dez. 2002). Goiânia: Editora da UFG, 2002-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração Eletrônica
José H. da Cruz

Arte da Capa
Leonardo M. Pelá

Tiragem
2.000 exemplares

Postagem
1º semestre de 2002

Revista da Olimpíada, nº 3, 2002
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 521 1208, Fax: (62) 521 1180
site: www.mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás

Milca Severino Pereira
Reitora

Lázaro Eurípedes Xavier
Vice-Reitor

Celene Cunha Monteiro Antunes Barreira
Pró-Reitora de Graduação

Eliana Martins Lima
Pró-Reitora de Pesquisa e Graduação

Ilka Maria de Almeida Moreira
Pró-Reitora de Administração e Finanças

Emilson Rocha de Oliveira
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Ana Luiza Lima Sousa
Pró-Reitora de Extensão e Cultura

Ivete dos Santos Barreto
Pró-Reitora de Assuntos da Comunidade Universitária

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Comissão Organizadora
Gisele de Araújo Prateado Gusmão (coordenadora), Ronaldo Alves Garcia, Célia Guimarães (secretária) e Heloisio Caetano Mendes (bolsista).

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)521-1208 Fax:(62)521-1180
Site: www.mat.ufg.br/extensao/olimpiada

Apresentação

Caro Leitor,

A *R*evista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e alunos do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Convidamos o leitor que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado aos seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação, ver endereço a 1ª contra capa.

Lembramos que devemos estar sempre atentos para o fato de que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade.

Esperamos que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, 17 de abril de 2002
Os Editores.

Índice

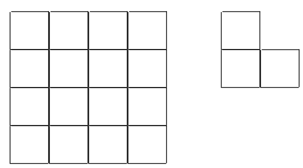
Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 1-20

Coletâneas de Problemas e Resoluções

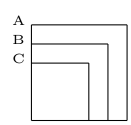
Coletânea de Problemas, nível 1

1. Sandra foi ao quadro-negro e escreveu um número com menos de trinta e quatro dígitos. Sabe-se que o último dígito é 2. João apaga o último algarismo que era 2 e o coloca na frente do número. O número que se obteve é o dobro do número que Sandra havia escrito. Qual era o número que Sandra escreveu?

2. São dados um tabuleiro e uma peça conforme mostra a figura ao lado. De quantas maneiras diferentes podemos colocar a peça no tabuleiro de modo que ela cubra completamente 3 casas?



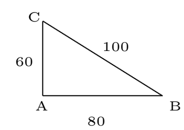
3. Temos três quadrados um sobre o outro. O quadrado menor tem $400cm^2$ de área e o quadrado maior tem $441cm^2$. Sabendo-se que os segmentos AB e BC tem a mesma medida, diga qual a área do quadrado do meio.



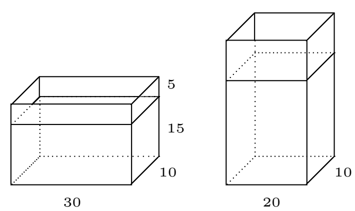
4. Três maçãs e uma pêra se equilibram em uma balança de dois pratos com treze ameixas. Cinco ameixas e uma maçã juntas, equilibram-se com uma pêra. Quantas ameixas são necessárias para se equilibrarem com a pêra?

5. Maria foi trabalhar e deixou dinheiro para seus três filhos, com este bilhete: "Dividam igualmente o dinheiro. Beijos". O primeiro filho chegou, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O segundo chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou sua parte do dinheiro que tinha e saiu. O terceiro encontrou 4 notas de 5 reais. Achou que era o último, pegou tudo e saiu. Quanto em dinheiro a mãe deixou? Que fração do dinheiro, deixado pela mãe, o segundo filho pegou?

6. Carlos e Ana resolvem disputar uma corrida em uma pista triangular, conforme figura, eles partem do ponto A. Qual deve ser a distância referente ao ponto B para ser colocado a linha de chegada, sendo que os dois devem percorrer a mesma distância?



7. Temos um aquário com água, onde a água está com 15 cm de altura, fechando-o e mudando de posição (conforme figura) qual será a altura da água?



8. Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 15.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15.

Antes de cada um deles, coloque os sinais de + ou - de forma que a soma de todos seja zero.

9. Existe um jogo de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos conforme mostra a figura ao lado.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Apertando qualquer botão da extremidade do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (direita, esquerda, de cima, de baixo e em diagonal). Apertando o botão do centro trocam de cor todos os seus 8 vizinhos, porém ele não. Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível apertando alguns botões, torná-los todos vermelhos? Justifique?

10. Quantos números inteiros positivos n existem tais que $n+3$ divide n^2+7 deixando resto zero?

Resolução da Coletânea, nível 1

1. Sandra escreveu um número XXXX...XXX e João, ao apagar o 2 e reescrevê-lo obteve o número 2XXXX...XXX. Como o número obtido é o dobro do número anterior e, como os dois números tem a mesma quantidade de algarismos, então o número de Sandra começa com 1 e termina com 2, enquanto que o número de João começa com 2 e termina com 4. Logo, é só fazer o produto do primeiro número por 2, lembrando-se que o último algarismo obtido deve ser colocado na penúltima posição do número a ser multiplicado, e assim sucessivamente até obter um número da forma 21..........4. O número é 105263157894736842.

2. No tabuleiro podemos ver 9 tabuleiros formados por quatro casas, nestes tabuleiros podemos colocar a peça de quatro maneiras diferentes, logo, podemos colocar a peça no tabuleiro maior de $9 \times 4 = 36$ maneiras diferentes.

3. A área do quadrado maior é de $441cm^2$, logo seus lados são de $21cm$. A área do quadrado menor é de $400cm^2$, logo seus lados são de $20cm$. Seja x o comprimento de $AB = BC$, então $20 + x = 21 - x$, daí temos $x = 0,5$. Logo, a área do quadrado menor é $420,25cm^2$.

4. Temos: $3M + P = 13A$ e $5A + M = P$. De onde temos que $P = 7A$, ou seja, uma pêra se equilibra com sete ameixas.

5. Seja x o dinheiro deixado pela mãe, o primeiro filho levou $\frac{1}{3}$ do dinheiro, logo sobrou $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$. O segundo filho levou $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}x)$, logo sobrou $\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x = \frac{4}{9}x$. Como sobraram 20 reais, temos que $x = 45$. O segundo filho levou 2/9 do dinheiro que a mãe deixou.

6. Como as distâncias a serem percorridas devem ser as mesmas, denotando por x a distância referente ao ponto B, temos $80 + x = 60 + (100 - x)$. Logo, $x = 40$.

7. A água ocupa uma um volume de $10 \times 15 \times 30 = 4500cm^3$. Mudando-o de posição este volume não se alterará. Logo, $10 \times 20 \times h = 4500$, de onde tiramos que $h = 22,5$. Portanto a água está a uma altura de $22,5cm$.

8. Se somarmos todos eles o resultado é 120, logo, podemos separar esta soma em duas parcelas de 60. Como $15 + 14 + 13 + 12 + 5 + 1 = 60$. Uma solução seria $+1 - 2 - 3 - 4 + 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.

9. Não, pois, se apertarmos o botão 3, por exemplo, mudam de cor os botões 3, 2, 5 e 6. Apertando o botão 6 mudam de cor os botões 6, 3, 9, 2, 5 e 8. Em todos os casos sempre mudam de cor uma quantidade par de botões, e, como já sabemos, a soma de números pares é sempre um número par.

10. Considerando a igualdade: $n^2 + 7 = (n+3)^2 - 6n - 2 = (n+3)^2 - 6(n+3) + 16$, temos que $n+3$ divide $n^2 + 7$ quando $n+3$ divide 16. Portanto $n = 1, 5, 13$.

Coletânea de Problemas, nível 2

1. Determine o menor número natural tal que: quando dividido por 2 deixa resto 1, quando dividido por 3 tem resto 2, quando dividido por 4 deixa resto 3, quando dividido por 5 deixa resto 4, quando dividido por 6 deixa resto 5 e quando dividido por 7 deixa resto 0.

2. Considere os números obtidos do número 12345, efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual é o lugar ocupado pelo número 43521? Qual é a soma de todos os números obtidos de todas as permutações do número 12345?

3. Para numerar as páginas de um livro, consecutivamente, desde a 1ª página, são usados 852 algarismos. Quantas páginas tem o livro?

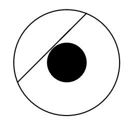
4. Uma pessoa vai comprar um presente e leva R\$1200,00. Quando lhe perguntam quanto custou o presente ela disse: *"Não foi menos de R\$1000,00, sobrou troco, mas não direi nem o troco nem o preço do presente. Digo apenas que o preço do presente, sendo lido ao contrário é o valor de 9 presentes"*. Quanto custou o presente? (despreze os centavos)

5. Um homem gastou o que tinha no bolso em três lojas. Em cada uma gastou 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto o homem tinha ao entrar na primeira loja?

6. Quantos quadrados são visíveis em um tabuleiro de xadrez?

7. Um pica-pau marca a bicadas seu caminho descendo o tronco de uma árvore, começando 20 metros acima do nível do solo. O pássaro segue uma trajetória em espiral (hélice) e dá a volta sete vezes na circunferência de 3 metros da árvore. Determine a distância total percorrida pelo pica-pau.

8. No piso de um farol coloca-se um tapete redondo (conforme a figura) o guarda do farol percebe que se ele colocar uma vara de 10 metros tocando as paredes do farol ela tangenciará o tapete. Mostre que nestas condições a área que o tapete não cobre independe do raio do piso do farol e do raio do tapete?



9. Qual é o resultado de $123568452162^2 - 123568452161^2$?

10. Na Finlândia um praticante de esqui cross se encontra em terreno aberto, $2km$ a oeste de um muro reto, construído na direção norte - sul. O esportista se encontra também a $5km$ ao sul e $8km$ a leste da meta de sua corrida. As regras da corrida dizem que ele deve tocar o muro uma vez antes de chegar a sua meta. Qual a menor distância, em km, que deve esquiar para chegar a sua meta seguindo as regras?

Resolução da Coletânea, nível 2

1. Seja x o número procurado, como $x \div 2$ deixa resto 1, $x \div 3$ deixa resto $2, ..., x \div 6$ deixa resto 5, podemos observar que o resto é sempre uma unidade a menos que o divisor, logo $x + 1$ será divisível por 2, 3, 4, 5 e 6. Já que $x + 1$ é divisível por estes 5 números então $x + 1$ é um múltiplo comum de 2, 3, 4, 5 e 6. Mas x também é múltiplo de 7, logo o menor número é $x = 119$.

2. Colocando as permutações obtidas pelos 5 algarismos em ordem crescente, até o número 43521, temos:

1****	4 . 3 . 2 . 1 (possibilidades)	= 24 (números)
2****		= 24
3****		= 24
41***	3 . 2 . 1	= 6
42***		= 6
431**		= 2
432**		= 2
4351*		= 1
43521		= 1

Assim, somando-se estas parcelas, chegamos ao número 43521 que está na 90º posição. Temos 24 números que começam com o algarismo 1, 24 números que começam com 2, até 24 números que começam com 5. Podemos escrever um número genérico $abcde$ na forma $a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10 + e$. Daí, concluímos que podemos efetuar a soma por parcelas, isto é,

$$24 \times 10^4 \times (1+2+3+4+5) + 24 \times 10^3 \times (1+2+3+4+5) +$$
$$24 \times 10^2 \times (1+2+3+4+5) + 24 \times 10 \times (1+2+3+4+5) +$$
$$24 \times (1+2+3+4+5) = 3.600.000 + 360.000 + 36.000 + 3.600 + 360.$$

Logo, a soma total é 3.999.960.

3. Existem 9 números com um algarismo, 90 números com dois algarismos, 900 números com 3 algarismos. Utilizamos:

9 algarismos para as primeiras 9 páginas

$90 \times 2 = 180$ algarismos para as seguintes 90 páginas

$900 \times 3 = 2700$ algarismos para as seguintes 900 páginas.

Como $180 + 9 < 852 < 2700$, então o número x de páginas do livro deve satisfazer a seguinte condição: $3(x - 99) + 189 = 852$, de onde tiramos que o número de páginas do livro é 320.

4. Queremos um número da forma $1ab9$. Achar a e b é relativamente fácil, pois o número é múltiplo de 9, já que seu inverso também o é (pois é um número que vale nove vezes o preço do presente). Para que tal número seja múltiplo de 9, é preciso que a soma $a + b$ seja 8. Os pares a e b que satisfazem essa condição são os seguintes: 0 e 8; 1 e 7; 2 e 6; 3 e 5; 4 e 4; 5 e 3; 6 e 2; 7 e 1 e finalmente, 8 e 0. De sorte que 0 e 8 é o único par que satisfaz as condições exigidas. Portanto o presente custou R$ 1 089,00.

5. Seja x a quantidade inicial de dinheiro.

Na 1ª loja sobrou $x - (x/2 + 1) = x/2 - 1$.

Na 2ª loja sobrou: $(x/2 - 1) - [(x - 2)/4 + 1] = (x - 6)/4$.

Na 3ª loja sobrou: $(x - 6)/4 - [(x - 6)/8 + 1] = (x - 14)/8$,

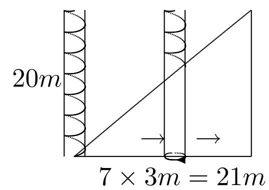
de onde temos que $(x - 14)/8 = 0$, logo ele tinha 14 reais.

6. Em um tabuleiro de xadrez temos 64 quadrados unitários e os quadrados bicolores formados por 4, 9, 16, 25, 36, 49 e 64 quadrados unitários. Assim, temos:

Nº de quadrados unitários	64	49	36	25	16	9	4	1
quadrados formados	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2

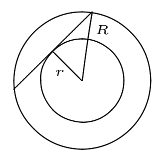
Logo, podemos ver 204 quadrados em um tabuleiro de xadrez.

7. Como a circunferência da árvore mede 3 metros e o pica-pau deu sete voltas, temos que, "esticando o seu caminho" ele é a hipotenusa do triângulo retângulo ao lado.



Logo, o caminho percorrido pelo pica-pau é de 29 metros.

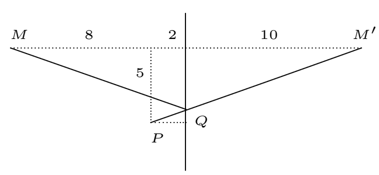
8. Seja R o raio da circunferência maior e r o raio da circunferência menor. Do triângulo retângulo ao lado, temos que: $25 + r^2 = R^2$, de onde tiramos que $(R^2 - r^2)\pi = 25\pi m^2$.



9. Podemos escrever este número na forma:

$$(123568452162 - 123568452161).(123568452162 + 123568452161) =$$
$$= 247136904323.$$

10. A forma mais elegante de obter uma solução utiliza o princípio de reflexão que se ilustra na figura abaixo. O ponto M' é a reflexão de M em relação ao muro, o ponto Q é a interseção do segmento PM' com o muro.



O esportista deve tocar o muro no ponto Q pois

$$\overline{PQ} + \overline{QM} = \overline{PQ} + \overline{QM'},$$

e se X é outro ponto qualquer do muro temos que

$$\overline{PX} + \overline{XM} > \overline{PQ} + \overline{QM}.$$

A distância $\overline{PQ} + \overline{QM}$ é dada por $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13km$.

Coletânea de Problemas, nível 3

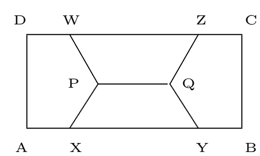
1. Ache a fórmula explícita para o n-ésimo termo da seqüência $\{a_n\}$ onde $a_n = 1 + 22 + 333 + 4444 + ... + n(111...1)$. Determine a soma dos n primeiros termos desta seqüência.

2. A função f definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tem as seguintes propriedades:

$i)\, f(x,x) = x; \quad ii)\, f(x,y) = f(y,x); \quad iii)\, (x+y)f(x,y) = yf(x,x+y).$

Calcule $f(52, 14)$.

3. O retângulo $ABCD$ é dividido em quatro partes de igual área por meio de cinco segmentos, tal como mostra a figura, onde $\overline{XY} = \overline{YB} + \overline{BC} + \overline{CZ} = \overline{ZW} = \overline{WD} + \overline{DA} + \overline{AX}$ e PQ é paralelo a AB. Achar o comprimento de AB (em cm) se $\overline{BC} = 19cm$ e $\overline{PQ} = 87cm$.



4. Determine quantas soluções inteiras não negativas possui a equação:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r.$$

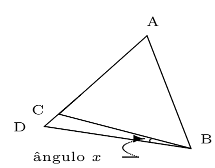
5. Mostre que se $n \geq 1$ é natural então, o número $2^{2^{2n+1}} + 3$ é composto.

6. Represente os seguintes produtos através de fatoriais:

i) $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n)$;

ii) $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$

7. Na figura ao lado sabemos que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\hat{A} = 100^o$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Determine o ângulo x.



8. Determinar a, b, c naturais que são solução da equação:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$$

9. Seja P um polinômio com coeficientes inteiros, mostre que se $P(-1), P(0)$ e $P(1)$ não são divisíveis por 3, então P não admite raiz inteira.

10. Resolva a equação: $12x^4 - 91x^3 + 194x^2 - 91x + 12 = 0$.

Resolução da Coletânea, nível 3

1. Temos que

$$\underbrace{111\cdots 1}_{n\ uns} = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Neste caso,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k(\frac{10^k - 1}{9}) = \frac{1}{9}\left[\sum_{k=1}^{n} k \times 10^k - \sum_{k=1}^{n} k\right].$$

Temos que achar $\sum_{k=1}^{n} k \times 10^k$. Observamos o seguinte

$$s_n = 10 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + \cdots + n \times 10^n \tag{1.1}$$

$$10 \times s_n = 10^2 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^4 + \cdots + n \times 10^{n+1} \tag{1.2}$$

Fazendo (1.2) − (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} 9s_n &= n \times 10^{n+1} - \left(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^2 + 10\right) \\ s_n &= \frac{n \times 10^{n+1} - 10\left[\frac{(10^n-1)}{9}\right]}{9} \\ s_n &= \frac{9n10^{n+1} - 10^{n+1} + 10}{81} \\ s_n &= \frac{(9n-1)10^{n+1} + 10}{81}. \end{aligned}$$

Assim,

$$a_n = \frac{1}{9}\left[\frac{(9n-1)10^{n+1} + 10}{81} - \frac{n(n+1)}{2}\right].$$

Seja

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\
S_n &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(9i-1)10^{i+1}+10}{81} - \frac{i(i+1)}{2}\right] \\
S_n &= \frac{1}{9^3}\sum_{i=1}^{n}\left[(9i-1)10^{i+1}+10\right] - \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i) \\
S_n &= \frac{1}{9^3}\left[9\sum_{i=1}^{n} i\times 10^{i+1} - \sum_{i=1}^{n}10^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}10\right] - \frac{1}{18}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right].
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
S_n = \frac{1}{9^2}\sum_{i=1}^{n} i\times 10^{i+1} - \frac{1}{9^3}\sum_{i=1}^{n}10^{i+1} + \frac{10n}{9^3} - \frac{1}{18}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right].
$$

Usando o procedimento anterior temos

$$
\sum_{i=1}^{n} i\times 10^{i+1} = \frac{n}{9}\times 10^{n+2} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 (10^n - 1).
$$

Vamos calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Sabemos que $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ fazendo i variar de 1 a n temos

$$
\begin{aligned}
&2^3 - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1 \\
&3^3 - 2^3 = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \\
&4^3 - 3^3 = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1 \\
&\ldots \\
&n^3 - (n-1)^3 = 3\times (n-1)^2 + 3\times (n-1) + 1 \\
&(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1.
\end{aligned}
$$

Somando os dois lados das igualdades acima temos

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 1 &= 3 \times \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \times \sum_{i=1}^{n} i + n \\ 3 \times \sum_{i=1}^{n} i^2 &= (n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Temos,

$$S_n = \frac{n \times 10^{n+2}}{9^3} - 2\left(\frac{10}{9^2}\right)^2 (10^n - 1) + \frac{10n}{9^3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{54}.$$

2. A terceira propriedade é mais útil da forma

$$f(x,z) = \frac{z}{z-x} f(x, z-x),$$

válida sempre que $z > x$. Para obter esta fórmula, fazemos $y = z - x$ e substituimos na terceira propriedade. Assim,

$$\begin{aligned} f(52,14) = f(14,52) &= \frac{52}{38} f(14,38) = \frac{52}{38} \times \frac{38}{24} f(14,24) = \\ &= \frac{52}{24} \times \frac{24}{10} f(14,10) = \frac{26}{5} f(10,14) = \frac{26}{5} \times \frac{14}{4} f(10,4) = \\ &= \frac{91}{5} \times \frac{10}{6} f(4,6) = \frac{91}{3} \times \frac{6}{2} f(4,2) = 91 f(2,4) = \\ &= 91 \times \frac{4}{2} f(2,2) = 364. \end{aligned}$$

3. Já que os trápezios $XPQY$ e $ZWPQ$ tem áreas iguais e seus lados paralelos tem a mesma medida, suas alturas devem ser iguais de comprimento $\overline{BC}/2$. Como $\overline{XY}$ é um quarto do perímetro do retângulo $ABCD$, segue que $\overline{XY} = (\overline{AB} + \overline{BC})/2$, e a área do trapézio $XPQY$ é:

$$\frac{\overline{PQ} + \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2}}{2} \times \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Agora isto deve ser igual a um quarto da área do retângulo $ABCD$, ou seja,

$$\frac{\overline{PQ} + \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2}}{2} \times \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{4}$$

onde $\overline{AB} = \overline{BC} + 2\overline{PQ} = 19 + 2 \times 87 = 193cm$.

4. Vamos supor primeiramente um exemplo: $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

Ou seja, devemos escrever o número 5 como soma de 3 parcelas ordenadas maiores ou iguais a zero.

Indiquemos cada unidade por asteriscos. Como queremos separar em 3 parcelas usaremos 2 barras. De modo que cada maneira que dispomos asteriscos e barras, teremos uma solução. Exemplo:

$$*| * *| * *$$

Este esquema representa a solução $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ e $x_3 = 2$.

Como temos 7 símbolos (5 asteriscos e 2 barras) o número de soluções inteiras não negativas será o número de permutações desses 7 símbolos.

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21.$$

No caso da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, temos que escrever r como soma de n parcelas maiores ou iguais a zero. De maneira análoga ao caso anterior usaremos r asteriscos e $n-1$ barras para representar as soluções. Por exemplo

$$*||| \cdots || \,| * *| \quad \underbrace{* * \cdots *}_{r-3 \ asteriscos}$$

Este esquema representa a solução $x_1 = 1,\ x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$ e $x_{n-1} = 2,\ x_n = r-3$.

Como cada solução pode ser representada da maneira acima, e cada esquema representa uma solução, temos que o número de permutações destes $n + r - 1$ símbolos é o número de soluções. Logo o número de soluções é

$$\frac{(n + r - 1)!}{r!(n-1)!}.$$

5. Como $2^2 - 1 = 3$ temos

$$2^{2n} = (3+1)^n = \binom{n}{0}3^n + \binom{n}{1}3^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}3^1 + \binom{n}{n}3^0 =$$
$$= 3[3^{n-1} + n3^{n-1} + \cdots + n] + 1.$$

Logo $3|(2^{2n} - 1)$ para todo natural $n \geq 1$. De maneira análoga podemos mostrar que $7|(2^{6n} - 1)$ para todo natural $n \geq 1$.

Se $3|(2^{2n}-1)$ então $6|(2^{2n+1}-2)$, logo, para todo natural $n \geq 1$, existe um número natural k, tal que $2^{2n+1} = 6k + 2$. Assim $2^{2^{2n+1}} = 4 \times 2^{6k}$, mas $7|(2^{6k} - 1) \Rightarrow 7|(4.2^{6k} - 4) \Rightarrow 7|(4.2^{6k} - 4 + 7) \Rightarrow 7|(4.2^{6k} + 3)$. Portanto $7|(2^{2^{2n+1}} + 3)$ para todo natural $n \geq 1$.

6. a) Seja $P = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, isto é,

$$P = 2 \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) \times \cdots \times (2 \times n)$$
$$= 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

b) Seja $I = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-1)$, daí,

$$I \times P = (2n)!, \quad \text{isto é,} \quad I \times 2^n \times (n!) = (2n)!. \quad \text{Logo,}$$

$$I = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}.$$

7. Tracemos um segmento $\overline{AE}$, com o mesmo comprimento de $\overline{AB}$, de modo que $E\hat{A}B = 60^0$, formando assim o triângulo equilátero AEB.

Observemos então que os triângulos EAD e ABC são congruentes (caso LAL). Portanto, $A\hat{E}D = 100^0$, DEB é um triângulo isósceles de base $\overline{BD}$ e $E\hat{B}D = 10^0$.

Como o triângulo AEB é equilátero, $40^0 + x + 10^0 = 60^0 \Rightarrow x = 10^0$.

8. Vamos provar primeiro o seuinte resultado:

Quaisquer que sejam x, y e z reais positivos temos

$$\frac{x+y+z}{3} \geq (xyz)^{\frac{1}{3}},$$

isto é, a média aritmética é maior que a média geométrica.

Demonstração. Se $m = n = p$ vale a igualdade. Caso contrário,

$$m^3+n^3+p^3-3mnp = \frac{1}{2}(m+n+p)[(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2] > 0,$$

daí, $m^3 + n^3 + p^3 > 3mnp$. Logo, basta fazer $x = m^3$, $y = n^3$ e $z = p^3$ para obtemos o resultado desejado. $\square$

Para determinar as soluções da equação

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3,$$

vamos considerar dois casos:

a) se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ as soluções são $a = b = c$;

b) se a) não ocorre temos

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} > \left(\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow 1 > 1,$$

que é um absurdo. Portanto as soluções são $a = b = c$.

9. Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n$.

Suponhamos que r seja uma raiz inteira de p. Então

$$p(x) = (x - r)Q(x).$$

Sejam $t, s \in \mathbb{Z}$ tais que $r = 3t + s$ onde $0 \leq s < 3$.

Como $p(-1)$ não é divisível por 3, $1 + r$ também não é divisível por 3. Logo $s \neq 2$. Usando as hipóteses de $p(0)$ e $p(1)$ não serem divisíveis por 3 concluimos de maneira análoga, que $s \neq 0$ e $s \neq 1$ o que é uma contradição. Portanto o polinômio $p(x)$ não admite raízes inteiras.

10. Como $x \neq 0$, dividindo ambos os membros da equação dada

$$12x^4 - 91x^3 + 194x^2 - 91x + 12 = 0 \tag{1.3}$$

por x^2, podemos escrevê-la na forma

$$12(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 91(x + \frac{1}{x}) + 194 = 0.$$

Fazendo

$$x + \frac{1}{x} = y \text{ temos que } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

e substituindo em (1.3), obtemos $y = 10/3$ ou $y = 17/4$. Logo, os valores para x que satisfazem a equação (1.3) são $3,\ 1/3,\ 4$ e $1/4$.

Bibliografia

[1] *Domingues, Hygino H., Iezzi, Gelson,* Fundamentos da Matemática Elementar, 1982, Editora Atual, São Paulo, SP.

[2] *Jakubo, José, Lellis, Marcelo,* Matemática na Medida Certa, Ed. Scipione, São Paulo, São Paulo, 1995.

[3] *Hazzan, S..* Fundamentos de Matemática Elementar, Editora Atual, 1985.

[4] *Mary M. Linquist e Albert P. Shulte,* Aprendendo e Ensinando Geometria, 1994.

[5] Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo.

[6] Revista EUREKA, nº 02, Paridade, Eduardo Wagner, 1998.

[7] *Ya. I. Perelman.* Problemas Y Experimentos Recreativos, Ed. Mir Moscú, 1975.

[8] *Santos, J. P. O..* Introdução à Teoria dos Números, CMU, IMPA-RJ, ano 1994.

[9] *Sierpinski, W.* 250 Problèmes de Théorie Élémentaire dos Nombres, Editions Jacques Gabay, Paris-France, 1992.

[10] Olimpíadas ao Redor do Mundo, Revista EUREKA, nº 09, 2000.

[11] www.oma.org.ar/mateclubs/problemas, www.obm.org.br e www.somatematica.com.br

[12] XX - OBM, XXI - OBM

[13] VII Olimpíada de Maio, 2001

Esta seção contou com a colaboração dos alunos:

Sinomar Gonçalves de Moura
Bruno Borges de Souza Lima
João Leonardo Muniz F. Rabêlo

Classificados na *X* Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

A *X* OMEG, contou com a participação de 1060 alunos de 100 Estabelecimentos de Ensino. O quadro abaixo mostra os que tiveram alunos classificados nos níveis 1, 2 ou 3.

	Est. de Ensino (cidade)		Est. de Ensino (cidade)
1	Crescer (Anápolis)	24	Exato (Iporá)
2	IPE (Goiânia)	25	Padre Lima (Goiânia)
3	Agostiniano (Goiânia)	26	Didaké (Goiânia)
4	Marista (Goiânia)	27	C. E. Castro Alves (Goiânia)
5	Mega (Goiânia)	28	Trevisan (Inhumas)
6	Aphonsiano (Trindade)	29	Inst. F. de Assis (Itumbiara)
7	Alfa Beta (Goiânia)	30	Objetivo (Goiânia)
8	Núcleo Educativo (Catalão)	31	Porto Seguro (Goiânia)
9	Disciplina (Goiânia)	32	Batista Goiano (Goiânia)
10	P. Madre Mazzarello (Anápolis)	33	Ed. Yara Berocan (Goiânia)
11	Inst. Mª Auxiliadora (Goiânia)	34	Lassale (Goiânia)
12	Goyases (Goiânia)	35	Nova Opção (Goiânia)
13	Couto Magalhães (Anápolis)	36	CPMG V. dos Reis (Goiânia)
14	Campus (Goiânia)	37	Anhangüera (Goiânia)
15	Dimensão (Goiânia)	38	Objetivo (Hidrolândia)
16	Progressivo (Goiânia)	39	E.M. P.Zelsani (Quirinópolis)
17	Diocesano (Itumbiara)	40	Integração (Pontalina)
18	Hugo de C. Ramos (Goiânia)	41	Visão (Goiânia)
19	Pré-Médico (Goiânia)	42	Dinâmico (Goiânia)
20	Ânglo (Goiânia)	43	Integral Objetivo (Catalão)
21	Ávila (Goiânia)	44	Prevest (Goiânia)
22	Antares (Goiânia)	45	João N. de Campos (Catalão)
23	Ed. N. do Araguaia (Mineiros)	46	Maria Julia (Goiânia)

Classificados do Nível 1

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
1	Francisco Habib Issa Mattos	1	1º	59
2	André Rodrigues Salerno	2	2º	55
3	James Lima C. Mota	3	3º	54
4	Elissa Stein Naves de Brito	4	4º	52
5	Thaíza P. Bernardes	5	5º	50
6	Breno Antonelli P. de Oliveira	6	6º	47
7	Murilo Teixeira Rassi	7	6º	47
8	Sávio Augusto Teixeira e Silva	7	6º	47
9	Rodrigo R. de Castro Teixeira	8	7º	46
10	Lucas de Oliveira S. Hortencio	9	8º	44
11	Marco Túlio Soares Andrade	4	8º	44
12	Naira de Jesus Damas	10	8º	44
13	Paula de Alencar Veloso	11	8º	44
14	Paulo de Tarso G. Vitoi Júnior	5	8º	44
15	Rodrigo Cândido Rezende	12	8º	44
16	Felipe Lopes de Aguiar	13	9º	43
17	Soraya de Lacerda Bukzem	1	9º	43
18	Marina Assis Tavares	14	10º	42
19	Amanda Guedes de Oliveira	15	11º	41
20	Frederico Lage Ferreira	11	11º	41
21	Henrique Duarte Alves Fortes	16	11º	41
22	Pedro Antônio Guedes	17	11º	41
23	Leto Miranda Garcia	18	12º	40
24	Nicolle Araújo Belchior Teixeira	9	12º	40
25	Paulo Victor C. Costa	6	12º	40
26	Carlos Augusto V. Roriz	19	13º	39
27	Gustavo Miranda Teles	1	13º	39
28	Caio Vieira Rêgo	11	14º	38
29	Dirceu Murakami	20	14º	38
30	Jeferson Takahashi dos Santos	5	14º	38
31	José Carlos de S. Costa N. Neto	2	14º	38
32	Roberta G. Correia	21	14º	38
33	André Márcio de Lima Curvello	2	15º	37
34	Cristiano Silvério Neiva	9	16º	36

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
35	Leonardo Pimenta	21	16º	36
36	Douglas Hilário da Cruz	22	17º	35
37	Guilherme de S. Toscano	21	17º	35
38	Jairo Ferreira Veiga Tipple	2	17º	35
39	João Luiz E. Barbosa	3	17º	35
40	Milena Dias Vasconcelos	2	17º	35
41	Renan de Deus Sousa	23	17º	35
42	Yana Alessandri E. Couto	9	17º	35
43	Felippe G. Lourenço Rodrigues	24	18º	34
44	Camila Caetano Feliciano	21	19º	33
45	Karen Larielle M. Portilho	25	19º	33
46	Victor Hugo Teles Costa	26	19º	33
47	Yuri Araújo Borges	22	19º	33
48	Diego Costa Alves	27	20º	32
49	Flávio Júnio R. Mendes	28	20º	32
50	Igor Maximiano de Paula Simões	29	20º	32
51	Sara Zanini Cesar	21	20º	32
52	Ana Paula Valeriano Rêgo	30	21º	30
53	Danilo Ângelo Rafael	32	21º	30
54	Danilo Oliveira e Silva	16	21º	30
55	Erick Assis Lima	4	21º	30
56	Jordano Bruno Lopes Rezende	17	21º	30
57	Letícia Fonseca Borges	2	21º	30
58	Natália de Paula Garcia	4	21º	30
59	Victor de Freitas Fernandes	31	21º	30
60	Vinícius Vale Pereira	3	21º	30
61	Vitor Dornela de Oliveira	2	21º	30
62	Yuri Perim	9	21º	30

Classificados do Nível 2

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
1	Murilo Rodrigues de Castro	4	1º	52
2	Raquel Cristina Zendron	1	1º	52
3	Juliana Nóbrega Mesquita	2	2º	49

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
4	Felipe Queiroz de Almeida	9	3º	48
5	Guilherme Rodrigues Salermo	2	3º	48
6	Mateus Quaresma Mendonça	9	4º	47
7	Ernesto Quaresma Mendonça	9	5º	46
8	Sheila Sales Massuda	2	5º	46
6	Ana Beatriz Vieira de Mattos	2	6º	45
10	André Cesarino de Paula	3	6º	45
11	Hugo A. Akitaya	33	6º	45
12	Max Well Rabelo	31	7º	44
13	Raphael de Faria Carmo	34	7º	44
14	Raphael E. Costa	9	7º	44
15	Renata Hidene Watanabe	35	7º	44
16	Gabriela Cunha Fialho Cantarelli	1	8º	41
17	Juliana Almeida Rocha	4	8º	41
18	Fernando Garcia	3	9º	39
19	Patrícia Leão Nabut	2	9º	39
20	Denis Masashi Sugita	3	10º	38
21	Francyelle de Cássia Nayane	5	10º	38
22	Bruno Henrique Conteruto	21	11º	37
23	Mariane Magalhães e Silva	35	11º	37
24	Otávio Seapin Costa Pereira	5	11º	37
25	Nelson Loureiro dos Santos	5	12º	36
26	Giulio Demetrius Creazzo d'Oliveira	36	13º	35
27	Henrique Eiji Mikado	37	14º	34
28	Rodolfo Santos Costa Maçaranduba	2	14º	34
29	André Moreira Martins Arruda	3	15º	33
30	Lira Rocha da Mota	5	15º	33
31	Vítor Maia	1	15º	33
32	Nile Willian Fernandes Handy	43	16º	32
33	Rayane Jacobson Macedo	4	17º	31
34	Cristiana Soares Alves	39	17º	31
35	Giácomo B. F. Bosco	15	18º	30
36	Gustavo Menezes Santana	35	18º	30
37	Hernane Marques Machado	17	18º	30
38	Luciana M. R. Salgado	4	18º	30

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
39	Rafael Buizwack F. Duarte	24	18º	30
40	Vicente de S. Cardoso Jr.	30	18º	30
41	Iury Nunes Lopes	40	18º	30

Nível 3

	Nome	E.E.	Class.	Pontos
1	Carlos Stein Naves de Brito	41	1º	60
2	Jorge Peixoto de Morais Neto	5	1º	60
3	Luis Ricardo de Azevedo Frota	41	2º	48
4	Wesley Pereira Nunes	16	3º	44
5	Fábio Rauber	41	4º	41
6	Caio Oliveira Guimarães	30	5º	40
7	Vitor Ken Mochizuki	5	6º	38
8	Afonso Henrique Teixeira Magalhães	2	7º	37
9	Rodrigo Willians de Carvalho	6	8º	35
10	Patrícia Ribeiro Silva	3	9º	34
11	Artur Monteiro Prado Fernandes	42	10º	33
12	Diogo Rodrigues de Sousa	16	10º	33
13	Pedro Henrique Nascimento Souza	5	10º	33
14	Rodrigo Vasconcelos G. de Castro	5	11º	31
15	Alisson Moreira Leão	43	12º	30
16	Denise da Silva Pinheiro	38	12º	30
17	Elmo Bruno Portilho Mendes	44	12º	30
18	Lucas L. T. Martins	42	12º	30
19	Luís Henrique R. M. de Lima	45	12º	30
20	Márcio Antônio Ferreira Belo Filho	41	12º	30
21	Miguel Nasser Camargo Borges	16	12º	30
22	Iury Carlos da Silva	46	12º	30

Notícias

• A *XI* **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada no dia **28 de setembro de 2002** das 13:30h às 18:00h, nos campi da UFG de: Goiânia, Catalão, Jataí e Rialma, nos campi da UEG de: Anápolis e Iporá, e nas cidades de Quirinópolis e Itumbiara.

Para participar a escola deve estar cadastrada. A ficha de cadastramento e de inscrição se encontram no final desta revista.

O cadastramento e as inscrições deverão ser enviadas à Coordenação de Olimpíadas, em **Goiânia**, até **23 de agosto de 2002**. Poderão participar, por escola, até:
▷ 5 alunos no nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)
▷ 5 alunos no nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)
▷ 10 alunos no nível 3 (Ensino Médio).

A seleção dos alunos participantes na Olimpíada Regional fica a critério da escola, podendo ser utilizada a prova da 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM para esta seleção.

• A *III* **Semana Olimpíca** e o *VI* **Seminário da Olimpíada** serão realizados no Instituto de Matemática e Estatística - IME, da Universidade Federal de Goiás - UFG, de 23 a 27 de setembro de 2002.

• A 24ª Olimpíada Brasileira de Matemática será realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:
▷ 1º fase 08/06/2002 na escola.
▷ 2º fase 14/09/2002 na escola.
▷ 3º fase 19 e 20/10/2002, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Para participar a escola deve se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha pode ser encontrada no site: www.obm.org.br

• Datas de Outras Olimpíadas:

▷A 24ª Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário será realizada em duas fase. A primeira fase será em 14 de setembro de 2002 e a segunda fase será nos dias 19 e 20 de outubro de 2002 no Instituto de Matemática e Estatítica da UFG. Poderão participar alunos de qualquer curso universitário.

▷ A 8ª olimpíada de maio será realizada em maio de 2002. Os alunos classificados na X Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás poderão participar.

▷ A 13ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul será realizada em junho de 2002 em Fortaleza - CE. Os países participantes são: Argentina, Brasil, Bolívia, Chile, Paraguai, Peru, Uruguai e Equador.

▷ A 43ª Olimpíada de Internacional de Matemática - IMO será realizada de 18 a 31 de julho de 2002 em Glasgow, Reino Unido. Neste evento participam aproximadamente 80 países.

▷ A 17ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática será realizada em setembro de 2002 em San Salvador, El Salvador. Participam 21 países dos que compõe a Organização dos Estados Iberoamericanos.

• Será realizado o VI Encontro de Matemática e Estatística no IME, de 23 a 27 de setembro de 2002. Maiores informações pelo telefone 521-1208, pelo e-mail eme@mat.ufg.br ou no site www.mat.ufg.br

• O IME realizará de 22 a 26 de julho de 2002 a XII Escola de Geometria Diferencial. Maiores informações no site www.mat.ufg.br.

• A Universidade Federal de Goiás realizará de 07 a 12 de julho de 2002 a 54ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o progresso da Ciência.

• O laboratório de Educação Matemática (LEMAT) do Instituto de Matemática e Estatística realizará a IX Jornada de Educação Matemática em novembro. O LEMAT também realiza curso de atualização e presta assessoria a professores do ensino fundamental e médio. Maiores Informações pelo telefone 521-1124 com Silmara Epifânia de Castro Carvalho, das 13h às 17h.

• A XIII Jornada de Matemática de Catalão será realizada em outubro de 2002. Maiores informações com o professor André Luiz Galdino pelo e-mail galdino@catalao.ufg.br.

• A II Encontro de Matemática e Educação Matemática de Jataí será realizada no Campus Avançado de Jataí em data a ser definida. Maiores informações com a professora Luciana Maria Elias pelo e-mail luciana@jatai.ufg.br.

• A VI Jornada de Matemática de Rialma será realizada na em julho de 2002. Maiores informações por e-mail: jmr@mat.ufg.br ou no site: www.mat.ufg.br/cursos/rialma.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 23-41

Resolução comentada das provas da X OMEG, 2001

Nível 1

1ª Questão. Um número natural divisível por 3 deixa resto 5 quando dividido por 100.

a) Coloque em ordem crescente todos os números de três algarismos com a propriedade acima;

b) Qual o menor número de 4 algarismos com a propriedade acima? E o maior número de 4 algarismos com a propriedade?

(Justifique sua resposta.)

a) (Resposta de *Francisco Habib Issa Mattos, Breno Antonelli Parreira de Oliveira, Thaíza P. Bernardes.*) Um número natural n de 3 algarismos que deixa resto 5 quando dividido por 100 deve ter zero como algarismo das dezenas e 5 como algarismo das unidades. Como n deve ser divisível por 3, a soma de seus algarismos deve ser um múltiplo de 3. Logo não existem números com a propriedade acima que comecem com 2, 3, 5, 6, 8, e 9. Assim a resposta da parte a) é: 105, 405 e 705.

b) (Resposta de *Francisco Habib Issa Mattos.*) Pela parte a), observamos que se um número n tem a propriedade citada, então $n + k \times 300$, onde k é um número inteiro tal que $k \times 300 \geq 105 - n$, tem a mesma propriedade. Assim $705 + 300 = 1005$ é o menor número de 4 algarismos divisível por 3 e que deixa resto 5 quando dividido por 100. Assim $1005 + 300 \times 30 = 10005$, é o menor número de cinco algarismos com a propriedade desejada e então $10005 - 300 = 9705$ é o maior número de 4 algarismos com esta propriedade.

2ª Questão. Carl F. Gauss (1777-1985) foi um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos. Quando tinha 10 anos, seu professor pediu para a turma que calculasse a soma de 1 a 100, e em poucos minutos Gauss deu o resultado correto deixando seu professor espantado. O professor pediu que ele explicasse como fez a conta tão rápido, Gauss então disse que tinha observado que na soma de 1 a 100 aparecem 50 pares que somam 101. Assim

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+98+99+100=\\&(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)=\\&\underbrace{101+101+\cdots+101}_{50\text{parcelas}}=50\times101=5050.\end{aligned}$$

Calcule as somas:

a) $1+2+3+\cdots+1998+1999+2000+2001$;

b) $1+3+5+\cdots+1997+1999+2001$.

(Justifique sua resposta.)

(Resposta de *Francisco Habib Issa Mattos, Roberta G. Correia, Leto Miranda Garcia.*)

a) Como de 1 a 2001 há no total 2001 números e 2001 é ímpar, somamos de 1 até 2000 e depois somamos o 2001 ao resultado. Como de 1 a 2000 existem 2000 números, temos 1000 pares de números: $1+2000, 2+1999, \cdots$. Então a soma será:

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+1998+1999+2000+2001=\\&(1+2000)+(2+1999)+(3+1998)+\cdots+(1000+1001)+2001=\\&\underbrace{2001+2001+2001+\cdots+2001}_{1000\text{ parcelas}}+2001=\\&2001\times1000+2001=2003001.\end{aligned}$$

b) $1+3+5+\cdots+1997+1999+2001=$ soma de todos os números ímpares de 1 a 2001. Como de 1 a 2000 há 2000 números, se tiramos os pares, tiramos metade dos números, ou seja, 1000 números. Então de 1 a 2000 temos 1000 números ímpares e 500 pares de números de números ímpares com soma igual a 2000. Assim:

$$\begin{aligned}
&1+3+5+\cdots+1997+1999+2001=\\
&(1+1999)+(3+1997)+(5+1995)+\cdots+(999+1001)+2001=\\
&\underbrace{2000+2000+2000+\cdots+2000}_{500\text{ parcelas}}+2001=\\
&2000\times 500+2001=1002001.
\end{aligned}$$

3ª Questão. Uma folha de cartolina na forma de um retângulo (Fig. 1) é deformada para formar um cilindro (Fig. 3). As figuras abaixo mostram o retângulo com o segmento EF sendo deformado para formar o cilindro.

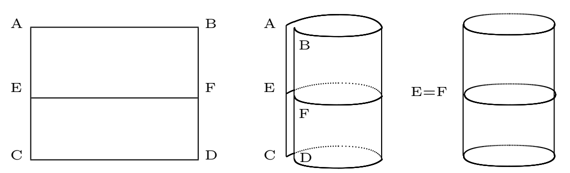
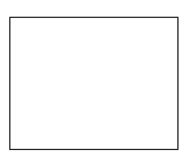
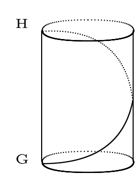


Fig.1 Fig.2 Fig.3

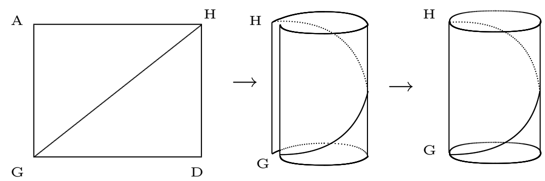
Veja que o segmento EF da Fig.1 transforma-se na circunferência da Fig. 3. Se após deformar desta forma o retângulo obtemos um cilindro como da figura abaixo, desenhe no retângulo original abaixo o segmento de reta que gerou a curva que liga G a H.





(Justifique sua resposta.)

(Resposta de *Breno Antonelli Parreira de Oliveira*.) Ao transformar o retângulo em cilindro, o ponto H encontrará o ponto A e o ponto D encontrará o ponto G, formando a curva que liga G a H, como mostra a figura a seguir.



4ª Questão. Três pescadores voltaram ao acampamento depois de um dia de pescaria, deixaram os peixes num vivieiro e foram descansar.

Durante a noite, um dos pescadores resolveu deixar o acampamento. Como o número de peixes era divisível por três, dividiu os peixes em três partes iguais, e levou a terça parte.

Mais tarde, outro pescador também resolveu ir embora. Não sabendo o que ocorrera antes, esse segundo pescador também notou que o número de peixes era divisível por três, dividiu os peixes em três partes iguais, e levou a terça parte.

Por fim o terceiro pescador teve a mesma idéia e, sem saber dos outros dois, fez exatamente a mesma coisa, depois que notou que o número de peixes era divisível por três.

Se o terceiro pescador levou 4 peixes, quantos peixes foram pescados? Quantos peixes levaram os outros pescadores?

(Justifique sua resposta.)

(Solução baseada nas respostas de *Amanda Guedes de Oliveira, James Lima C. Mota, Marco Túlio Soares Andrade, Lucas de Oliveira, Rodrigo Cândido Rezende.*) O segundo pescador levou 6 peixes, o terceiro levou 9 peixes e 27 peixes foram pescados.

De fato, cada pescador pegou $1/3$ da quantidade encontrada e deixou para trás $2/3$ da quantidade que achou. Assim sendo, como o terceiro pescador levou 4 peixes e estes 4 peixes são a terça parte do que havia, antes que ele retirasse os 4 peixes, havia um total de $3 \times 4 = 12$ peixes.

Raciocinando do mesmo modo temos que 12 é $2/3$ da quantidade que o segundo pescador encontrou (cada pescador deixa $2/3$ do total de peixes que encontra e leva consigo $1/3$ dessa quantia). Portanto o segundo pescador encontrou 18 $(= (3/2) \times 12)$ peixes, levando 6 peixes.

Finalmente, temos que 18 peixes são $2/3$ da quantidade que o primeiro pescador encontrou. Logo, o primeiro pescador encontrou 27 $(= (3/2) \times$

18) peixes e levou 9 (= 27/3) peixes.

5ª Questão. Nas multiplicações abaixo os algarismos dos números foram substituidos por letras. Todos os algarismos pares, distintos ou não, foram substituidos pela letra **P** e todos os algarismos ímpares, distintos ou não, foram substituidos pela letra **I**. Por exemplo, de acordo com esta substituição o número 385 fica **IPI**. Tente descobrir os números envolvidos nas multiplicações abaixo.

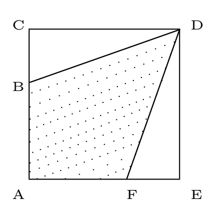
a)
$$\begin{array}{rr} \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ \times & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr} & & \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ & \times & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \hline & & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{array}$$

(Justifique sua resposta.)

(Respostas de *Elissa Stein N. de Brito, Marco Túlio Soares Andrade, Paulo Victor C. Costa.*)
a) Coloque o menor número ímpar possível maior que 1 no multiplicador. Na casa da unidade **I** do multiplicando coloque um número que multiplicado por 3 tenha o algarismo **I** em sua casa das dezenas. Coloque então um algarismo par que somado a **I** e multiplicado por 3 dê um resultado ímpar. Logo a operação é $25 \times 3 = 75$.
b) Repita o processo do item anterior. Por tentativas, eliminando alternativas e fazendo a verficação, obtém-se $25 \times 53 = 1325$.

6ª Questão. A região ABDF destacada na figura abaixo fica dentro de um lote quadrado com lado AE=6m. Pedro e seu pai mediram o



perímetro de ABDF com seus passos. Pedro saiu de A foi até B e daí a D e seu pai fez o percurso de A até F e depois até D. No final viram que percorreram a mesma distância. Considerando que o passo de Pedro mede 56cm e o passo de seu pai tem 72cm e que o número de passos de cada um foi um número inteiro, qual o perímetro máximo de ABDF?

(Justifique sua resposta.)

(Respostas de *Francisco Habib Issa Matos, James Lima C. Mota, Rodrigo Teixeira.*)

Os múltiplos comuns entre 72 e 56 são 504, 1008, 2016, ... Como $18 \times 56 = 14 \times 72 = 1008$, temos que o perímetro máximo de ABDF é 2016cm, uma vez que o perímetro do quadrado ACDE é 2400cm.

Nível 2

1ª Questão. Alguns pescadores voltaram ao acampamento depois de um dia de pescaria, deixaram os peixes num vivieiro e foram descansar.

Durante a noite, um dos pescadores resolveu deixar o acampamento, tentou dividir os peixes em partes iguais entre todos os pescadores e observou que sobrava um. Jogou um peixe no rio, dividiu-os em partes iguais e levou sua parte.

Mais tarde, outro pescador também resolveu retirar-se. Não sabendo da saída do primeiro, tentou dividir os peixes em partes iguais entre todos os pescadores e observou que sobrava um. Jogou um peixe no rio, dividiu-os em partes iguais e levou a sua parte.

Situação idêntica se repetiu com cada um dos pescadores, que não sabendo das saídas dos outros tentava dividir os peixes em partes iguais, sobra um peixe que era jogado no rio. E o pescador levava sua parte.

Se os peixes trazidos para o acampamento foram 253, quantos eram os pescadores?

(Justifique sua resposta.)

(Resposta baseada na solução de *Murilo Rodrigues de Castro.*) Eram 4 pescadores. De fato, procedendo por tentativas, temos que

- Não é possível que fosse apenas um pescador, pois 253 é divisível por 1.
- Supondo que fossem 2 pescadores, o primeiro jogaria um peixe fora, restando 252 peixes. O segundo dividiria 252 por dois e não

restaria peixe a ser jogado fora, ou seja, não é possível que fossem 2 pescadores.

- Também não é possível que fossem 3 pescadores, pois, neste caso, o primeiro pescador jogaria um peixe no rio, dividiria os 252 restantes em partes iguais e pegaria a sua parte ($252/3 = 84$), restando 168 peixes. Como 168 é divisível por 3, o segundo pescador conseguiria efetuar a divisão exata, não restando nenhum peixe.

- Pode-se verificar que $p = 4$ é solução do problema:

  – O primeiro pescador tira um peixe, ficam 252. Ele pega $1/4$ de $252 = 63$ e sobram 189 peixes.

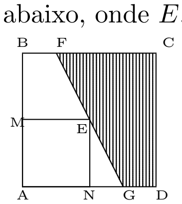
  – O segundo pescador tira um peixe, sobram 188. Dessa quantia ele pega a quarta parte (47 peixes). Sobram 141 peixes.

  – O terceiro pescador tira um peixe dos 141, retira para si $1/4$ dos 140 peixes restantes (35 peixes) e sobram 105.

  – Finalmente, o quarto pescador tira um peixe dos 105 e ficam 104 peixes, que é um número divisível por 4.

Observação: A solução acima não é rigorosa, uma vez que **todos** os divisores de 252 deveriam ser testados. Uma solução rigorosa deste mesmo problema pode ser encontrada na resolução da questão 4 da prova de nível 3.

2ª Questão. Dados os quadrados $ABCD$ e $AMEN$ onde M e N são pontos médios de AB e AD, respectivamente, e $AB = 1$. Determine a área hachurada da figura abaixo, onde E, F e G são colineares.

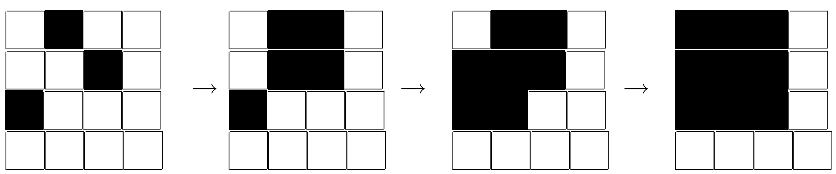


(Justifique sua resposta.)

(Solução baseada nas respostas de *André Cesarino de Paula, Murilo Rodrigues de Castro, Felipe Queiroz de Almeida e Hugo A. Akitaya.*) Seja

H a projeção de E em BC. Os triângulos FHE e ENG são congruentes pois são triângulos retângulos com os três ângulos congruentes e, além disso, EH e EN medem, ambos, $1/2$. Assim, a área da figura hachurada é igual à área do retângulo $HNDC$ que, por sua vez é igual a $1/2$.

3ª Questão. Um tabuleiro $n \times n$ tem inicialmente, alguns quadrados pintados de preto e outros de branco. Depois, sempre que um quadrado fizer fronteira com dois ou mais pretos, este é pintado de preto. Isso é repetido enquanto for possível. Por exemplo, para $n = 4$,



a) Explique porque o perímetro da região formada pelos quadrados pretos não cresce durante o processo.

b) Mostre que o número mínimo de quadrados pretos na configuração inicial de modo que todo tabuleiro seja, por fim, pintado de preto é n.

(Justifique sua resposta.)

(Solução baseada na resposta de *Hugo A. Akitaya*.)

a) Porque o perímetro é a soma dos lados dos quadrados e quando pintamos um quadrado que faz fronteira com 2 quadrados pretos, nós anulamos 2 fronteiras e acrescentamos mais 2 de modo que o perímetro não se altera. Ao pintarmos um quadrado que faz fronteira com 3 quadrados pretos, anulamos 3 fronteiras e acrescentamos uma, ou seja, o perímetro diminui de duas unidades. Finalmente, ao pintarmos um quadrado que faz fronteira com 4 quadrados pretos, a fronteira diminui de 4 unidades.

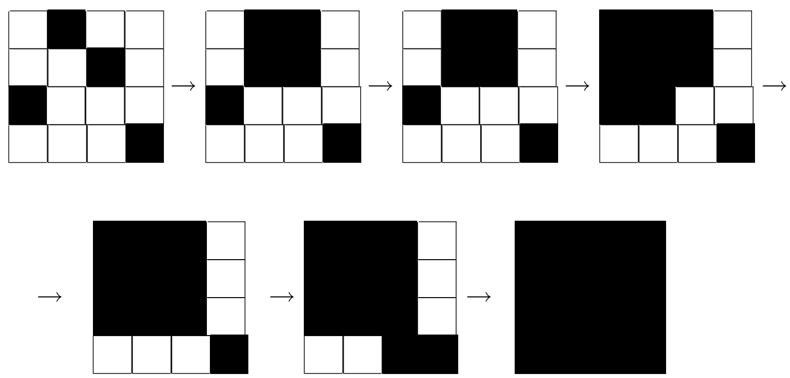
Portanto o perímetro da região formada pelos quadrados pretos não aumenta durante o processo, podendo diminuir.

b) O mínimo de quadrados pretos é n, pois o perímetro do tabuleiro $n \times n$ é igual a $4n$ e, como cada quadrado possui perímetro 4, uma região formada por k quadrados possui **no máximo** perímetro igual a $4k$. De acordo com o que foi explicado no ítem anterior, no final do processo que se inicia com uma tal região, teremos um perímetro no máximo igual a

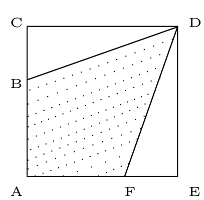
$4k$. Assim, para que o perímetro final seja $4n$ (todo o tabuleiro) devemos começar com , no mínimo, n quadrados pretos.

Por outro lado, ve-se que, começando o processo com a diagonal do tabuleiro (n quadrados) pintada de preto, teremos no final todo o tabuleiro pintado de preto.

Portanto, o número mínimo de quadrados pretos na configuração inicial de modo que todo o tabuleiro seja, por fim, pintado de preto é n.



4ª Questão. A região ABDF destacada na figura abaixo fica dentro de um lote quadrado com lado AE=6m.



Pedro e seu pai mediram o perímetro de ABDF com seus passos. Pedro saiu de A foi até B e daí a D e seu pai fez o percurso de A até F e depois até D. No final viram que percorreram a mesma distância. Considerando que o passo de Pedro mede 56cm e o passo de seu pai tem 72cm e que o número de passos de cada um foi um número inteiro, qual o perímetro máximo de ABDF?

(Justifique sua resposta.)

A solução pode ser encontrada na resposta da 6ª Questão da prova do nível 1.

5ª Questão. Observe a soma

$$2 \times (-1)^1 + 1 \times (-1)^2 + 1 \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^4 +$$
$$+ 2 \times (-1)^5 + 1 \times (-1)^6 + 1 \times (-1)^7 + 2 \times (-1)^8 + \dots$$

Continuando a soma com este padrão.

a) quais são as parcelas de ordem 9, 10, 11 e 12;

b) qual é a parcela de ordem 2001;

c) calcule a soma das 2001 primeiras parcelas.

(Justifique sua resposta.)

(Solução baeada nas respostas de *André C. de Paula, Felipe Q. de Almeida, Hugo A. Akitaya e Murilo R. de Castro.*)

a) O número que multiplica a potência $(-1)^k$ é igual a 2 ou 1, com ciclos de 4: "$2, 1, 1, 2; 2, 1, 1, 2; \cdots$". Logo a parcela de ordem 9 será $2 \times (-1)^9$, a de ordem 10 será $1 \times (-1)^{10}$, a de ordem 11 será $1 \times (-1)^{11}$ e a de ordem 12 será $2 \times (-1)^{12}$.

b) Seguindo o raciocíno do item a), a parcela de ordem 2001 terá expoente 2001 e o número que multiplica a potência se repete em ciclos de 4. Como 2000 é divisível por 4, segue que o número que multiplica a potência $(-1)^{2001}$ é o 1º do ciclo, ou seja, a parcela será $2 \times (-1)^{2001}$.

c) Observa-se que os resultados das parcelas também se repetem. Veja:

$$\left\{\begin{array}{l} 2 \times (-1)^1 = -2 \\ 1 \times (-1)^2 = 1 \\ 1 \times (-1)^3 = -1 \\ 2 \times (-1)^4 = 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2 \times (-1)^5 = -2 \\ 1 \times (-1)^6 = 1 \\ 1 \times (-1)^7 = -1 \\ 2 \times (-1)^8 = 2 \end{array}\right. \qquad \dots$$

Os resultados das parcelas se repetem em ciclos de 4, a soma das 4 parcelas do ciclo é zero. Como $2001 = 2000/4 + 1 = 500 + 1$ temos 500 ciclos, cuja soma é zero, mais uma parcela, a primeira do ciclo, assim o número que múltiplica a potência será 2, logo a soma das 2001 parcelas é -2.

6ª QUESTÃO. Uma folha de cartolina na forma de um retângulo (Fig. 1) é deformada para formar um cilindro (Fig. 3). As figuras abaixo mostram o retângulo com o segmento EF sendo deformado para formar o cilindro.

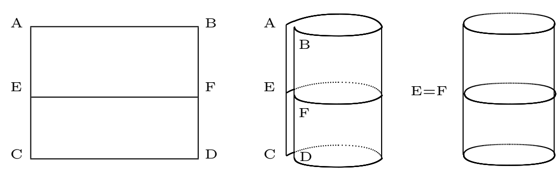
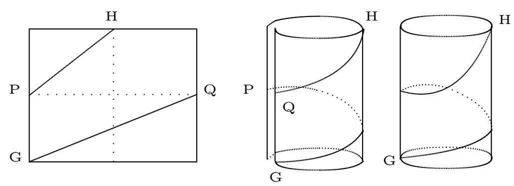


Fig.1 Fig.2 Fig.3

Veja que o segmento EF da Fig.1 transforma-se na circunferência da Fig.3. Se após deformar desta forma o retângulo obtemos um cilindro como da figura abaixo, desenhe no retângulo original abaixo o segmento de reta que gerou a curva que liga G a H.

(Justifique sua resposta.)

(Solução baseada nas respostas de *Hugo A. Akitaya e Felipe Q. de Almeida.*) Ao transformar o retângulo em cilindro, os pontos P e Q se unem de modo que o segmento GQ se une a PH, formando, assim, a curva contínua que liga G a H, como mostra a figura seguinte.



Nível 3

1ª Questão. Três polígonos regulares no plano, P_1, P_2 e P_3 de m, n e p lados, respectivamente, têm um vértice em comum e neste vértice os lados se justapõe sem deixar vão (Figura 1.1). Mostre que

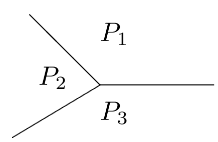


Figura 1.1:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$$

(Justifique sua resposta.)

(solução de *Luiz Ricardo de Azevedo Frota.*) Sejam θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos internos de P_1, P_2 e P_3 respectivamente.
Temos que

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=360^o,$$

ou seja

$$\frac{(m-2)180^o}{m}+\frac{(n-2)180^o}{n}+\frac{(p-2)180^o}{p}=360^o.$$

Dividindo os dois membros da última equação por 180^o, obtemos

$$2 = \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{p}\right),$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

2ª Questão. A reflexão de um ponto A com relação a uma reta r é um ponto A' que pertence à reta s, perpendicular a r passando por A, de tal maneira que a distância de A à reta r é igual à distância de A' à reta r, como ilustra a figura 1.2.

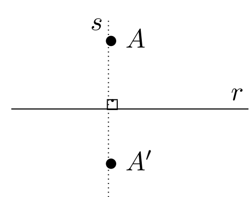


Figura 1.2:

A partir de um triângulo retângulo ABC, reto em A, construímos o triângulo $A'B'C'$ onde A' é a reflexão de A com relação à hipotenusa BC; B' é a reflexão de B com relação ao cateto AC e C' é a reflexão de C com relação ao cateto AB. Se a área de ABC é 1, encontre a área de $A'B'C'$.

(Justifique sua resposta.)

(solução de *Caio Oliveira Guimarães*.)

O triângulo $A'C'B$, ver Figura 1.3, é congruente ao triângulo ABC, pois são triângulos retângulos cujos catetos possuem medidas iguais. Logo, a distância, h, de B até o segmento $C'A'$ (altura do triângulo $A'C'B$ em relação à hipotenusa $A'C'$) é a mesma que a distância de B até AC que, por sua vez, é igual à distância de B' a AC. Além disso, os segmentos AC e $A'C'$ são congruentes, ou seja, a medida, a, de AC é a mesma que a de $A'C'$.

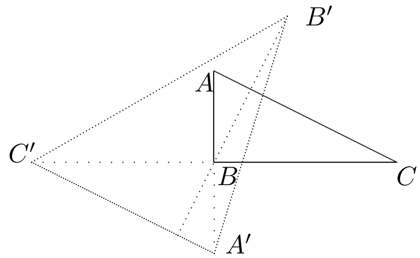


Figura 1.3: Construção do triângulo $A'B'C'$.

Assim sendo, temos que a área de $A'B'C'$ é igual a

$$\frac{a(3h)}{2} = 3\frac{ah}{2},$$

enquanto que a de ABC é igual a

$$\frac{ah}{2} = 1.$$

Logo, a área de $A'B'C'$ é igual a 3.

3ª Questão. Mostre que todo número primo $p > 3$ é da forma $p = 6n + 1$ ou $p = 6n - 1$ para algum n natural.

(Justifique sua resposta.)

(Solução de *Jorge Peixoto de Morais Neto.*)

Dividamos p por 6. Seja k o resto e q o quociente da divisão. Temos que

$$p = 6q + k.$$

Logo k não pode ser igual a 0 nem a 2 e nem igual a 4, senão p seria par, e todo primo maior que 3 é ímpar. Além disso, uma vez que p é primo, k também não pode ser igual a 3, pois isso faria com que p fosse múltiplo de 3.

Portanto, ou $p = 6q+1$ ou então $p = 6q+5$. No segundo caso, temos que $p = 6(q-1)-1$, o que prova que se p é um primo maior que 3 então ou $p = 6n+1$ ou $p = 6n-1$, onde n é um número natural.

4ª QUESTÃO. Alguns pescadores voltaram ao acampamento depois de um dia de pescaria, deixaram os peixes num viveiro e foram descansar.

Durante a noite, um dos pescadores resolveu deixar o acampamento, tentou dividir os peixes em partes iguais entre todos os pescadores e observou que sobrava um. Jogou um peixe no rio, dividiu-os em partes iguais e levou a sua parte.

Mais tarde, outro pescador resolveu retirar-se. Não sabendo da saída do primeiro, tentou dividir os peixes em partes iguais entre todos os pescadores e observou que sobrava um. Jogou um peixe no rio, dividiu-os em partes iguais e levou a sua parte.

Situação idêntica se repetiu com cada um dos pescadores, que não sabendo das saídas dos outros, tentava dividir os peixes em partes iguais, sobrava um peixe que era jogado no rio, e o pescador levava a sua parte.

Se os peixes trazidos para o acampamento foram 253, quantos eram os pescadores?

(Justifique sua resposta.)

(Solução de *Carlos Stein.*) Seja p o número de pescadores. Temos que $p|(253-1)$, ou seja, $pk = 252$ para um certo k. Depois que o primeiro pescador retirou sua parte ($1/p$ de 252 peixes), sobraram

$$252 - \frac{252}{p} = (p-1)\frac{252}{p} = (p-1)k.$$

Dessa quantidade foi retirado mais um peixe e o resultado ficou ainda divisível por p, ou seja, $p|[(p-1)k-1]$, o que implica que

$$p|(k+1) \quad \text{ou seja,} \quad p\Big|\Big(\frac{252}{p}+1\Big).$$

Portanto, temos que

$$p \leq \frac{252}{p}+1, \quad \text{ou seja,} \quad p^2 - p - 252 \leq 0.$$

Logo,

$$p \leq \frac{1+\sqrt{1009}}{2} < 17.$$

Suponhamos que $2|p$, porém $4 \not| p$. Então $p = 2m$ com m ímpar. Como $p|(252/p+1)$, segue que $2m|(126/m+1)$, o que não é possível, uma vez que $126/m + 1$ é ímpar. Logo, se $2|p$, temos que $4|p$. Analogamente, pode-se provar que $3|p \implies 9|p$.

Como $p \leq 16$ e $p|252$, restam as possibilidades

$$p = 1, \; p = 4, \; p = 7 \text{ e } \; p = 9.$$

Testando os casos acima, verifica-se que a solução para o problema é $p = 4$:

- $p = 1$ não é possível, pois 253 é divisível por 1.
- $p = 9$ não é possível, pois substituindo $p = 9$ em $p|(252/p + 1)$, obtemos que 9 divide 29, o que não é verdade. Analogamente, vê-se que $p = 7$ não é solução do problema.
- Finalmente, pode-se verificar que $p = 4$ é solução do problema:
  - O primeiro pescador tira um peixe, ficam 252. Ele pega 1/4 de 252 = 63 e sobram 189 peixes.
  - O segundo pescador tira um peixe, sobram 188. Dessa quantia ele pega a quarta parte (47 peixes). Sobram 141 peixes.
  - O terceiro pescador tira um peixe dos 141, retira para si 1/4 dos 140 peixes restantes (35 peixes) e sobram 105.
  - Finalmente, o quarto pescador tira um peixe dos 105 e ficam 104 peixes, que é um número divisível por 4.

5ª Questão. Sabendo-se que numa circunferência de diâmetro maior que um existem pontos que distam de uma unidade, mostre os ítens abaixo.

a) Não é possível colorir os pontos de um plano com apenas duas cores de modo que quaisquer dois pontos que distem de uma unidade tenham cores distintas,

b) Também é impossível colorir os pontos de um plano com apenas três cores de modo que quaisquer dois pontos que distem de uma unidade tenham cores distintas.

(Justifique sua resposta.)

(Solução de *Jorge Peixoto de Morais Neto*.)

a) Chamemos as duas cores de cor 1 e cor 2. Dado um ponto O colorido com a cor 1, desenhamos uma circunferência de centro O e raio duas unidades. Seja A um ponto qualquer dessa circunferência e B o ponto médio do segmento AO. O segmento OB mede uma unidade, o que força que B tenha a cor 2 e, portanto, que A tenha a cor 1. Girando o segmento OB em torno do ponto O constroi-se uma circunferência de raio 2 toda formada por pontos da cor 1, o que contraria a informação dada no enunciado.

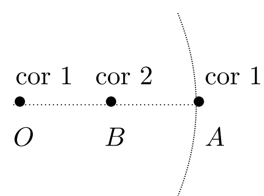


Figura 1.4: Duas cores.

b) Seja A um ponto da cor 1 e B um ponto qualquer situado a $\sqrt{3}$ unidades de A. Sejam M o ponto médio de AB. Marquemos na reta r, perpendicular a AB, contendo o ponto M, os pontos C e D tais que os segmentos CM e DM tenham medida igual a $1/2$. Temos que os segmentos AC, DC, AD, BC e BD tem medida 1 (os triângulos ADC e CBD são equiláteros de lado 1). C e D devem possuir cores cistintas de A. Digamos que C possua a cor 2 e que D possua a cor 3. Temos que B deve ter a cor 1. Como B é um ponto genérico que dista $\sqrt{3}$ unidades de A, temos que **toda** a circunferência de centro A e raio $\sqrt{3}$ tem a cor 1. Mas isso novamente contraria a informação dada no enunciado.

6ª Questão.

a) Calcule $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 \cdots + (-1)^{2001}$.

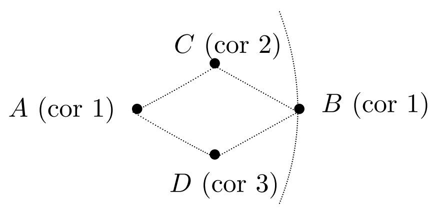


Figura 1.5: Três cores.

b) Na soma abaixo quais são as parcelas de ordens 1999, 2000 e 2001?

$$\begin{aligned}&1 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^3 + \\ &1 \times (-1)^4 + 2 \times (-1)^5 + 3 \times (-1)^6 + \\ &1 \times (-1)^7 + 2 \times (-1)^8 + 3 \times (-1)^9 + \cdots\end{aligned}$$

c) Calcule a soma dos 2001 primeiros termos do ítem b).

(Justifique sua resposta.)

(Solução de *Wesley Pereira Nunes*.)
a) A soma pedida é igual a -1:

$$\begin{aligned}&(-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2001} = \\ &[(-1)^1 + (-1)^2] + [(-1)^3 + (-1)^4] + \\ &\qquad \cdots + [(-1)^{1999} + (-1)^{2000}] + (-1)^{2001} = \\ &[-1+1] + [-1+1] + \cdots + [-1+1] + (-1) = -1.\end{aligned}$$

b) Uma vez que 1998 é divisível por 3, o coeficiente que aparece multiplicando o termo $(-1)^{1999}$ é igual a 1, o coeficiente do termo $(-1)^{2000}$ é igual a 2 e o do termo $(-1)^{2001}$ é igual a 3.

c) A soma pedida é igual a

$$1(-1)^1+2(-1)^2+3(-1)^3+1(-1)^4+2(-1)^5+3(-1)^6+\cdots+3(-1)^{2001}=$$
$$\big(1(-1)^1+\cdots+3(-1)^6\big)+\big(1(-1)^7+\cdots+3(-1)^{12}\big)+\cdots+\big(1(-1)^{1993}+\cdots+3(-1)^{1998}\big)+(-1)^{1999}+2(-1)^{2000}+3(-1)^{2001}=-1+2-3=-2.$$

Logo, a soma dos 2001 primeiros termos do ítem b) é igual a -2.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 42-86

Resolução comentada das provas da IV a VII OMEG, 1995 a 1998

IV OMEG, 1995, 1º grau.

1ª Questão. Os códigos dos sócios de um clube são compostos por três algarismos, um traço e mais dois algarismos. Esses últimos obtidos a partir de operações do tipo $mx+ny+pz$, sendo x, y, z, os três primeiros algarismos do código e m, n,p números naturais fixados. Veja o exemplo de alguns códigos:

$$201-05; \quad 010-02; \quad 110-03; \quad 341-14.$$

a) Determine a e b no código abaixo.

$$578-ab.$$

b) Qual o maior número que pode aparecer após o traço?

c) Determine os algarismos x e y dos seguintes códigos:

$$x5y-21 \qquad \text{e} \qquad 3yx-29.$$

d) Quantos códigos poder ter o clube?

(Justifique sua resposta.)

a) de acordo com os dados do problema temos que $n=2$,

$$\begin{cases} 2m+p=5 \\ m+2=3 \\ 3m+4\times 2+p=14 \end{cases}$$

Logo, segue que $m = 1$ e $p = 3$. Portanto, $ab = 5m + 7n + 8p = 5 + 14 + 24 = 43$.

b) O maior númmero após o traço é $9m + 9n + 9p = 9 + 18 + 27 = 54$.

c)

$$\begin{cases} x + 5 \times 2 + 3y &= 21 \\ 3 \times 1 + 2y + 3x &= 29 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y &= 11 \\ 3x + 2y &= 26 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= 8 \\ y &= 1. \end{cases}$$

d) Cada um dos 3 primeiros algarismos pode assumir 10 valores. Assim, temos ao todo $10 \times 10 \times 10 = 1000$ códigos.

2ª Questão. Sejam r e s retas paralelas cuja distância entre elas é d. Considere triângulos ABC, com base fixa BC sobre a reta r e vértice A sobre a reta s.

a) Esboce uma figura que mostre alguns triângulos nestas condições.

b) O que você pode observar sobre as áreas destes triângulos?

c) Em que posição deve estar o vértice A para que se tenha:

  i) Um triângulo isósceles?

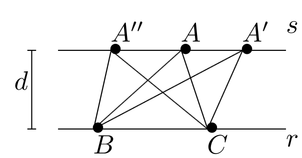
  ii) Um triângulo retângulo?

d) Qual a relação entre a base BC e a distância d para que se tenha um triângulo retângulo isósceles?

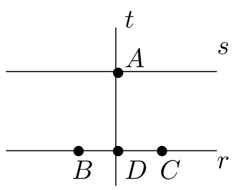
(Justifique sua resposta.)

Solução.

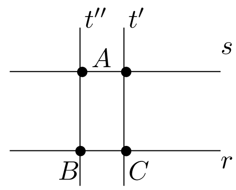
a)



b) São sempre iguais pois a área de qualquer um destes triângulos é igual a $d \times \overline{\text{BC}}/2$.



$c(i)$



$c(ii)$

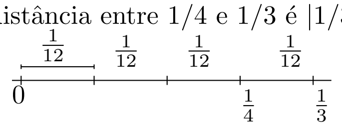
c) i) O vértice A deve estar sobre a reta t perpendicular a r passando pelo ponto médio, D, de BC.
c) ii) Deve estar sobre a reta t' perpendicular a r passando por C ou sobre a reta t'' perpendicular a r passando por B.

d) Se o triângulo é reto em C ou B, devemos ter $d = \overline{BC}$. Se o triângulo é reto em A, veja a solução da 1ª Questão do 2º grau.

3ª Questão. Na reta abaixo marcamos os pontos $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$. Marque a origem.

(Justifique sua resposta.)

Solução. A distância entre 1/4 e 1/3 é $|1/3 - 1/4| = \frac{4-3}{12} = 1/12$.



Temos que $\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \times 4$, logo com 4 partes iguais a $\frac{1}{12}$ teremos a distância entre 0 e $\frac{1}{3}$.

4ª Questão. Observe os exemplos abaixo:

$$4^2 = 16 = 8 \times 2, \quad 3^2 = 9 = 8 \times 1 + 1 \quad \text{e} \quad 6^2 = 36 = 8 \times 4 + 4.$$

Demonstre que se x é um número inteiro, então x^2 pode ser escrito como $8n$, $8n+1$ ou $8n+4$ para um certo n, inteiro, convenientemente escolhido.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Observamos que x pode ser escrito na forma $x = 8q + r$, para algum $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, ..., 7\}$. Assim, x^2 pode ser escrito na forma $x^2 = 64q^2 + 16q + r^2 = 8(8q^2 + 2q) + r^2 = 8q_1 + r^2$, onde $q_1 = 8q^2 + 2q \in \mathbb{Z}$.

Assim, na expressão $x^2 = 8q_1 + r^2$ temos, para:

$r = 0$	$x^2 = 8q_1 + 0$
$r = 1$	$x^2 = 8q_1 + 1$
$r = 2$	$x^2 = 8k + 4$
$r = 3$	$x^2 = 8q_1 + 8 + 1 = 8k_1 + 1$
$r = 4$	$x^2 = 8q_1 + 16 = 8k_2 + 0$
$r = 5$	$x^2 = 8q_1 + 25 = 8q_1 + 3 \times 8 + 1 = 8k_4 + 1$
$r = 6$	$x^2 = 8q_1 + 36 = 8q_1 + 4 \times 8 + 4 = 8k_5 + 4$
$r = 7$	$x^2 = 8q_1 + 49 = 8q_1 + 6 \times 8 + 1 = 8k_6 + 1$

Portanto, se x é um número inteiro, então x^2 pode ser escrito como $8n$, $8n + 1$ ou $8n + 4$ para um certo n, inteiro.

5ª QUESTÃO. João funda uma empresa com R$ 5.000,00 de capital. Após seis meses, admite Carlos como sócio, com R$ 3.000,00 de capital. Ao fim de um ano houve um lucro de R$ 1.950,00. Sabendo-se que o lucro foi dividido proporcionalmente ao capital e ao tempo que cada um dedicou, quanto coube a cada um?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Seja J a parte que coube ao João e C, a que coube ao Carlos, temos que $J + C = 1950$. Além disso, uma vez que o capital de João foi aplicado em 12 meses e Carlos, apenas 6 meses, segue que

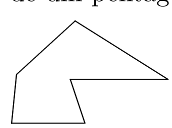
$$\frac{J}{5000 \times 12} = \frac{C}{3000 \times 6} \Longrightarrow J = \frac{10}{3}C. \quad \text{Logo,} \begin{cases} J &= \frac{10}{13} \times 1950 \\ C &= \frac{3}{13} \times 1950. \end{cases}$$

Assim, coube ao João R$1500, 00 e ao Carlos R$450, 00.

6ª QUESTÃO. Qual a soma dos ângulos internos:

a) de um quadrilátero e de um pentágono;

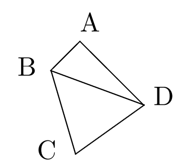
b) do polígono:



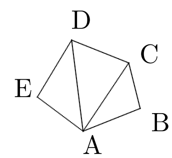
(Justifique sua resposta.)

Solução.

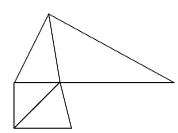
a) Um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, como na figura ao lado. Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180^o, temos que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é $2 \times 180^o = 360^o$.



Um pentágono ABCDE pode ser dividido em 3 triângulos, como na figura ao lado. Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180^o, temos que a soma dos ângulos internos do pentágono é $3 \times 180^o = 540^o$



b) O hexágono dado no enunciado pode ser dividido em 4 triângulos, como mostra a figura ao lado. Logo, a soma dos seus ângulos internos é $4 \times 180^o = 720^o$.



IV OMEG, 1995, 2º grau.

1ª Questão. Sejam r e s retas paralelas cuja distância entre elas é d. Considere triângulos ABC, com base fixa BC sobre a reta r e vértice A sobre a reta s.

a) Esboce uma figura que mostre alguns triângulos nestas condições.

b) O que você pode observar sobre as áreas destes triângulos?

c) Em qual posição deve estar o vértice A para que se tenha:

   i) Um triângulo isósceles?

   ii) Um triângulo retângulo?

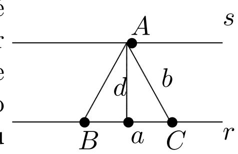
d) Qual a relação entre a base BC e a distância d para que se tenha:

i) Um triângulo retângulo isósceles?

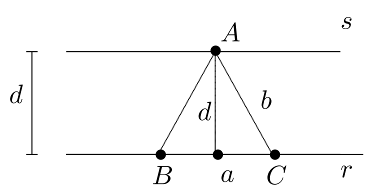
ii) Um triângulo equilátero?

(Justifique sua resposta.)

Solução. As respostas dos ítens a), b) e c) estão na 2ª Questão da prova do 1º grau.
d)i) Se o triângulo é reto em B ou C ver 2ª Questão do 1º grau. Caso o triângulo seja reto em A, sejam a e b as medidas dos segmentos BC e AC, respectivamente, se o triângulo ABC é retângulo, segue que $2b^2 = a^2$. Por outro lado, se M é o ponto médio de BC, temos que AMC é retângulo, logo $d^2 + a^2/4 = b^2$. Portanto $d^2 = a^2/4$, ou seja, $a = 2d$.



Logo, se $\overline{BC} = 2d$ temos um triângulo retângulo isósceles.
d)ii)



$$b^2 = (\frac{a}{2})^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Para que o triângulo ABC seja equiláterio devemos ter $a = b$, logo

$$a^2 = (\frac{a}{2})^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{a^2}{4} = d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3a^2}{4} = d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

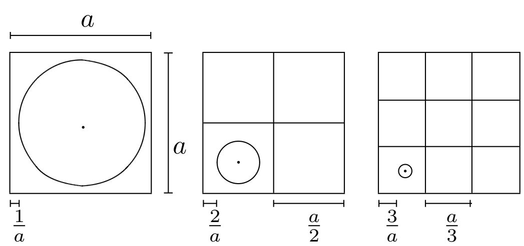
Assim, a relação entre a base BC e d é $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}$.

2ª Questão. A partir de um quadrado de lado a faça as seguintes construções:

1ª) No quadrado de lado a coloque uma circunferência de mesmo centro do quadrado cuja distância aos lados seja igual a $\frac{1}{a}$.

2ª) Divida cada lado do quadrado inicial em duas partes iguais e nos quatro quadrados assim obtidos coloque circunferências de mesmo centro dos quadrados cuja distância dos lados seja igual a $\frac{2}{a}$.

3ª) Divida cada lado do quadrado inicial em três partes iguais e nos nove quadrados assim obtidos coloque circunferência de mesmo centro dos quadrados cuja distância dos lados seja igual a $\frac{3}{a}$ e assim em diante como mostra a figura a seguir:



a) Para quais valores de a a 1ª construção é possível?

b) Quantas construções são possíveis se $a = 10$? E para um a qualquer?

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Devemos ter $1/a < a/2$, ou seja, $a > \sqrt{2}$.

b) Para que a n-ésima construção seja possível é necessário que $n/a < a/2n$, ou seja, $a^2 > 2n^2$. Logo, $n < a/\sqrt{2}$. Em particular, para $a = 10$, temos que n deve ser menor que 7. Portanto, para $a = 10$ são possíveis 7 construções.

3ª Questão. Daniel comprou 3 coelhos, 7 pássaros e 1 cachorro. Pagou R$ 172,00. Danilo comprou 4 coelhos, 10 pássaros e 1 cachorro. Pagou R$ 200,00. Se Murilo comprou 1 coelho, 1 pássaro e um cachorro. Quanto pagou Murilo?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Se c é o preço de cada coelho, p, o preço de cada pássaro, k, o preço de cada cachorro e x, a quantia paga por Murilo, temos que

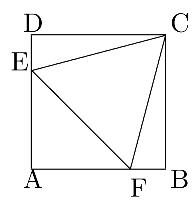
$$\begin{aligned} 3c + 7p + 1k &= 172 \\ 4c + 10p + 1k &= 200 \\ 1c + 1p + 1k &= x \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por 3, a segunda por -2, e subtraindo uma da outra, obtemos

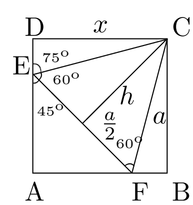
$$\begin{array}{r} 9c + 21p + 3k = 516 \\ \underline{\quad -8c - 20p - 2k = 400} \\ 1c + 1p + 1k = 116 \end{array}$$

Assim, a quantia paga por Murilo foi R$ 116,00.

3ª Questão. Sejam ABCD um quadrado e CEF um triângulo equilátero de área igual a $\sqrt{3}$, como ilustra a figura abaixo. Calcule a área do quadrado.



(Justifique sua resposta.)



Solução.
Sejam h a medida da altura do triângulo e a a medida de seu lado. Temos que:

$$a^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad h = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a área do triângulo CEF é $\sqrt{3}$ temos que

$$\sqrt{3} = \frac{a \times h}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{a \times a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Como o triângulo AFE é isósceles e retângulo, seus ângulos da base medem 45^o e, sendo o triângulo EFC equilátero, seus ângulos internos valem 60^o. Assim, conforme a figura acima, o ângulo $D\hat{E}C$ vale 75^o. Além disso, uma vez que $\overline{EC} = 2$, segue que a medida do lado, x, do quadrado, satisfaz

$$\operatorname{sen} 75^o = \frac{x}{2}.$$

Uma vez que

$$\operatorname{sen} 75^o = \operatorname{sen}(30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

Obtemos que a área do quadrado é

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{12}}{4} = 4 + \sqrt{12}.$$

5ª QUESTÃO. Uma função f está definida no conjunto dos números naturais da seguinte maneira:

$$f(n) = \begin{cases} n - 10, & se \;\; n > 100 \\ f(n+11), & se \;\; n \leq 100. \end{cases}$$

a) Calcule $f(110)$, $f(95)$ e $f(0)$.

b) Existem dois números naturais p e q distintos tal que $f(p) = f(q)$?

c) Determine o conjunto imagem de f.

d) Esboce o gráfico de f quando $0 \leq n \leq 22$ e $n > 100$.

(Justifique sua resposta.)

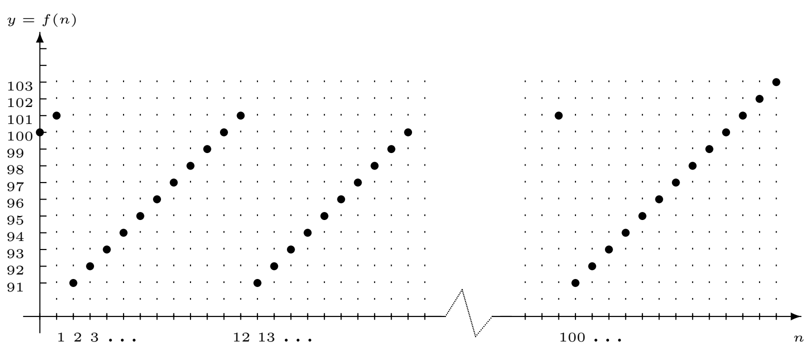
SOLUÇÃO. a) $f(110) = 110 - 10 = 100$, $f(95) = f(95 + 11) = f(106) = 106 - 10 = 96$ e $f(0) = f(0 + 11) = f(0 + 11 + 11) = ... = f(0 + 10 \times 11) = f(110) = 110 - 10 = 100$.

b) Sim, existem. Observe que $f(0) = f(110) = f(k \times 11)$ para todo $k \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

c) A imagem de f é $Im = \{y \in \mathbb{N} : 91 \leq y \leq \infty\}$.

d)

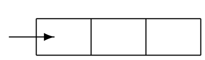
n	$y = f(n)$	n	$y = f(n)$	n	$y = f(n))$	n	$y = f(n)$
0	100	11	100	22	100	109	99
1	101	12	101	...	...	110	100
2	91	13	91	100	101	111	101
3	92	14	92	101	91	112	102
4	93	15	93	102	92	113	103
5	94	16	94	103	93	114	104
6	95	17	95	104	94	115	105
7	96	18	96	105	95	116	106
8	97	19	97	106	96	117	107
9	98	20	98	107	97	118	108
10	99	21	99	108	98	119	109



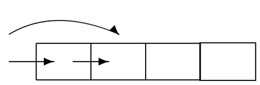
6ª Questão. Em certa brincadeira de criança numa calçada quadriculada estabeleceu-se a seguinte regra: pode-se a cada salto pular da casa n para a casa $n+1$ ou então da casa n para a casa $n+2$.

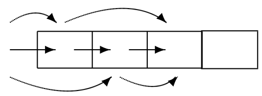
Observe alguns exemplos:

i) para atingir a 1ª casa, apenas 1 modo;

 . . . apenas 1 modo;

ii) para atingir a 2ª casa, 2 modos;

 2 modos;



3 modos.

iii) para atingir a 3ª casa,

a) Quantos modos tem o saltador para chegar na 5ª casa?

b) Liste de quantos modos o saltador pode chegar na 1ª , 2ª , 3ª , 4ª , 5ª e 6ª casas. Qual a relação entre os elementos assim obtidos?

c) Escreva a lista de *b*) até n-ésima casa e calcule a soma desses elementos.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) e b) Pode-se chegar à n-ésima casa de 2 maneiras: o primeiro, passando pela $(n-1)$-ésima casa e o segundo, pulando diretamente da $(n-2)$-ésima casa para a n-ésima casa. Assim, o número de modos de se chegar à n-ésima casa é igual ao número de modos de se chegar à $(n-1)$-ésima casa mais o número de modos de se chegar à $(n-2)$-ésima casa. Portanto, temos que, se a_j é o número de modos de se chegar à j-ésima casa, então, para $j > 2$ segue que

$$a_j = a_{j-1} + a_{j-2}.$$

Em particular, como $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ obtemos $a_3 = 3$. Sendo $a_3 = 3$ e $a_2 = 2$, segue que $a_4 = 5$ e assim em diante, como mostra a tabela a seguir:

casas	1	2	3	4	5	6
modos	1	2	3	5	8	13

c) Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a soma dos n primeiros termos da seqüência (a_n). Temos que

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_{n-1} & = & a_{n-2} + a_{n-3} \\ a_{n-2} & = & a_{n-3} + a_{n-4} \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ a_3 & = & a_2 + a_1. \end{array}$$

Somando as equações, obtemos

$$S_n - 3 = (S_{n-1} - 1) + S_{n-2}.$$

Logo, lembrando que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, segue que $a_n - 2 = S_{n-2}$, ou seja,

$$S_n = a_{n+2} - 2 = a_n + a_{n+1} - 2 = 2a_n + a_{n-1} - 2.$$

V OMEG, 1996, 1º grau.

1ª Questão. O livro A possui 250 folhas e sua espessura, descontada a capa, é de 3cm. Já o livro B possui 100 folhas e sua espessura, descontada a capa, é de 1,8cm. Qual dos dois possui a folha mais espessa?

(Justifique sua resposta.)

Solução.
Livro A: $\frac{250}{3}$ folhas por cm $= \frac{6\times 250}{6\times 3}$ folhas/cm $= \frac{1500}{18}$ folhas/cm.
Livro B: $\frac{100}{1{,}8}$ folhas por cm $= \frac{1000}{18}$ folhas/cm.
Comparando o número de folhas por centímetros, temos que as folhas do livro B são mais espessas pois existem menos folhas por centímetro.

2ª Questão. Duas crianças brincam numa festa misturando coca-cola e guaraná. A primeira faz uma mistura com 3 partes de coca-cola para 2 partes de guaraná e a segunda mistura 1 parte de coca-cola para 2 partes de guaraná. Depois, elas fazem uma terceira mistura, misturando volumes iguais de cada uma das misturas anteriores. Qual a proporção entre guaraná e coca-cola obtida?

(Justifique sua resposta.)

Solução.
Veja a solução da 3ª Questão do 2º grau.

3ª Questão. Distribua os números consecutivos de 13 a 26 nos quadrados abaixo de tal maneira que a soma indica seja sempre a mesma.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Quando colocamos os números em ordem crescente:

$$13, 14, 15, 15, 16, 17, ..., 22, 23, 24, 25, 26.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
\boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
\hline
\end{array}$$

Observamos que:

$$13 + 26 = 39, \quad 14 + 25 = 39, \quad 15 + 24 = 39; \ldots$$

Isto é, a soma do primeiro com o último é igual ao do segundo com o penúltimo, e assim em diante.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{13} & \boxed{14} & \boxed{15} & \boxed{16} & \boxed{17} & \boxed{18} & \boxed{19} \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
\boxed{26} & \boxed{25} & \boxed{24} & \boxed{23} & \boxed{22} & \boxed{21} & \boxed{20} \\
\hline
39 & 39 & 39 & 39 & 39 & 39 & 39
\end{array}$$

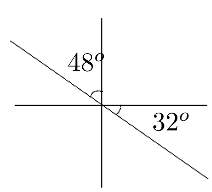
4ª Questão. Considere a seqüência 1, 12, 123, 1231, 12312, 123123, 1231231, ... O 1996º termo da seqüência acima é par? É divisível por 3?

(Justifique sua resposta.)

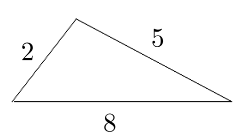
Solução.
Veja a solução da 5ª questão da prova do segundo grau.

5ª Questão. Em cada uma das figuras abaixo existe um erro. Identifique-o.

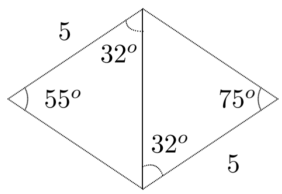
a)

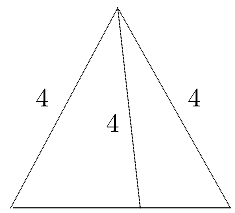


b)



(Justifique sua resposta.)

c) 

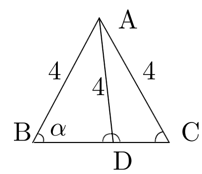
d) 

Solução. a) Como o ângulo de 32^o é oposto pelo vértice ao complementar do ângulo de 48^o a soma dos dois deveria ser 90^o e não 80^o.

b) Os lados 2, 5 e 8 não formam um triângulo, pois $5 + 2 < 8$.

c) Os triângulos que formam o quadrilátero são congruentes, pelo caso LAL. Logo, os ângulos de 55^o e 75^o deveriam ser congruentes.

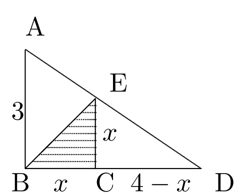
d) Os triângulos ABC, ABD e ACD são isósceles, daí, os ângulos de suas bases são iguais a α. Em D temos $\alpha + \alpha = 180^o$, isto é, $\alpha = 90^o$. Assim, os lados AB e AD são paralelos. Portanto, não existe o ponto A.



6ª Questão. Determine a área do triângulo retângulo isósceles BEC, dado que o triângulo ABD é retângulo com $\overline{AB} = 3$ e $\overline{BD} = 4$.

(Justifique sua resposta.)

Solução.



Como BEC é um triângulo retângulo isósceles, temos $\overline{BC} = \overline{CE} = x$. Além disso, os triângulos ABD e ECD são semelhantes. Logo,

$$\frac{3}{x + (4 - x)} = \frac{x}{4 - x} \Rightarrow x = \frac{12}{7}.$$

Assim, a área do triângulo BEC é igual a

$$(12/7) \times (12/7) \times (1/2) = 72/49.$$

V OMEG, 1996, 2º grau.

1ª QUESTÃO. Letícia gosta de desafiar seus amigos com o seguinte problema:

"Sou capaz de calcular o quadrado de qualquer número de dois algarismos terminado em 5, bem rápido".

Seus colegas vão falando os números e Letícia rapidinho diz o valor do quadrado do número.

O segredo da brincadeira é: para calcular o quadrado de 35, por exemplo, ela faz os seguintes cálculos:

Multiplica 3 pelo seu sucessor, $3 \times 4 = 12$, e completa o número com 25. E diz rápido 1225. Verifique você a validade desse processo para um outro número de dois algarismos terminado em 5.

a) Prove que se o número é de dois algarismos terminado em 5 esse processo é sempre verdadeiro.

b) Prove que o mesmo ocorre para números de 3 algarismos terminados em 5.

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Observe que $(35)^2 = 1225 = 1200 + 25 = 3 \times 4 \times 10^2 + 25$.

a) Seja n o número de 2 algarismos terminado em 5; se a é o algarismo da dezena então $n = a5 = a \times 10 + 5 \Rightarrow n^2 = a^2 \times 10^2 + a \times 10^2 + 25 \Rightarrow n^2 = a \times (a+1) \times 10^2 + 25$.

Logo, a conta que Letícia faz está correta para qualquer número n de 2 algarismos terminado em 5.

b) Seja n o número de 3 algarismos terminado em 5; se a e b são os algarismos da centena e dezena respectivamente, então

$$\begin{aligned}
n &= ab5 = a \times 10^2 + b \times 10 + 5 = (a \times 10 + b) \times 10 + 5 \Rightarrow \\
n^2 &= (a \times 10 + b)^2 \times 10^2 + (a \times 10 + b) \times 10^2 + 25 \\
n^2 &= [(a \times 10 + b)^2 + (a \times 10 + b)] \times 10^2 + 25 \\
n^2 &= (a \times 10 + b) \times (a \times 10 + b + 1) \times 10^2 + 25 \\
n^2 &= ab \times (ab + 1) \times 10^2 + 25.
\end{aligned}$$

Logo, para números de 3 algarismos terminados em 5, a conta que Letícia faz está correta.

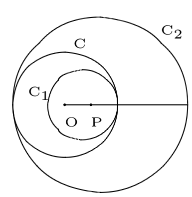
2ª QUESTÃO. Dizemos que duas circunferências são tangentes caso elas se toquem num único ponto. Considere uma circunferência C de raio 1 e um ponto P distante de 1/3 do centro desta circunferência.

a) Quantas circunferências existem, com centro em P, tangentes a C? (Faça a figura).

b) Calcule o raio de cada circunferência encontrada em a).

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Seja P um ponto distante 1/3 de 0.



$$C_1 : r = 1 - 1/3 = 2/3. \qquad C_2 : r = 1 + 1/3 = 4/3.$$

Existem 2 circunferências centradas em P e tangentes a C. Uma de raio $r = 2/3$, tangente a C internamente, e outra de raio $r = 4/3$, tangente a C externamente.

3ª QUESTÃO. Duas crianças brincam numa festa misturando coca-cola e guaraná. A primeira faz uma mistura com 3 partes de coca-cola para 2 partes de guaraná e a segunda mistura 1 parte de coca-cola para 2 partes de guaraná. Depois, elas fazem uma terceira mistura, misturando volumes iguais de cada uma das misturas anteriores. Qual a proporção entre guaraná e coca-cola obtida?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Vamos representar a coca-cola por c e a guaraná por g, temos

1ª mistura: c c c g g

2ª mistura: c g g

Note que a 1ª mistura está dividida em 5 partes e a 2ª mistura em 3 partes, assim para volumes iguais, temos:

1ª mistura:	c c c g g	c c c g g	c c c g g		
2ª mistura:	c g g	c g g	c g g	c g g	c g g

Na mistura final temos 14 partes de coca-cola e 16 partes de guaraná, ou seja, a proporção entre guaraná e coca-cola é 16 : 14 = 8 : 7.

4ª Questão. Seja a um número não nulo.

a) Mostre que $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$.

b) Calcule o valor da soma $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{1996\times 1997}$.

(Justifique sua resposta.)

Solução.

a) De fato, basta observar que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1-a}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)}.$$

b) Seja S a soma dada, então

$$S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{1995} - \frac{1}{1996}) + (\frac{1}{1996} - \frac{1}{1997})$$

$$S = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + ... + (-\frac{1}{1996} + \frac{1}{1996}) - \frac{1}{1997}$$

$$S = 1 - \frac{1}{1997} = \frac{1996}{1997}.$$

5ª QUESTÃO. Considere a seqüência 1, 12, 123, 1231, 12312, 123123, 1231231, ... O 1996º termo da seqüência acima é par? É divisível por 3?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Observamos que:

$a_1 = 1$	$a_4 = 1231$	$a_7 = 1231231$
$a_2 = 12$	$a_5 = 12312$	...
$a_3 = 123$	$a_6 = 123123$	

Note que o índice i coincide com o número de algarismos de a_i.
Se $i \in A = \{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$ então o algarismo das unidades a_i é 1.
Se $i \in B = \{2, 5, 8, 11, 14, ...\}$ então o algarismo das unidades a_i é 2.
Se $i \in C = \{3, 6, 9, 12, 18, ...\}$ então o algarismo das unidades a_i é 3.
Obseve que todo o elemento do conjunto A, B e C deixa resto 1, 2 e 0, repectivamente, se dividido por 3.

E assim, $i = 1996 = 3 \times 665 + 1 \Rightarrow 1996$ pertence a A, logo a_{1996} é ímpar. Note também que a_{1996} não é divisível por 3. De fato, a soma dos algarismos de a_{1996} é $S = 6 \times 665 + 1$ pois,

$$a_{1996} = \underbrace{123 \cdots 123}_{\text{665 vezes o 123}} 1.$$

Portanto, o número a_{1996} não é par e nem divisível por 3.

5ª QUESTÃO. Não se sabe ao certo qual foi a demonstração dada por Pitágoras ao teorema que hoje leva seu nome. Existem mais de 300 demonstrações do teorema de Pitágoras.

O Prof. Elisha Scott Loomis, durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema resultando num livro cujo título é "The Pythagorean Proposition". O professor Loomis classifica as demonstrações em dois tipos:

1) provas algébricas, baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos;

2) provas geométricas, baseadas em comparações de áreas.

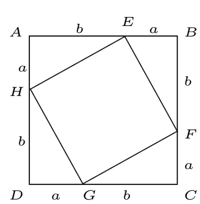
Como você já sabe, o teorema de Pitágoras pode ser enunciado assim:

"A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos". Se a e b são as medidas dos catetos e c é a medida da hipotenusa, o enunciado acima equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Provavelmente uma das mais belas demonstrações é a sugerida pela figura a seguir. Você é capaz de descobrí-la?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Seja ABCD um quadrado de lado $a+b$, conforme a figura abaixo.



Temos que os triângulos CFG, EBF, HAE e HDG são congruentes pelo caso LAL. Logo,

$$\overline{GF} = \overline{FE} = \overline{EH} = \overline{HG}.$$

Além disso, $G\hat{F}E$ é reto, pois $G\hat{F}C + F\hat{G}C = 90^o$, logo $F\hat{G}C = E\hat{F}B$, segue que, como $G\hat{F}C + G\hat{F}E + E\hat{F}B = 180^o$, temos $G\hat{F}C + F\hat{G}C + G\hat{F}E = 180^o$ e $90^o + G\hat{F}E = 180^o$, logo $G\hat{F}E = 90^o$.

De modo análogo, conclui-se que os demais ângulos de $HGFE$ são retos, ou seja, $HGFE$ é um quadrado. Se c é o lado de $HGFE$, então, segue que a área de $ABCD$ é igual à área de $HGFE$ mais 4 vezes a área do triângulo EBF, ou seja:

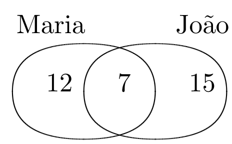
$$(a+b)^2 = c^2+4(ab/2) \quad \Rightarrow \quad a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2 = c^2.$$

VI OMEG, 1997, 1º grau.

1ª QUESTÃO. João e Maria jogaram várias partidas de um certo jogo. Maria não ganhou 22 partidas e João não ganhou 19 partidas. Houve 7 empates. Quantas partidas ganhou cada um?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO.
Um modo interessante de ilustrar a resolução deste problema é através do diagrama:



Maria: é o conjunto das partidas em que João não ganhou, isto é, houve empate ou Maria ganhou. João: é o conjunto das partidas em que Maria não ganhou, isto é, houve empate ou João ganhou. Logo Maria ganhou 12 partidas e João ganhou 15.

2ª QUESTÃO. Para determinar, aproximadamente, o peso de um grão de feijão, João adotou os seguintes procedimentos:

i) pegou um saco de $1kg$ de feijão e mediu o seu volume, obtento 1,3 litros;

ii) contou quantos feijões possui $200ml$ de feijão, obtendo um total de 700 feijões; assim, descobriu o peso de um grão de feijão.

De acordo com os dados acima, quanto pesa uma grão de feijão?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Como 200 ml de feijão corresponde a 700 feijões, segue qeu 1 litro de feijão, isto é, $5 \times 200ml$, possui $5 \times 700 = 3500$ feijões.

Temos que 1,3 litros é o volume de $1kg$ de feijão, o que dá um total de $1,3 \times 3500 = 4550$ feijões.

Assim, 1 grão de feijão pesa, aproximadamente, $\frac{1}{4550}kg$, ou, fazendo-se a divisão 0,22 gramas.

3ª Questão. No ano de 2091, estaremos realizando a centésima Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. Já é tradição que as provas da Olímpiada sejam realizadas sempre em um sábado do mês de outubro. Em quais dias do mês de outubro poderá acontecer a centésima Olimpíada de Goiás.

Atenção: No intervalo acima, os anos múltiplos de 4 possuem 366 dias.

(Justifique sua resposta.)

Solução. O primeiro ano bissexto após 1997 é 2000, e o último antes de 2091 é 2088. Assim, temos um total de $\frac{88}{4} + 1 = 23$ anos bissextos nesse período. De 1997 até 2091 temos $2091 - 1997 = 94$ anos (sem contar 1997), dos quais $94 - 23 = 71$ são normais (com 365 dias).

Após 7 dias, os dias da semana voltam a se repetir. Assim, em $365 = 52 \times 7 + 1$ dias, estaremos um dia da semana após o dia em que estávamos. Por exemplo, como em 18.10.97 foi sábado, 18.10.98 será domingo e 18.10.99 será segunda.

Daí, em anos bissextos, existe um acréscimo de dois dias, de modo que 18.10.2000 será quarta.

No período acima, teremos um total de acréscimos igual a

$$23 \times 2 + 71 \times 1 = 46 + 71 = 117.$$

Dividindo, novamente por 7, obtemos que $117 = 7 \times 16 + 5$, então, 18.10.2091 cairá numa quinta feira.

Portanto, 20.10.2091 é sábado, assim como 27.10.2091, 13.10.2091 e 06.10.2091.

E, são esses os dias em que poderá ocorrer a centésima Olimpíada.

4ª Questão. Um pentágono regular é um polígono de cinco lados, onde os lados e os ângulos internos são congruetes entre si.

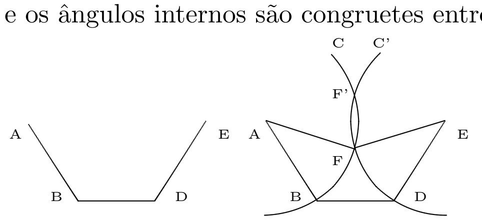


figura 1 figura 2

O professor de Pedro entregou a seus alunos uma folha com o desenho de três lados consecutivos de um pentágono regular (figura 1) e pediu aos alunos que construíssem, com o compasso, um pentágono, utilizando os três lados dados.

Pedro fez a seguinte construção (figura 2):

1) Compasso centrado em A e abertura AB construiu o arco C;

2) Compasso centrado em E e abertura AB construiu o arco C';

3) Os pontos F e F' são as interseções dos arcos C e C'.

4) O pentágono de Pedro é ABDEF.

Com base nesses dados,

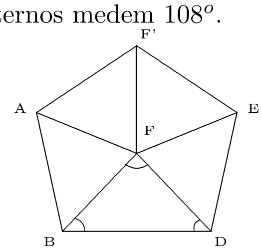
a) determine os ângulos internos desse pentágono;

b) podemos afirmar que esse pentágono é regular?

(Justifique sua resposta.)

Solução.

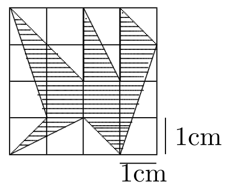
a) O polígono ABDEF' é por construção, um pentágono regular. Assim, seus ângulos internos medem 108^o.



Assim, $AF'EF$ é um losango, logo, $A\hat{F'}E = 108^0 = A\hat{F}E$ e, assim, $360^o - A\hat{F}E = 252^o$ é um dos ângulos internos de $ABDEF$.

Temos que $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}E$ são ângulos internos de um pentágono regular, logo $A\hat{B}D = B\hat{D}E = 108^o$. Como a soma dos ângulos internos de um losango é 360^o temos que $108^o + F'\hat{E}F = 180^o$, logo, $F'\hat{E}F = 72^o$ e $F\hat{A}B = 108^o - 72^o = 36^o$. Analogamente, $F\hat{E}D = 36^o$.

b) $ABDEF$ não é regular, pois as medidas dos seus ângulos são distintas.

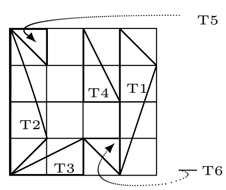


5ª Questão. Determine a área da figura sombreada no quadrado abaixo.

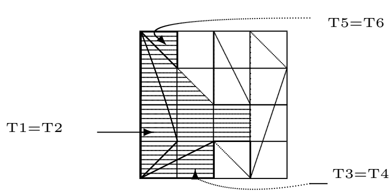
(Justifique sua resposta.)

Solução. Existem várias maneiras de resolver esse problema, vamos usar uma que foi utilizada por alguns dos alunos que participaram da Olimpíada.

Para entender melhor os triângulos, vamos dar nomes como na figura abaixo:



Observamos primeiro que T1 é congruente a T2, T3 é congruente a T4 e T5 é congruente a T6, pelo caso LLL. Isto quer dizer que podemos sobrepor os triângulos, como mostra a figura abaixo:



Logo, podemos concluir que a área da figura é formada por 7 quadradinhos mais meio quadradinho, ou seja, 7,5cm^2.

6ª Questão. "O número 10 foi escolhido como base do sistema de numeração porque o homem tem dez dedos nas mãos e por isso acostumou-se a contar em dezenas.

Na realidade, algumas civilizações antes da nossa utilizaram outros números como base. Os babilônios adotavam o sistema sexagesimal, do qual nos restam ainda hoje o minuto e o segundo (tanto para medir tempo quanto para medir ângulos). Evidentemente, decorar uma tabuada de 59 por 59 é uma tarefa difícil. Assim, o sistema não prevaleceu." (Revista do professor de matemática nº 12)

Num planeta distante, onde os seres possuem três dedos, usa-se o sistema de numeração na base 3. As tabuadas nesse sistema são:

$0 \times 0 = 0$	$1 \times 0 = 0$	$2 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$
$0 \times 2 = 0$	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 11$
$0 + 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$2 + 0 = 2$
$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 10$
$0 + 2 = 2$	$1 + 2 = 10$	$2 + 2 = 11$

Nesta base de numeração, os números são agrupados de 3 em 3 de modo que o número 211 na base 3 equivale a $2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 22$ na nossa base decimal.

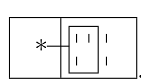
Faça as continhas abaixo, usando a base de numeração 3 e as tabuadas acima.

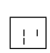
a) $1 + 1 + 1$; c) $2 \times (1 + 1 + 1)$;
b) $(1 + 1) \times 2$; d) $12 + 11$;

(Justifique sua resposta.)

Solução. Antes de resolvermos as continhas, vamos entender melhor esse novo sistema de numeração.

Como na base decimal, vamos representar o número de tal maneira que cada algarismo represente agrupamentos de 3 unidades. Por exemplo, se temos $|||||$ unidades os elementos ficariam:



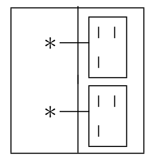
o asterisco "$*$" representa o agrupamento  .

Assim poderíamos representar o número como 12, isto é, 1 asterisco e 2 barras. Ou ainda $5 = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0$.

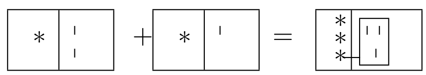
a) $1+1+1=10$

b) $(1+1)\times 2 = 2\times 2 = 11$ como mostra na tabuada

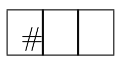
c) $2\times(1+1+1)=(1+1+1)+(1+1+1)=20$, pois



d) Para resolver este ítem, vamos observar o seguinte:



Para agrupamentos de 3 asteriscos, vamos usar a representação #. Logo,

 ou 100.

VI OMEG, 1997, 2º grau.

1ª Questão. Quatro cubos maciços são feitos de um mesmo material, mas de arestas diferentes, a saber, 6cm, 8cm, 10cm e 12cm.

Os cubos são colocados numa balança de 2 pratos de forma que os pratos se equilibrem.

De que forma devemos colocar os cubos nesses pratos para que a balança fique em equilíbrio?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Para resolver este problema observamos que como os cubos são maciços e feitos do mesmo material suas massas são diretamente proporcionais aos seus volumes, e da mesma forma seus pesos. Logo, como $12^3 = 6^3+8^3+10^3$, basta colocarmos num prato o cubo de aresta 12 e no outro prato os outros cubos.

2ª Questão. Para determinar, aproximadamente, o peso de um grão de feijão, João adotou os seguintes procedimentos:

i) pegou um saco de $1kg$ de feijão e mediu o seu volume, obento 1,3 litros;

ii) contou quantos feijões possui $200ml$ de feijão, obtendo um total de 700 feijões; assim, descobriu o peso de um grão de feijão.

De acordo com os dados acima:

a) Quanto pesa uma grão de feijão?

b) Quantos grãos possui um quilo de feijão?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Ver solução da 2ª Questão da VI OMEG, 1º grau.

3ª Questão. Considere a função $g(x)$ dada por $2g(\frac{x}{2}) + g(\frac{2}{x}) = 2x$.

a) Calcule $g(1)$;

b) Calcule $g(2)$.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Esta questão envolve resolução de sitemas lineares.

a) Para calcular $g(1)$, basta observar que se $\frac{x}{2} = 1$ e $\frac{2}{x} = 1$, temos $x = 2$. Daí, $2g(1) + g(1) = 4$, isto é, $g(1) = \frac{4}{3}$.

b) Para calcular $g(2)$, primeiro vamos fazer $\frac{x}{2} = 2$, isto é, $x = 4$, daí,

$$g(\frac{1}{2}) + 2g(2) = 8. \tag{1.4}$$

Agora, fazendo $\frac{2}{x} = 2$, ou seja, $x = 1$ temos

$$2g(\frac{1}{2}) + g(2) = 2. \tag{1.5}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1.4) e (1.4), nas incógnitas $g(\frac{1}{2})$ e $g(2)$, obtemos $g(2) = \frac{14}{3}$.

4ª Questão. No ano de 2091, estaremos realizando a centésima Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. Já é tradição que as provas da Olímpiada sejam realizadas sempre em um sábado do mês de outrubro. Em quais dias do mês de outubro poderá acontecer a centésima Olimpíada de Goiás.

Atenção: No intervalo acima, os anos múltiplos de 4 possuem 366 dias.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Ver solução da 3ª Questão da VI OMEG, 1º grau.

5ª Questão. Dado n, um número natural, temos que n^3 pode ser escrito como soma de n números naturais consecutivos e ímpares, por exemplo:

$$\begin{aligned}1^3 &= 1\\ 2^3 &= 3+5\\ 3^3 &= 7+9+11\\ 4^3 &= 13+15+17+19.\end{aligned}$$

a) Determine as parcelas cuja soma é 72^3;

b) Determine as parcelas cuja soma é n^3;

c) Generalize para n^k, onde $k \geq 2$ é um número natural.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) A idéia é escrever 72^3 como soma de 72 números naturais consecutivos e ímpares, isto é,

$$\begin{aligned}72^3 &= (a+0)+(a+2)+(a+4)+...+(a+(2\times 72-2))\\ &= (a+a+...+a)+(2+4+...+142) =\\ &= 72a + \frac{(2+142)\times 71}{2} = 72a + 72\times 71,\end{aligned}$$

ou seja, $a = 72^2 - 71 = 5113$. Assim, $72^3 = 5113 + 5115 + ... + 5255$.

b) Basta generalizar o raciocínio acima para um natural qualquer, ou seja, escrever n^3 como soma de n naturais consecutivos e ímpares, isto é,

$$\begin{aligned}n^3 &= (a+0)+(a+2)+(a+4)+...+(a+(2\times n-2))\\ &=(a+a+...+a)+(2+4+...+(2n-2)) =\\ &=na + \frac{(2+2n-2))(n-1)}{2} = n(a+n-1).\end{aligned}$$

Logo, $a = n^2 - n + 1$ e

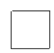
$$\begin{aligned}n^3 &= (n^2-n+1)+(n^2-n+1+2)+((n^2-n+1+4)+\\ &+...+(n^2-n+1+2n-2)\\ &= (n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+...+(n^2+n-1).\end{aligned}$$

c) De maneira análoga ao ítem b) temos $n^k = n(a + n - 1)$, isto é, $a = n^{k-1} - n + 1$. Assim,

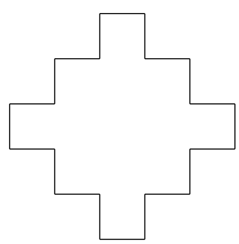
$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + ... + (n^{k-1} + n - 1).$$

6ª Questão. Uma curva é obtida em estágios pelo seguinte processo:

1) No estágio 0, ela é um quadrado de lado $1cm$.



2) O estágio 1 é obtido a partir do estágio 0, dividindo-se cada lado do quadrado em três partes iguais, construindo-se, externamente, sobre o segmento central de cada lado, um quadradinho e suprimindo-se, então, o segmento central (veja figura):



3) O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo-se cada lado do polígono do estágio n em três partes iguais, construindo-se, externamente, sobre o segmento central, um quadrado e suprimindo-se, então, o segmento central.

De acordo com o enunciado acima, determine:

a) O perímetro do polígono no estágio 1;

b) O perímetro do polígono no estágio 5;

c) A área do polígono do 5º estágio;

d) P_n e A_n, onde P_n é o perímetro e A_n é a área do polígono do n-ésimo estágio.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Observamos que no estágio 1, cada lado do quadrado original deu origem a 5 lados, assim, o polígono do estágio 1 tem 20 lados e cada lado mede $\frac{1}{3}cm$, logo o perímetro é $\frac{20}{3}cm$. b) Observamos que a cada mudança de estágio, cada lado do estágio do polígono anterior dá origem a 5 lados, e o comprimento do lado é dividido por 3, assim temos o seguinte:

estágio	0	1	2	3	4	5	...	n
nº de lados	4	$4\cdot 5$	$4\cdot 5^2$	$4\cdot 5^3$	$4\cdot 5^4$	$4\cdot 5^5$	...	$4\cdot 5^n$
comprimento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{3^5}$	...	$\frac{1}{3^n}$

Logo, o $P_5 = \frac{4\cdot 5^5}{3^5} = 4(\frac{5}{3})^5$.

c) Observamos que a área do polígono no estágio n, $n \geq 1$, é igual a área do polígono no estágio $n-1$ acrescida da área de $4\times 5^{n-1}$ quadrados de lado $\frac{1}{3^n}$. Assim, temos a seguinte seqüência:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1\\
A_1 &= A_0 + \frac{4}{9}\\
A_2 &= A_1 + 4\cdot 5\times\frac{1}{3^4} = 1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}\\
A_3 &= A_2 + 4\cdot 5^2\times\frac{1}{3^6} = 1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2\\
A_4 &= A_3 + 4\cdot 5^3\times\frac{1}{3^8} = 1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3\\
A_5 &= A_4 + 4\cdot 5^4\times\frac{1}{3^{10}} =\\
&= 1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3+\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^4
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$A_5 = 1+\frac{4}{9}\left[1+\frac{5}{9}+\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{5}{9}\right)^4\right] = 2-\left(\frac{5}{9}\right)^5 cm^2.$$

d) Da tabela do item b), temos que $P_n = 4\cdot 5^n\cdot\frac{1}{3^n} = 4\cdot(\frac{5}{3})^n$ e, pelo item c), temos que

$$A_n = 1+\frac{4}{9}\left[1+\frac{5}{9}+\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\right] = 2-\left(\frac{5}{9}\right)^n cm^2.$$

VII OMEG, 1998, nível 1

1ª QUESTÃO. O aniversário de João caiu no 2º domingo de maio, dia em que é comemorado o "Dia das Mães". João perguntou a sua mãe se esta coincidência iria se repetir sempre. Sua mãe respondeu que só quando o "Dia das Mães" ocorrer o mais cedo possível. Em que dia do mês é o aniversário de João?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Conforme o enunciado, a coincidência se repete apenas quando o "Dia das Mães" for o mais cedo possível. Ora, o 2º domingo de maio vai acontecer o mais cedo possível desde que o 1º domingo ocorra o mais cedo possível, isto é, se 1º de maio for domingo. Logo, o aniversário de João é dia 8 de maio.

2ª QUESTÃO.

Um colar se rompeu quando duas amigas brincavam
Uma fileira de pérolas escapou
A sexta parte ao solo caiu
Um terço, uma jovem salvou
A décima parte a outra jovem salvou
E com seis pérolas o colar ficou
Digam-me, quantas pérolas tinha a fileira que escapou?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Seja x a quantidade de pérolas então,

$$x-(x/6+x/3+x/10)=6,$$

onde $x/6$ caiu ao solo, $x/3$ uma jovem salvou e $x/10$ a outra jovem salvou.

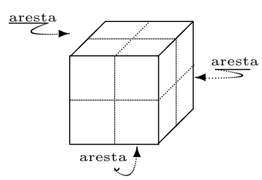
Disso concluímos que

$$(30x - 5x - 10x - 3x)/30 = 6 \quad \text{ou} \quad 12x/30 = 6 \Rightarrow x = 15.$$

Então 15 é a quantidade de pérolas, excluindo as 6 que não caíram chega-se ao total de 9 pérolas na fileira que escapou.

Observação: Pelo enunciado do problema conclui-se que o número de pérolas é divisível por 3, 6 e 10, entretanto a quantidade de pérolas do colar, 15, não é múltiplo de 6 e 10.

3ª QUESTÃO. O cubo da figura abaixo foi montado com 8 cubinhos iguais e cada aresta tem o comprimento de 2 arestas dos cubinhos como mostra a figura. O volume do cubo é igual ao de 8 cubinhos. Quantos cubinhos devemos acrescentar para formar um outro cubo de aresta igual ao comprimento de 3 arestas dos cubinhos? E qual é o volume do cubo final?



(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. A aresta do cubo formado com 8 cubinhos tem medida igual ao dobro da aresta dos cubinhos. Devemos formar um cubo onde cada aresta mede 3 arestas dos cubinhos, como ilustra a figura 1(a)

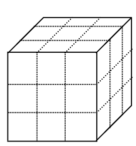


Fig. 1(a)

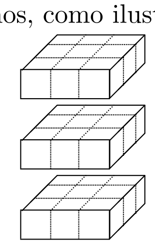


Fig. 1(b)

Observe que para formar este cubo precisamos de 3 "camadas" de 9 cubos, como mostra a figura 1(b), logo o volume do novo cubo são 27 cubinhos, como já haviam 8 cubinhos, devemos acrescentar 19 cubinhos para formar o novo cubo.

4ª Questão. Uma cavalo e um burro caminhavam juntos carregando cada um, pesados sacos. Como o cavalo reclamava muito de sua carga, respondeu-lhe o burro:

- De que te queixas? Se me desses um saco, minha carga seria o dobro da tua. O cavalo pensou e parou de reclamar por achar que sua carga era menor que a do burro. Mal sabia ele que as cargas eram iguais! Quantos sacos cada um levava?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Vamos chamar de B e C o número de sacos levados pelo burro e pelo cavalo respectivamente.

Quando o burro diz "... se me desses um saco ...", o burro ficaria com um saco a mais, $B+1$, e o cavalo com um saco a menos, $C-1$. E ainda, quando o burro diz que "... minha carga seria o dobro da sua...", a carga do burro, $B+1$ passaria a ser o dobro da carga do cavalo, $C-1$ ou seja, $B+1 = 2(C-1)$. Além disso foi dito que as cargas eram iguais, isto é, $B = C$.

Disto conclui-se

$$B+1 = 2(C-1) \Rightarrow C+1 = 2C-2 \text{ ou } 1+2 = 2C-C \Rightarrow C = 3.$$

Logo cada um deles levava 3 sacos.

5ª Questão. Escreva os números de 2 a 40 com os seguintes critérios:

i) Na primeira linha escreva os ímpares em ordem crescente;

ii) Na segunda linha escreva os números que são obtidos multiplicando os números da 1ª linha por $2 = 2^1$ e em ordem crescente.

iii) Na terceira linha escreva os números que são obtidos multiplicando os números da 2ª linha por $4 = 2^2$ e em ordem crescente.

iv) Continue até não encontrar mais números que possam ser obtidos desta forma;

v) Finalmente na última linha escreva os números ausentes em ordem decrescente.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Fazendo o que se pede: Na linha 1 colocamos os números ímpares:

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39.

Na linha 2 colocamos os números da linha 1 multiplicados por 2, tomando o cuidado de não ultrapassar 40: 6 10 14 18 22 26 30 34 38.

Na linha 3 colocamos os números da linha 2 multiplicados por 4, tomando o cuidado de não ultrapassar 40: 24, 40.

Na linha 4 deveríamos colocar os números da linha 3 multiplicados por 8, mas estes ultrapassam 40, logo não temos mais números para colocar.

Finalmente na última linha vamos colocar os que sobraram em ordem decrescente: 36 32 28 20 16 12 12 8 4 2.

Resumindo:

Linha 1 - 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39.

Linha 2 - 6 10 14 18 22 26 30 34 38.

Linha 3 - 24, 40.

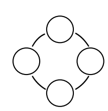
Linha 4 - 36 32 28 20 16 12 12 8 4 2.

Comentário.

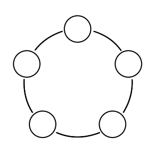
Por uma falha na montagem da versão final da prova, a questão foi publicada com enunciado incorreto. No enunciado correto, o item iii seria o seguinte:

iii. Na terceira linha escreva os números que são obtidos multiplicando os números da 1. linha por $4 = 2^2$ e em ordem crescente;

6ª Questão. a) Disponha os números de 1 a 4 no círculo de modo que 3 vizinhos consecutivos nunca formem uma seqüência crescente ou decrescente.



b) Mostre que para os números 1, 2, 3, 4 e 5, qualquer disposição no círculo, fará com que 3 vizinhos consecutivos estejam em ordem crescente ou decrescente.



(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Uma vez fixada a posição do número 1, para obter a solução desejada, basta que não se tome como seu vizinho consecutivo o número 2.
b) Suponha que se possa dispor os números $\{1, 2, ..., n\}$ num círculo de forma que 3 vizinhos consecutivos nunca formem uma seqüência crescente ou decrescente. Então a diferença entre dois consecutivos será alternadamente positiva e negativa. Partindo de qualquer posição, no sentido anti-horário, se a primeira diferença for positiva a última será negativa, pois após a última virá novamente a primeira. Logo essas diferenças e também o numero n deverá ser par. Portanto se n é impar, em particular se $n = 5$, qualquer disposição dos números $\{1, 2, ..., n\}$ no círculo terá três vizinhos consecutivos na ordem crescente ou decrescente.

Para n par é sempre possivel dispor os números satisfazendo a propriedade. Por exemplo coloque os números $\{1, 2, .., n/2\}$ no sentido anti-horário, saltando uma posição. Em seguida recomece colocando os números $\{n/2 + 1, n/2 + 2, ..., n\}$ nas posições restantes.

VII OMEG, 1998, nível 2

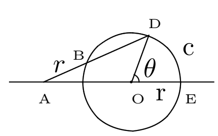
1ª Questão. Uma cavalo e um burro caminhavam juntos carregando cada um, pesados sacos. Como o cavalo reclamava muito de sua carga, respondeu-lhe o burro:

- De que te queixas? Se me desses um saco, minha carga seria o dobro da tua. O cavalo pensou e parou de reclamar por achar que sua carga era menor que a do burro. Mal sabia ele que as cargas eram iguais! Quantos sacos cada um levava?

(Justifique sua resposta.)

Solução. Ver solução da 4ª Questão da VII OMEG, nível 1.

2ª Questão. Arquimedes (287 a.C.) tri-seccionava um ângulo arbitrário $D\hat{O}E$ de medida θ usando a figua abaixo. Prove que a medida do ângulo $D\hat{A}E$ é $\frac{\theta}{3}$.



c: circunferência de raio r. Dado: $BA = OE = r$.

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Ver 1ª Questão do Nível 3.

3ª QUESTÃO. Qual é o maior valor de $19n - 3n^2$, onde $n \in \mathbb{Z}$?

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Vamos chamar de $a_n = 19n - 3n^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Observe que $a_{n+1} = 19(n+1) - 3(n+1)^2 = 19n - 3n^2 - 6n + 16$, e então a diferença entre dois termos consecutivos $a_{n+1} - a_n$ é igual a $-6n + 16$. Logo $a_{n+1} \geq a_n$ se e somente se n satifaz $-6n + 16 \geq 0$. Como n é inteiro, esta equação é satisfeita para todo $n \leq 2$. Portanto a sequência é crescente até o termo a_3 e decresce a partir desse termo, isto é $..., a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ e $a_3 > a_4 > a_5 > ....$ O maior valor é $a_3 = 19 \times 3 - 3 \times 3^2 = 30$.

4ª QUESTÃO. Um quadrado mágico multiplicativo tem a propriedade de que os produtos dos números nas linhas, nas colunas e nas diagonais são iguais, como mostramos abaixo:

5	100	2
4	10	25
50	1	20

$5 \times 100 \times 2 = 1000$ (1ª linha)
$5 \times 10 \times 20 = 1000$ (diagonal)
$100 \times 10 \times 1 = 1000$ (2ª coluna)

Complete o quadrado mágico, Fig.1, com números positivos.

18		24
16		
	36	

Fig. 1

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO. Completando o quadrado com números a , b, c, d e e, como na Fig. 2, teremos

$18 \times 24 \times a = 36 \times a \times b$. Como $a \neq 0$ então $b = 12$. Usando este valor de b então temos $16 \times 12 \times c = 24 \times c \times e$ e novamente como $c \neq 0$

18	a	24
16	b	c
d	36	e

Fig. 2

18	4	24
16	12	9
6	36	8

Fig. 3

então $e = 8$. Novamente, utilizando esses valores já determinados temos a equação $18 \times a \times 24 = 18 \times b \times e = 18 \times 12 \times 8$, de onde obtemos $a = 4$. De modo análogo pode-se determinar os valores $c = 9$ e $d = 6$. O quadrado será como na Fig. 3.

5ª QUESTÃO. a) Nas figuras 1 e 2, abaixo, construídas com palitos de fósforo, determine F, o número de triângulos formados com 3 palitos, L, o número de lados (palitos), e V, o número de vértices (encontro de dois ou mais lados). b) Sendo V o número de vértices, F o número de

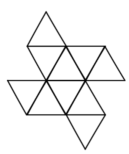


Fig.1

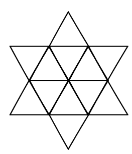
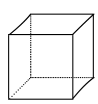
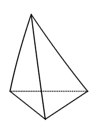


Fig.2

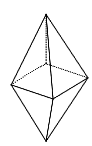
faces e L o número de arestas, calcule $V - L + F$ para o Cubo, Tetraedro e o Octaedro, ver figuras abaixo.



Cubo



Tetraedro



Octaedro

(Justifique sua resposta.)

SOLUÇÃO.
a) Na figura 1, temos: $F = 10$, $L = 21$ e $V = 12$.
Na figura 2, temos: $F = 12$, $L = 24$ e $V = 13$.
b) Como $F = 6$, $L = 12$, $V = 8$ para o cubo, $F = 4$, $L = 6$, $V = 4$ para o tetraedro e $F = 8$, $L = 12$, $V = 6$ para o octaedro. Temos que

$$V - L + F = 2,$$

nos três casos.

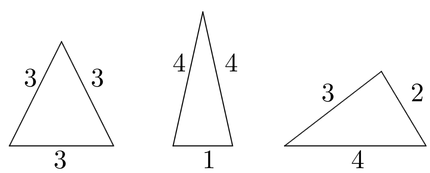
6ª Questão. A fórmula

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semiperímetro, fornece a área de um triângulo de lados a, b e c.
i) Esboce três triângulos com perímetro 9 sendo um deles equilátero.
ii) Qual dos triângulos do item *i*. tem maior área?
iii) Dê exemplo de um triângulo cuja área é numericamente igual ao seu perímetro.
iv) Dê exemplo de um triângulo com lados inteiros e área igual ao seu perímetro.

(Justifique sua resposta.)

Solução. *i*) O triângulo equilátero de lado igual a 3. Podemos dar exemplo de um triângulo isósceles e um escaleno, deste modo temos:



ii) Na fórmula dada $p = \frac{9}{2}$ e

1) No triângulo equilátero temos $a = b = c = 3$.

$$A_1 = \sqrt{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-3)^3} = \frac{3}{4}\sqrt{27} = \frac{9}{4}\sqrt{3}.$$

2) No triângulo isósceles temos $a = b = 4$ e $c = 1$

$$A_2 = \sqrt{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-4)^2(\frac{9}{2}-1)} = \frac{3}{4}\sqrt{7}.$$

3) No triângulo escaleno temos $a = 3$, $b = 4$ e $c = 2$

$$A_3 = \sqrt{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-3)(\frac{9}{2}-4)(\frac{9}{2}-2)} = \frac{3}{4}\sqrt{15}.$$

Comparando A_1, A_2 e A_3, temos:

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{15}}, \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}$$

Então $A_1 > A_3 > A_2$, e o equilátero é o triângulo de maior área.

iii) Vamos verificar se existe um triângulo equilátero com área numericamente igual ao perímetro. Se a é a medida dos lados do triângulo, então $p = \frac{3}{2}a$, logo $(2p)^2 = p(p-a)^3$. Esta equação implica que a área de um triângulo equilátero de lado $4\sqrt{3}$ é numericamente igual ao seu perímetro.

iv) Do item iii, vemos que não existe um triângulo equilátero com lados inteiros, e com área numericamente igual ao perímetro.

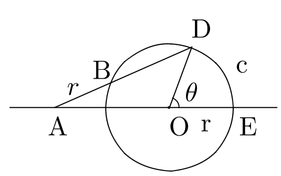
Vamos procurar um exemplo entre os triângulos retângulos. Considerando os triângulos retângulos de catetos iguais a $3k$ e $4k$ e a hipotenusa $5k$, com k inteiro positivo, temos que

$$p = \frac{3k + 4k + 5k}{2} = 6k.$$

Logo, se $A = (3k + 4k + 5k) = 12k$, segue que $k^2 = 4$, e portanto o triângulo retângulo de lados 6, 8, 10 é uma exemplo.

VII OMEG, 1998, nível 3

1ª Questão. Arquimedes (287 a.C.) tri-seccionava um ângulo arbitrário $D\hat{O}E$ de medida θ usando a figua abaixo. Prove que a medida do ângulo $D\hat{A}E$ é $\frac{\theta}{3}$.

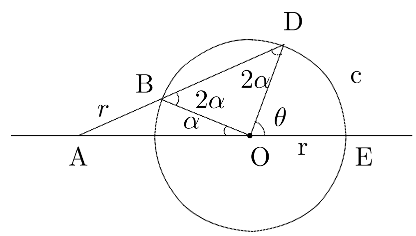


c: circunferência de raio r. Dado: $BA = OE = r$.

(Justifique sua resposta.)

Solução. Pela figura abaixo temos que os triângulos ABO e BOD são isósceles pois $\overline{AB} = \overline{BO}$ e $\overline{BO} = \overline{DO}$. Temos que as medidas dos ângulos $D\hat{A}E$ e $A\hat{O}B$ são iguais a α e as medidas de $O\hat{B}D$ e de $B\hat{D}O$ são iguais a β.

Observando que a soma dos ângulos internos do triângulo ABO é π radianos, vemos que $\beta = 2\alpha$. Do mesmo modo podemos concluir que $B\hat{O}D = \pi - 4\alpha$. Portanto $\alpha + (\pi - 4\alpha) + \theta = \pi$, de onde se conclui que $\theta = 3\alpha$.



2ª Questão. Seja $p \geq 5$ primo.

a) Fatore $p^2 - 3p + 2$.

b) Mostre que $p^2 + 2$ é múltiplo de 3.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Para fatorar o polinômio $p^2 - 3p + 2$ vamos calcular suas raízes: $p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow p = 1$ ou $p = 2$. Assim, $p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$.

b) Pelo item (a) temos que $p^2 + 2 = (p-1)(p-2) + 3p$. Agora, utilizando o algoritmo da divisão, temos que $p = 3q + r$ onde $q \in \mathbb{N}$ e $r = 0$, 1 ou 2. Como p não é divisível por 3, pois é primo e $p \geq 5$, os valores de r são iguais a 1 ou 2.

Logo $p^2 + 2 = (3q + r - 1)(3q + r - 2) + 3p$, e como $r = 1$ ou $r = 2$ então $(3q + r - 1)$ ou $(3q + r - 2)$ é igual a $3q$, o que implica que $p^2 + 2$ é múltiplo de 3.

3ª Questão. Uma maneira de calcular o valor aproximada da raiz quadrada de um número $c > 0$, conhecida desde a época dos babilônios, é calcular os termos da seqüência

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$$

para algum valor inicial a_1.

a) Calcule os quatro primeiros termos desta seqüência começando com $a_1 = 1$ e $c = 2$.

b) Mostre que a seqüência a_n é decrescente a partir de a_2, isto é,

$$a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$$

independente do valor inicial a_1 e do número $c > 0$.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Fazendo $a_1 = 1$ e $c = 2$, temos que $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) = \frac{3}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{17}{12}$ e $a_4 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408}$. Assim os 4 primeiros termos da seqüência são:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{17}{12} \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{577}{408}.$$

b) Obtemos da expressão que define a seqüência que $a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + c = 0$, e adicionando aos dois membros dessa expressão a parcela a_{n+1}^2, concluimos que $(a_n - a_{n+1})^2 + c = a_{n+1}^2$. Esta expressão implica que $a_{n+1}^2 \geq c$, para todo $n \geq 1$, ou equivalentemente, $a_n^2 \geq c$, para todo $n \geq 2$. Então $a_n \neq 0$, podemos dividir os dois membros da expressão que define a seqüência por a_n, obtendo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{c}{a_n^2})$, para $n \geq 2$. Como $a_n^2 \geq 2$, então $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ para todo $n \geq 2$, isto é $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 2$. Se $a_1^2 = c$, todos os têrmos são iguais, e se $a_1^2 \neq c$ então as desigualdades acima são estritas.

4ª Questão. Seja uma função, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(n+1) - f(n) = n$ e $f(0) = 0$.

a) Determine $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$;

b) Ache $f(n)$ em função de n apenas e calcule $f(1998)$.

(Justifique sua resposta.)

Solução. a) Fazendo $n = 0$ temos $f(0+1) - f(0) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$;

$$n = 1 \textit{ temos } f(1+1) - f(1) = 1 \Rightarrow f(2) = 1;$$
$$n = 2 \textit{ temos } f(2+1) - f(2) = 2 \Rightarrow f(3) = 3;$$
$$n = 3 \textit{ temos } f(3+1) - f(3) = 3 \Rightarrow f(4) = 6.$$

Observe que:

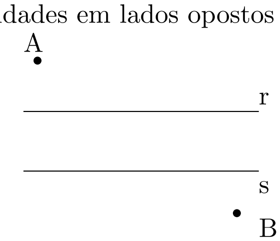
$$\begin{aligned}
&f(0+1) - f(0) = 0\\
&f(1+1) - f(1) = 1\\
&f(2+1) - f(2) = 2\\
&f(3+1) - f(3) = 3\\
&f(4+1) - f(4) = 4\\
&\dots\\
&f((n-2)+1) - f(n-2) = n-2\\
&f((n-1)+1) - f(n-1) = n-1.
\end{aligned}$$

A primeira parcela de cada uma das equações acima cancela com a segunda parcela da equação seguinte. Somando cada uma destas equações obtemos:

$$f(n) - f(0) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) \Rightarrow f(n) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

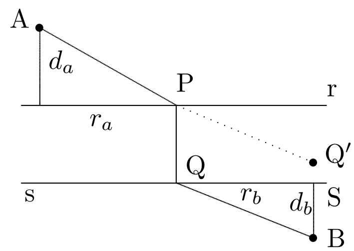
Logo, $f(1998) = \frac{1997 \times 1998}{2} = 1995003$.

5ª Questão. As paralelas r e s abaixo representam as margens de um rio e os pontos A e B representam cidades em lados opostos desse rio. Deseja-se construir uma ponte PQ (P$\in$ r e Q$\in$ s) perpendicular às margens do rio de forma que construindo as estradas AP e BQ o percurso total de A até B seja mínimo. Em que pontos das margens devemos fixar as extremidades da ponte?



(Justifique sua resposta.)

Solução. Sejam:
d_a a distância de A a margem r;
d_b a distância de B a margem s;
r_a a distância de R a P;
r_b a distância de S a Q;
e $d = r_a + r_b$.



Observamos que o comprimento do percurso é igual ao comprimento da poligonal $APQ'B$ (ver figura), onde PQ' é paralelo a QB, e $Q'B$ é igual à largura do rio. Então o percurso será mínimo se AQ' for mínimo, mas isso ocorrerá se P estiver alinhado com AQ'. Logo os ângulos $A\hat{P}R$ e $S\hat{Q}B$ devem ser iguais. Seja α este ângulo. Temos,

$$tg\alpha = \frac{d_a}{r_a} = \frac{d_b}{r_b} \Rightarrow \frac{d_a}{r_a} = \frac{d_b}{d - r_a} \Rightarrow r_a = \frac{dd_a}{d_a + d_b}.$$

6ª Questão. Considere a função $f(x) = 1 - |2x - 1|$, onde $|x|$ representa o valor absoluto de x, isto é, $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$.

i) Esboce o gráfico de f no intervalo $[0, 1]$.

ii) Esboce o gráfico da função $g(x) = f(f(x))$.

iii) Resolva as equações $g(x) = x$ e $f(x) = x$.

(Justifique sua resposta.)

Solução. *i*) Como $f(x) = 1 - |2x - 1|$ no intervalo $[0, 1]$, vamos considerar os sub intervalos:
a) $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow f(x) = 1 + (2x - 1) = 2x$ e
b)$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) = 1 - (2x - 1) = -2x + 2.$
ii) Como $g(x) = f(f(x)) = 1 - |2f(x) - 1|$, vamos considerar os subintervalos:

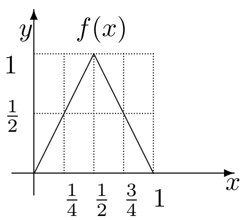
a) $0 \leq x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = 1 - (4x - 1) = 4x.$

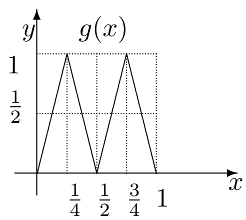
b) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \; g(x) = 1 - (4x - 1) = -4x + 2.$

c) $\frac{2}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow g(x) = 1-[2(-2x+2)-1] = 4x-2.$

d) $\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = 1 + [2(-2x + 2) - 1] = 4(1 - x).$

Vejam os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, nas figuras a seguir.





iii) Ao resolver a equação, observamos que os gráficos de $y = f(x)$ e $y = x$ se interceptam em 2 pontos, como mostra a figura, a seguir.

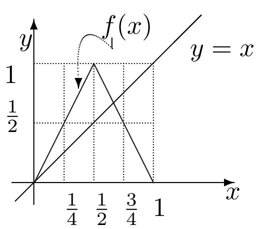
Resolvendo a equação $y = f(x)$ temos:

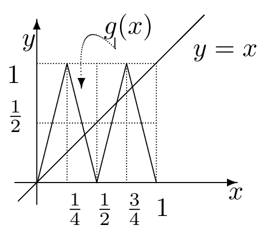
para $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ temos que $f(x) = 2x = x \Rightarrow x = 0$;

para $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ temos que $f(x) = -2x + 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Logo os pontos de interseção são: $(0, 0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Ao resolver a equação $g(x) = x$, observamos que os gráficos de $y = g(x)$ e $y = x$ se interceptam em 4 pontos, como mostra a figura abaixo.





Resolvendo a equação:

para $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ temos que $g(x) = 4x = x \Rightarrow x = 0$;

para $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{4}$ temos que $g(x) = -4x + 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$;

para $\frac{2}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ temos que $g(x) = 4x - 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ e

para $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ temos que $g(x) = 4(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{4}{5}$.

Logo os pontos de interseção são $(0, 0)$; $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$,$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$.

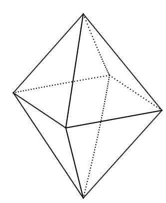
Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 85-88

Problemas Propostos

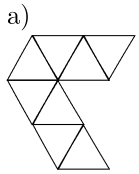
Nesta seção propomos alguns problemas de níveis 1, 2 e 3 cujas soluções serão publicadas no próximo número. Contamos com a sua contribuição com soluções e sugestões de problemas para o próximo número.

Nível 1

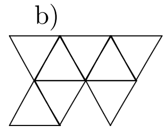
1. O sólido ao lado é um octaedro regular. Ele é formado por duas pirâmides de base quadrada unidas pelas suas bases. Qual das seguintes figuras representa o tetraedro regular planificado?



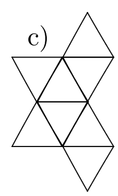
a)



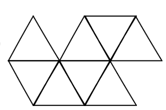
b)



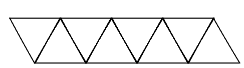
c)



d)



e)

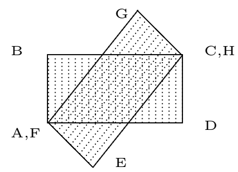


2. Qual é o menor número primo que é um fator da soma

$$1999^{2002} + 2001^{2002}.$$

Nível 2

1. Dois retângulos idênticos $ABCD$ e $EFGH$, de dimensões 24×12, são sobrepostos de tal maneira que F coincide com A e H com C, como mostra a figura ao lado. Achar a área da região pontilhada.



2. A fração $\frac{**6*}{***3*}$ contém os 9 dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e é igual a $\frac{1}{2}$. Encontre, se possível, os dígitos apropriados.

Nível 3

1. No paralelogramo $ABCD$, E e F são pontos médios dos lados $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ respectivamente. G é ponto de interseção de $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. Expresse a razão entre as áreas do triângulo EFG e o triângulo BCE, usando a menor possibilidade destes números.
2. Seja f um polinômio com coeficientes inteiros e $f(0) = 2001$ e $f(1) = 2003$. Prove que f não tem raízes inteiras.
3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2. \tag{1.6}$$

a) Mostre que f é injetora;

b) mostre que $f(0) = 0$;

c) mostre que $f(x^2) = f(x)^2$;

c) mostre que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x \geq 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

d) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem (1.6).

Soluções dos Problemas Propostos na Revista 02

Nível 1

1. Adicione aos dígitos 523... mais três dígitos de tal forma que o número resultante com seis dígitos seja divisível por 7,8 e 9.

Solução. O número $n = 523\_\_\_$ é múltiplo de $504 = \text{mmc}(7,8,9)$ e $523000 < n < 524000$. Se $n = 504k, k \in \mathbb{N}$, então $523000 < 504k < 524000$. Daí, $k = 1038$ ou $k = 1039$. Logo, $n = 504 \times 1038 = 523152$ ou $n = 504 \times 1039 = 523656$.

Obs.: Uma solução parcial foi enviada por Patrick Donizetti R. Silva, Catalão - Goiás.

Nível 2

1. Em uma ilha existem três tribos de nativos que fisicamente não tem nenhuma diferença, mas os "Limões" sempre dizem a verdade, os "Rochas" sempre mentem, e os "Laranjas" dizem alternadamente uma verdade e uma mentira, só que não se sabe por qual começam. Depois de presenciar uma corrida atlética com três participantes, dois nativos, cada um dos quais afirmava que o outro era Laranja, informavam a imprensa como segue: Nativo 1: o ganhador foi o nº 344, o segundo o nº 129, e o terceiro o nº 210. Nativo 2: o ganhador foi o nº 210, o segundo o nº 344, e o terceiro é o nº 129. Qual era o número do ganhador?

Solução. O quadro abaixo mostra as possíveis origens dos dois nativos.

Nativos\casos	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	Li	Li	Li	La	La	La	Ro	Ro	Ro
2	La	Ro	Li	La	Ro	Li	La	Ro	Li

Onde Li=Limão, La=Laranja e Ro=Rocha.

No caso a, observe que o nativo 2 começa mentindo sobre a origem do nativo 1, logo diz a verdade sobre o ganhador da corrida (nº 210), mas o nativo 1, que só diz verdade, diz que o ganhador é outro (nº 344). Assim, os nativos 1 e 2 não são Limão e Laranja, respectivamente. De maneira análoga o caso f não é possível. Os casos b, c e i não são possíveis pois o nativo Limão só diz verdade. Os casos e e g não são possíveis, pois o nativo Rocha só diz mentira.

Analisando os casos d e h vemos que apenas o caso h é possível. Logo os nativos 1 e 2 são Rochas e como só dizem mentiras, o ganhador é o nº 129.

Nível 3

1. Em cada casinha de um tabuleiro $n \times n$ há uma lâmpada. Ao ser tocada uma lâmpada muda seu estado e todas as lâmpadas situadas na mesma fila e na mesma coluna que ela determina (as lâmpadas que estão acesas se apagam e as que estão apagadas se acendem). Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Demonstrar que sempre é possível, com uma sucessão adequada de toques, que todas as lâmpadas do tabuleiro fiquem acesas, e encontrar em função de n, o número mínimo de toques para que se acendam todas as lâmpadas.

Solução. Cada lâmpada deve trocar de estado (apagada/acesa) um número ímpar de vezes, para que mude o estado inicial (apagada). Se todas as lâmpadas são tocadas, cada uma é tocada $2n-1$ vezes. Logo muda seu estado original e termina acesa. Assim o número máximo de toques é n^2. Se o número de toques é menor que n existirá uma linha , i, e uma coluna j, em que a lâmpada não mudou seu estado inicial. Logo $n \leq f(n) \leq n^2$. Vamos analisar separadamente os casos n par e n ímpar.

▹ Se n é ímpar.

Ao serem tocadas as n lâmpadas da coluna $(i, 1)$ todas as lâmpadas mudarão seu estado inicial. Logo $f(n) = n$.

▹ Se n é par.

Consideremos uma seqüência de toques. Diremos que a *i-ésima* linha é par se a quantidade de lâmpadas tocadas desta linha é par, e diremos que é ímpar se a quantidade de lâmpadas tocadas é ímpar, de maneira análoga definimos coluna par e ímpar. Logo uma lâmpada que está na posição (i, j) ficará acesa se:

- A linha i e a coluna j tiverem a mesma paridade e a lâmpada (i, j) foi tocada, ou
- A linha i e a coluna j tiverem paridade distintas e a lâmpada (i, j) não foi tocada.

Portanto para que todas as lâmpadas fiquem acesas, uma lâmpada deve ser tocada se e somente se sua linha e sua coluna tiverem a mesma paridade.

Se todas as colunas forem ímpares, todas as lâmpadas de qualquer linha ímpar deverão ser tocadas; mas isto é um absurdo pois a linha seria par.

Se existe uma coluna ímpar, digamos a coluna j_0, existirá uma quantidade ímpar de linhas tais que a lâmpada (i, j_0) foi tocada; mas estas são todas as linhas ímpares do tabuleiro. Portanto deve haver uma quantidade ímpar destas linhas ímpares.

Como nem todas as colunas são ímpares, um argumento análogo aplicado a uma coluna par mostra que deve haver uma quantidade par destas linhas pares. Mas isto é um absurdo, pois o número total de linhas deveria ser ímpar . Todas as colunas, e análogamente todas as linhas devem se pares e logo todas as lâmpadas devem ser tocadas. Portanto $f(n) = n^2$.

Bibliografia

[1] *Mathematics Teacher, National Council of Teacher of Mathematics*, Volume 93, Number 1, 2 and 7, 2000.

[2] Losada, M. F.. *Problemas y Soluciones*, 1987 - 1991, Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidade Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. 1994

[3] Shklarsky, D. O., Chentzov, N.N. and Yaglom,I.M. *The URSS Olympiad problem book* , Dover Publications Inc., 1994.

[4] Wagner, E. e Moreira, C.G.T. *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, Organización de Estados Iberoamericanos, 1994.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 90-99

Propriedades Extremais em Geometria Plana

Ronaldo A. Garcia e Helvecio P. de Castro

Resumo. São apresentados alguns problemas e resultados sobre quadriláteros e polígonos. Será mostrado que um polígono convexo com lados fixados delimita uma região de área máxima se, e somente se, está inscrito num círculo. Para os quadriláteros são obtidos, explicitamente em função dos comprimentos dos lados, a área e o raio do círculo.

Introdução

Nesta nota apresentamos alguns problemas de geometria plana e temos como objetivo a reflexão sobre alguns problemas clássicos. Os problemas geométricos extremais têm uma longa tradição no desenvolvimento da matemática. Um dos mais populares refere-se ao problema isoperimétrico para curvas planas.

Problema Isoperimétrico: Dentre uma classe de curvas planas, fechadas e simples, de comprimento fixado, encontrar a que delimita uma região de área máxima.

A solução do problema isoperimétrico, para a classe das curvas de Jordan regulares, é o círculo e a mesma não é elementar. As idéias fundamentais usadas na solução baseiam-se na convexidade e na simetria, veja [5] e [7]. Na sua generalidade a desigualdade isoperimétrica afirma que $4\pi A(c) \leq L(c)^2$, onde $A(c)$ é área da região delimitada pela curva c e $L(c)$ o seu comprimento, veja [5]. A igualdade ocorre se, e somente se, c é o círculo de raio $r > 0$.

A seguir consideramos a seguinte versão restrita deste problema para a classe dos quadriláteros.

Problema 1. Dentre todos os quadriláteros (polígonos) de lados fixados encontrar aquele que delimita a região de maior área.

Problema 2. Dadas as medidas de três lados de um quadrilátero, determinar a medida do quarto lado para que a área da região delimitada pelo mesmo seja máxima.

Inicialmente recordamos alguns resultados sobre as relações métricas do triângulo.

LEI DOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

onde R é o raio do círculo cincunscrito ao triângulo de vértices A, B e C e lados a, b e c.

LEI DOS COSSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

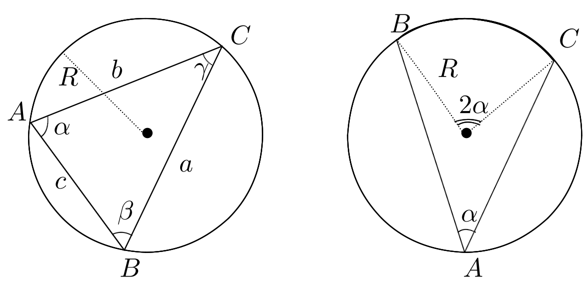


Figura 1.1: Relações métricas do triângulo.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

$$S = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\gamma = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{ac}{2}\operatorname{sen}\beta$$

Uma razão da importância do triângulo é o fato do mesmo ser um dos elementos geométricos mais simples. Se queremos entender os polígonos se faz necessário, inicialmente, conhecermos as propriedades métricas dos triângulos.

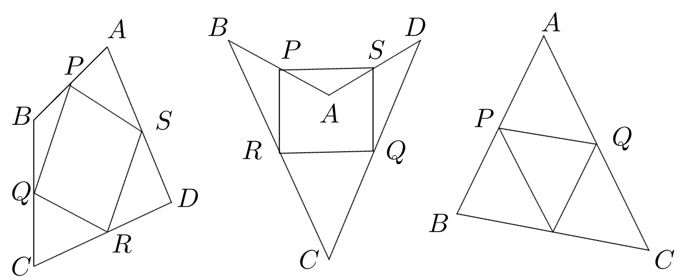
Uma propriedade fundamental do triângulo é a sua rigidez, isto é, três segmentos limitados, com comprimento do maior deles menor que a soma dos comprimentos dos dois menores, definem um único triângulo, a menos de sua posição. Através dos movimentos de rotação e translação podemos sobrepor dois triângulos que tenham as mesmas medidas de lados.

Os polígonos com número de lados maior ou igual a quatro não são rígidos. No caso dos quadriláteros claramente temos um grau de liberdade (um ângulo ou equivalentemente o comprimento de uma das diagonais) para construir vários quadriláteros não congruentes e todos possuindo as mesmas medidas de lados.

Propriedades dos Quadriláteros

Esta seção é baseada no livro "Redécouvrons la Géométrie" dos autores *H. S. M. Coxeter* e *S. L. Greitzer*, [3]. Veja também [2], [5] e [8].

Teorema 1. *Dado um quadrilátero com vértices A, B, C e D. Considere o quadriliátero construido com os pontos médios em cada lado. Então este quadrilátero tem lados opostos congruentes e paralelos, ou seja, é um paralelogramo. Além disso, a área da região delimitada pelo mesmo é a metade da área da região delimitada pelo primeiro quadrilátero. Veja a figura .*



$S(ABCD) = 2S(PQRS)$ $\quad$ $S(ABC) = 4S(APQ)$

Figura 1.2: Quadriláteros e suas propriedades.

Demonstração:

Primeiro observamos que este resultado contempla todas as formas possíveis de quadriláteros. No caso do quadrilátero não delimitar uma região convexa devemos considerar a noção de área com sinal. Para simplificar a apresentação consideraremos o caso convexo. Lembramos que para um triângulo com vértices A, B e C o segmento conectando os pontos médios P e Q de dois lados é paralelo ao outro lado e tem por comprimento a metade deste e portanto a área $S(ABC) = 4S(APQ)$. Logo, no quadrilátero no $PQRS$ os lados PQ e RS são paralelos e tem medidas iguais a $AC/2$. O mesmo para os lados PS e QR que tem medidas iguais a $BD/2$.

Decompondo o quadrilátero temos:

$$\begin{aligned} S(PQRS) =& S(ABCD) - S(PBQ) - S(RDS) - S(QCR) - S(SAP) \\ =& S(ABCD) - \frac{1}{4}S(ABC) - \frac{1}{4}S(CDA) - \frac{1}{4}S(BCD) - \\ & - \frac{1}{4}S(DAB) \\ =& S(ABCD) - \frac{1}{4}S(ABCD) - \frac{1}{4}S(ABCD) \\ =& \frac{1}{2}S(ABCD). \end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Quatro segmentos quaisquer com a condição que o comprimento de cada um deles seja menor que a soma dos outros três segmentos, são lados de um quadrilátero inscrito num círculo. Em outras palavras, todo quadrilátero pode ser deformado e inscrito num círculo.*

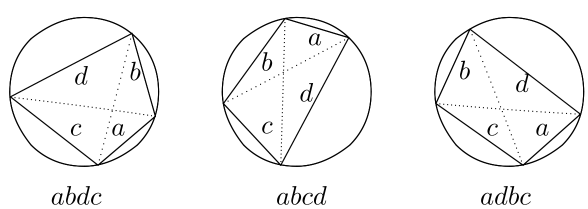


Figura 1.3: Quadrilátero inscrito num círculo.

Demonstração: Tendo em vista um grau de liberdade que temos num quadrilátero podemos aumentar e diminuir os ângulos opostos e ajustá-los de modo a serem suplementares (soma igual a 180 graus). Nesta condição o quadrilátero está inscrito num círculo. Podemos inscrever o quadrilátero de três maneiras distintas considerando a posição relativa dos lados, mas todos delimitam regiões que têm a mesma área. Veja a figura 1.3. □

Teorema 3. *A área da região delimitada por um quadrilátero inscrito num círculo é uma função simétrica dos comprimentos dos lados. Mais precisamente, definindo $p = (a + b + c + d)/2$, a área ao quadrado é a função polinomial simétrica:*

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Demonstração: Considere o quadrilátero cujos lados são a, b, c e d. Se ele estiver inscrito em um círculo, então $\alpha + \beta = 180^o$.

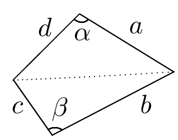


Figura 1.4: Quadrilátero.

Decompondo o quadrilátero nos triângulos indicados na figura e usando a fórmula da área de um triângulo temos

$$S = \frac{1}{2} ad \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \frac{1}{2}(ad + bc) \operatorname{sen} \alpha.$$

Aplicando a lei dos cossenos aos ângulos α e β temos:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

Logo,

$$S^2 = \frac{4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{16}.$$

Simplificando a expressão acima em função de $p = (a + b + c + d)/2$ obtemos a fórmula de Héron de Alexandria (séc. I d. C.) enunciada. □

Problemas Extremais de Quadriláteros e Polígonos

Nesta seção abordaremos as questões propostas na introdução.

Teorema 4. *O quadrilátero de lados a, b, c e d que delimita uma região de área máxima é um quadrilátero inscrito num círculo. O raio do referido círculo é uma função simétrica dos lados e o seu quadrado é uma função algébrica (racional) dos lados.*

Demonstração: Considere o quadrilátero $ABCD$ e denotamos por $\alpha = \hat{A}$ e $\beta = \hat{C}$. Também escrevemos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = d$. A área S do quadrilátero é dada por

$$S = \frac{1}{2}ad\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\beta.$$

Como os ângulos α e β estão relacionados pela equação

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta,$$

então, $S = F(\alpha)$. Derivando implicitamente temos que,

$$F'(\alpha) = \frac{1}{2}ad\cos\alpha + \frac{1}{2}bc\cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Como $2ad\operatorname{sen}\alpha = 2bc\operatorname{sen}\beta\frac{d\beta}{d\alpha}$ segue que

$$F'(\alpha) = \frac{1}{2\operatorname{sen}\beta}ad\operatorname{sen}(\alpha + \beta(\alpha)).$$

Assim, α é um ponto crítico se $\alpha + \beta(\alpha) = 180^o$ (suplementares). Calculando $F''(\alpha)$ num ponto crítico α obtemos

$$\begin{aligned} F''(\alpha) =& \frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha}cd\cos(\alpha + \beta(\alpha))(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha)) \\ =& -\frac{1}{2ab\operatorname{sen}\alpha}(cd + ab) < 0. \end{aligned}$$

Logo este ponto crítico é de máximo local. Pela natureza do problema o mesmo é de máximo global.

Denotamos o comprimento da diagonal BD por x e por R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABD. Pela leis dos senos e dos cossenos temos,

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \qquad x = 2R\operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2(ad + bc)}$$

Simplificando as equações acima, usando que $S = \frac{1}{2}(ad + bc)\operatorname{sen}\alpha$, obtemos

$$R^2 = \frac{(bc + ad)(ac + bd)(ab + cd)}{16S^2}.$$

□

Observação 1. *A área de um quadrilátero $ABCD$ é dado por*

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2}),$$

onde α e β são ângulos internos não adjacentes do quadrilátero $ABCD$ e $2p = a+b+c+d$. A partir desta fórmula podemos dar uma demonstração do Teorema 4 sem o uso do Cálculo Diferencial.

Teorema 5. *Dados três segmentos de comprimentos a, b e c, o comprimento x tal que o quadrilátero de lados a, b, c e x delimita uma região de área máxima, satisfaz a seguinte equação polinomial*

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Além disso, a única solução positiva desta equação pertence ao intervalo aberto $(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$. Em particular, quando $a = b = c$ temos que $x = 2a$ e portanto o quadrilátero é um trapézio.

Demonstração: Consideremos o quadrilátero $ABCD$ e denotemos por $\alpha = \hat{A}$ e $\beta = \hat{C}$. Também escrevemos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = x$.

Pelo teorema anterior um quadrilátero com lados fixados, que delimita uma região com área máxima, está inscrito num círculo, logo

$$S^2 = \frac{4(ax + bc)^2 - (a^2 + x^2 - b^2 - c^2)^2}{16}.$$

Derivando a equação acima em relação a x e denotando $-4(S^2)'(x)$ por $P(x)$ temos,

$$P(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

O discriminante da cúbica acima é dado por

$$\Delta = \mathrm{R}esultante(P, P', x) = -4(a^2 + b^2 + c^2)^3 + 27(-2abc)^2.$$

Lembramos que o resultante entre dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ é um polinômio nos coeficientes de $f(x)$ e $g(x)$ obtido eliminando-se a variável x no sistema de equações $f(x) = g(x) = 0$ e é um critério algébrico para decidir quando dois polinômios têm raízes em comum.

Logo $\Delta \leq 0$ pois,

$$(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{3}.$$

O polinômio $P(x)$ possui três raízes reais que são simples quando $\Delta < 0$. Agora, pela desigualdade acima, relacionando as médias aritméticas e geométricas, observamos que $\Delta = 0$ se, e somente se, $a = b = c$.

Da equação

$$P'(x) = 3x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

temos que $P'(x) = 0$ se, e somente se,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Logo como $P(0) < 0$, a equação polinomial cúbica $P(x) = 0$ possui uma única raiz positiva e duas negativas.

Se x é a raiz positiva de $P(x)$, então $x[x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = 2abc > 0$, logo $x > \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Resolvendo a equação $P(x) = P(-\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}})$ obtemos a cota superior para a raiz positiva de $P(x)$. $\square$

Observação 2. *Para dois lados dados o triângulo que delimita uma região de área máxima é o triângulo retângulo cujos catetos são os lados considerados.*

Teorema 6. *Considere os polígonos convexos com n vértices e n lados com medidas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $n \geq 4$. Um desses polígonos delimita uma região de área máxima, se e somente se, está inscrito num círculo.*

Demonstração: Para $n = 4$ o teorema 4 nos garante que um quadrilátero delimita uma região de área máxima, se e somente se, está inscrito num círculo.
($\Rightarrow$) Para $n = 5$ consideramos um polígono $\mathbf{P}$ que delimita uma região de área máxima, digamos A_P. Dividimos a região delimitada pelo polígono $\mathbf{P}$ em um triângulo $\mathbf{T}$ com vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ e área A_T e um quadrilátero $\mathbf{Q}$ com vértices $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$ e área A_Q. Portanto, $A_P = A_T + A_Q$. Como A_P é máxima, segue que A_Q é máxima. Pelo teorema 4 o quadrilátero $\mathbf{Q}$ está inscrito num círculo $\mathbf{C}_1$ que contém os vértices $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$. Repetindo o argumento chegamos também à conclusão de que os vértices $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ estão contidos num círculo $\mathbf{C}_2$. Como $\{v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$ temos que $\mathbf{C}_1 \equiv \mathbf{C}_2$ e portanto $\mathbf{P}$ está contido num círculo.

Aplicando o princípio de indução finita obtemos o resultado.
($\Leftarrow$) Para provar a recíproca basta verificar que um polígono convexo com lados fixados pode ser inscrito em um único círculo. Deixamos os detalhes para o leitor mostrar esta unicidade. $\square$

Problema 3. Dados $n - 1$ segmentos com comprimentos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1}$ determinar um polígono com n lados e n vértices, $n \geq 5$, com medidas $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ que delimita uma região de área máxima.

Problema 4. Determinar o número de maneiras distintas que um polígono de n lados é inscritível num círculo.

Observação 3. *Para uma leitura suplementar de geometria não euclidiana sugerimos ao leitor obter as propriedades dos quadriláteros em espaços de curvatura constante, isto é, na esfera unitária* $(K = 1)$ *e no disco de Poincaré* $(K = -1)$.

Conclusão

Os problemas extremais geométricos são de fundamental importância para o desenvolvimento e para o ensino da matemática.

Nesta nota usamos o princípio da indução finita, veja [6], para obter propriedades extremais e métricas dos polígonos. Também fizemos uso das técnicas do cálculo diferencial, veja [1], para analisar pontos críticos de funções. Finalmente usamos a teoria de resultantes, veja [4], para concluir sobre a natureza das raízes dos polinômios de grau maior ou igual a três.

Bibliografia

[1] G. Ávila, *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. 01, LTC, (1979).

[2] H. S. M. Coxeter *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., (1980).

[3] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer *Redécouvrons la Géométrie*, Éditions Jacques Gabay, (1997).

[4] A. Garcia e Y. Lequian, *Álgebra: Um Curso de Introdução*, Projeto Euclides, IMPA, (1989).

[5] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, (1983).

[6] E. Lima et alli. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 01, Col. do Prof. de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, (1996).

[7] C. G. T. Moreira e N. C. Saldanha *A desigualdade isoperimétrica,* Revista Matemática Universitária, SBM, **15**, (1993), pp.13–19.

[8] Revista do Professor de Matemática, **43**, SBM, (2000), pp. 48–49.

Autores: Ronaldo A. Garcia e Helvecio P. de Castro

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
ragarcia@mat.ufg.br, hpcastro@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 100-104

A Caderneta de Geometria[1]

Jorge Sotomayor[2]

Conto de inspiração autobiográfica,
Dedicado a José Tola Pasquel[3]

Foi em 1957, quando comecei o quarto e penúltimo ano do secundário, que chegou ao nosso colégio o professor Juan Herrera. Vinha transferido de outra unidade para ocupar uma posição em tempo integral. A grande maioria dos mestres ainda era horista.

O professor Herrera persuadiu os alunos de Geometria Plana a manterem em dia uma caderneta de bolso contendo todos os teoremas do curso, demonstrados e ilustrados em cores. Esta devia ser levada permanentemente no bolso e ser lida e relida, não só nas horas de estudo normal, mas, também, nas horas mortas: nas filas, nas viagens de ônibus e bondes, etc. O porte da preciosa caderneta poderia ser verificada pelo professor Herrera nos encontros esporádicos com ele, dentro e fora do Colégio. Em aula, a sua atualização, junto com o conhecimento da matéria, era controlada em um ritual de periodicidade incerta.

[1] Artigo publicado na Revista do Professor de Matemática [1]. Republicado na Revista da Olimpíada com a autorização do autor.

[2] Nota dos Editores da R.O.: *Jorge Sotomayor* graduou-se em Matemática no Peru. Continuou seus estudos no IMPA, onde obteve seu doutorado na área de Sistemas Dinâmicos, em 1964. Entre 1969 e 1992 foi pesquisador do IMPA. Atualmente é professor da Universidade de São Paulo. É autor de vários livros e de dezenas de artigos científicos e alguns de divulgação. Orientou numerosas teses de doutorado e dissertações de mestrado.

É membro da Titular da Academia Brasileira de Ciências. Em 1996 foi condecorado com a Grã Cruz do Mérito Científico.

[3] *José Tola Pasquel (1913-1997) distinto Matemático e Educador Peruano.*

Esta caderneta foi meu primeiro trabalho de compilação em Matemática. Diferia de meus garranchudos cadernos pelo esmero e atenção que lhe devotei.

O professor Herrera imprimiu ao curso um dinamismo e um charme sensacionais.Os gregos, Euclides, Thales, Arquimedes, entre outros, desfilaram como numa peça de teatro. Conseguiu transmitir a mensagem de que a Matemática podia servir de contato com a história do pensamento humano e com o rigor dedutivo do raciocínio.

A Geometria capturou minha atenção e, pela primeira vez, estudei um curso de Matemática por interesse e vontade de aprender. Até essa data só concebia que os cursos desta especialidade deviam ser estudados por obrigação, até o ponto de adquirir suficiente destreza em artifícios técnicos e velocidade nos cálculos, visando apenas conseguir a almejada aprovação.

Minha experiência tentando adquir essa técnica nos cursos de Aritmética (em 1954) e Álgebra I (em 1955) havia sido traumática. No curso de Aritmética, o engenheiro Robledo passou boa parte do tempo demonstrando, em vertiginosa corrida contra si próprio, os critérios de divisibilidade por 3, por 5, etc., extraindo longas raízes quadradas e cúbicas, além de maçantes percentagens e juros compostos.

Definitivamente, aos 12 anos de idade, longe estava eu de estar preparado para apreciar ou entender a prova de um teorema sobre divisibilidade. Defendi-me como pude com os métodos de cálculo. Acredito que o engenheiro Robledo se sentia culpado pelo curso que dava. Aprovava os que sabiam e também os outros.

Comecei o curso de Álgebra desprovido da maturidade necessária e sem nenhuma motivação. O profesor Huertas era rouco e fechadão; suas aulas eram soporíferas. Mas, ao contrário do engenheiro Robledo, ele não sentia o menor remorso por causa disto. Reprovava mesmo.

Lá pelo meio do curso, a julgar pelas minhas notas mensais, minha mãe percebeu que iria fracassar se algo não fosse feito de imediato. Convocou o professor Flores, que dava aulas particulares a outros garotos da vizinhança. Na primeira aula ele colocou num papel, com uma clareza mediana e uma caligrafia belíssima, "as regras básicas das operações em expressões algébricas". Depois deu-me um livrinho de exercícios graduados para que eu fizesse os que pudesse. Enquanto isso, ele trabalhava com outro aluno, pois os pegava aos pares, de níveis não necessariamente iguais. No final da aula ele falou para minha mãe num tom de sentença:

“ Não se preocupe, minha senhora, se estudar o rapaz aprenderá”.

Nesta noite minha chorou de felicidade; agradeceu fervorosamente a Santa Rosa de Lima e Frei Martin de Porres (depois promovido a Santo) por não terem permitido que ela gerasse um filho destinado ao fracasso em Matemática e, portanto, um desvalido na vida.

De fato, ela queria que eu fizesse o exame vestibular para o Colégio Militar “Leoncio Prado”, imortalizado nas letras universais por Vargas Llosa em *La Ciudad y los Perros*. O momento era esse: pegavam os garotos do segundo para o terceiro ano do secundário. Era necessário ter notas boas para ser aceito para prestar o exame. Era a porta de entrada natural à Academia Militar, para uma profissão estável e bem paga e, para alguém sem padrinhos fardados, uma nota baixa seria fatal. Este era um negócio muitíssimo sério.

Com poucas aulas do professor Flores consegui equilibrar-me nas notas de Álgebra; ainda assim corria o perigo de ser reprovado por falta de média. Meu pequeno mundo, porém, reservava-me oportunidades de atalhos inesperados. O profesor Huertas lançava a cada ano e por preço módico, com produção independente, uma apostila impressa em mimeógrafo com numerosos exercícios e generosos espaços em branco. Os que quisessem melhorar a média deviam adquirir esta apostila e apresentá-la preenchida com as soluções ...

Passei em Álgebra. Mas, oh zebra! Fui reprovado em Zoologia. Na prova oral final, confundi os “platelmintes”com os “nematelmintes”. O vexame de ter que ir para a segunda época misturou-se, assim, à felicidade de ficar eliminado da inscrição no concurso de admissão ao Colégio Militar e, sobretudo, salvo de chamuscar-me num iminente “batismo de fogo”.

Minha mãe resignou-se com uma rapidez que me surpreendeu. “Será a vontade dos santos”, falou.

A experiência com as expressões algébricas e o domínio das regras de operação entre elas, adquiridos com o professor Flores, me serviram para navegar, sem aplausos nem vaias, na Álgebra II (sistemas de duas e três equações lineaes, equações quadráticas, alguns gráficos de funções algébricas no plano coordenado...) que cursei no ano de 1956.

No útimo ano do secundário, em 1958, havia eu sucumbido, à propaganda subliminar oficial: “os técnicos e os cientistas tirarão nosso país do subdesenvolvimento”, dizia-se. Estava, assim, empolgado para seguir alguma carreira técnica ou científica. Não me sentia competência suficiente, entretanto, para disputar uma das cobiçadas vagas da Escola de Engenharia. As provas de Matemática e Física dos seus vestibulares tinham a fama de serem longas e difíceis. Conhecia, na minha turma do Colégio e no meu bairro, rapazes que iriam candidatar-se; eles, espertos e velozes, deixariam o "papa-léguas" de língua de fora numa disputa na resolução de problemas. Decidi candidatar-me a Medicina.

A partir do segundo semestre desse ano, comecei a freqüentar um cursinho pré-vestibular na área de ciências em geral. Parte deste cursinho consistia numa revisão aprimorada de todo o programa de Matemática do secundário.

Com uma voz fanhosa, mas com clareza e elegância ímpares, o professor Almeza explicou os pontos centrais dos programas de Aritmética e Álgebra. Subitamente entendi as demonstrações dos teoremas de divisibilidade. O trauma que trazia do tempo do engenheiro Robledo se dissipou, como por encanto. Como que atingido por um raio de luz, tive a impressão de vislumbrar uma unidade secreta existente entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria (minha base de apoio). Decidi estudar Matemática.

Nesta decisão, ajudou-me bastante uma série de palestras e atividades pré-vocacionais organizadas no meu colégio para os alunos do último ano. É claro que ninguém falou maravilhas da Matemática. Apresentaram um filme sobre a profissão do médico. Aparecia, entre outras coisas, a cirurgia de um enorme tumor de câncer no pulmão causado pelo tabagismo. Durante várias noites tive pesadelos horríveis nos quais eu manipulava, sem descanso, vísceras pretas de alcatrão de onde jorrava um sangue purulento que me sujava todo, ensopando meu alvo avental.

Com a decisão de estudar Matemática afugentaram-se os pesadelos cirúrgicos –depois de parar de fumar–.

O lugar certo para executar o quixotesco projeto de estudar Matemática, soube no próprio cursinho, não era a Escola de Engenharia mas sim na de Ciências Físicas Matemáticas da Universidade de São Marcos. Fiquei feliz ao ver-me livre da concorrência dos craques na solução de problemas cabeludos que postulavam a Engenharia.

O cursinho terminou em dezembro. Varei noites em janeiro e fevereiro, preparando-me para o vestibular. O programa era de extensão formidável: Matemática, Ciências Biológicas (Zoologia incluída!), Física e Química.

Durantes várias tardes de março de 1959, compareci ao multicentenário prédio do Parque Universitário, hoje convertido em museu, para prestar as provas do vestibular.

Como um poderoso talismã, irradiando coragem e segurança, palpitava no meu bolso a Caderneta de Geometria.

No dia 25 daquele mês, voltei ao campus para saber o resultado. Tinha sido admitido! Voltei emocionado para casa com a notícia.

"Os santos não se esqueceram do seu aniversário, filho", falou minha mãe, abraçando-me.

Bibliografia

[1] Sotomayor, J., *Revista do Professor de Matemática*, vol. 21, pp.1-5, 1992.

Autor: Jorge Sotomayor

Endereço: Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Rua do Matão 1010, Cidade Universitária,
CEP 05508-900, São Paulo, S.P., Brasil
sotp@ime.usp.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 105-109

Ordenação dos Números Complexos

Valdir Vimar da Silva

Qual número é maior, $4+3i$ ou $2+5i$?

Uma pergunta desta natureza foi feita a uma aluna numa prova final. A aluna hesitou um pouco mas acabou por escolher um dos números, apontando-o como sendo o maior. O professor olhou para a aluna, balançou a cabeça em sinal de discordância mas antes de fazer qualquer comentário foi interpelado por um aluno que já havia feito a prova, sido reprovado, e, inconformado, permanecia na sala. Exclamou o tal aluno:

– esta pergunta eu sabia responder! O professor, dirigindo-se para o aluno, disse:

– então qual é a resposta correta?

– O outro número, é claro!

Parecia mesmo claro, pois se não era um dos números só poderia ser o outro. Mas, para espanto do aluno, o professor disse que sua resposta também estava errada e completou dizendo:

– o conjunto dos números complexos não pode ser ordenado.

O professor estava certo?

Para análise desta questão, primeiro é preciso saber o que significa ordenar os elementos de um conjunto. Intuitivamente, significa colocá-los numa fila, como a indicada na figura 1.1. Nesta fila, construída no sentido indicado pela seta, dizemos que o elemento x precede o elemento y se $x = y$ ou se, ao percorrermos a curva no sentido da seta, passamos por x antes de passarmos por y. Observe que, dado um conjunto A, para obtermos o que ordinariamente entendemos por fila, a curva ao longo da qual ela é formada deve satisfazer as condições:

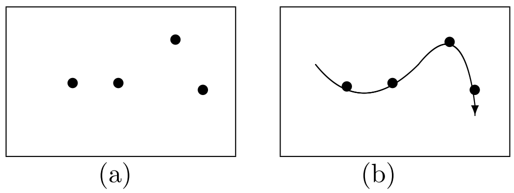


Figura 1.1: (a) conjunto A, (b) uma ordenação de A.

1) Não interceptar a si mesma (para que um elemento não possa ser considerado na fila mais de uma vez). Para isto é necessário que se x precede y, então y não precede x, a não ser que $x = y$.

2) Não mudar de sentido. Isto significa que, se x precede y e y precede z, então x precede z.

3) Ser conexa (constituída de um único pedaço). Assim, se x e y são dois elementos de A, então x precede y ou y precede x.

As condições anteriores podem ser convenientemente tratadas utilizando-se pares ordenados. Simplesmente associamos aos elementos x e y da fila, onde x precede y, o par (x, y). Assim, uma fila de elementos de A pode ser descrita como um conjunto de pares ordenados (x, y), onde x e y pertencem a A. Daí, a definição.

Definição 1. *Uma relação de ordem em um conjunto A (ou uma ordenação de A) é um subconjunto R, de $A \times A$, cujos elementos satisfazem as seguintes condições:*

1) para todo $x \in A$, $\quad (x, x) \in R$;

2) $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$;

3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;

4) para todo $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$.

Exemplo 1. Seja A o conjunto cujos elementos estão representados pelos pontos da parte (a) da figura 1.2.

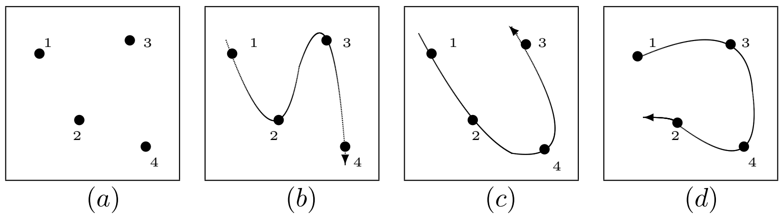


Figura 1.2: Relações de ordem em A.

Os elementos de A podem ser colocados em fila de várias maneiras. Três delas estão indicadas nas partes (b), (c) e (d). A cada uma destas filas corresponde uma relação de ordem. A correspondente à parte (b), por exemplo, é:

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

Exemplo 2. A relação $R = \{(a+bi, c+di) : a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leq d\}$, definida no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, é uma relação de ordem, pois satisfaz todas as condições da definição anterior, como pode ser verificado. R é denominada relação de ordem **lexicográfica**. A fila associada a R pode ser imaginada interpretando-se os números complexos como pontos do plano cartesiano. O número complexo $z_1 = a + bi$ precede o número complexo $z_2 = c + di$ se ambos estiverem sobre a mesma reta vertical, e z_1 abaixo de z_2, ou se z_1 estiver à esquerda de z_2, como indicado na figura 1.3. É comum utilizar um símbolo como $\prec$ para indicar uma relação de ordem qualquer. Neste caso, no lugar de escrever

$$(x, y) \text{ pertence à relação } R.$$

escreve-se $x \prec y$, que se lê x precede y.

Voltando ao caso do professor, vemos, a partir do exemplo 2, que sua explicação também não era muito satisfatória, pois os números complexos podem ser ordenados. Na verdade o professor quis dizer outra coisa e para entendermos esta "outra coisa" vamos precisar de mais uma definição.

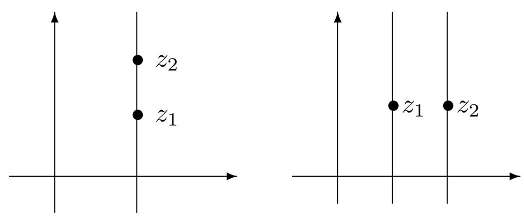


Figura 1.3: z_1 precede z_2

Definição 2. *Uma relação de ordem $\prec$ definida no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é dita* **compatível** *com as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{C}$ se, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos*

a) $z_1 \prec z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$;

b) $0 \prec z_1$ *e* $0 \prec z_2 \Rightarrow 0 \prec z_1 z_2$.

No conjunto dos números reais, a relação de ordem usual $\leq$ (menor ou igual), satisfaz as condições da Definição 2. Para os números complexos vale o seguinte resultado:

Teorema 1. *Nenhuma relação de ordem definida em $\mathbb{C}$ é compatível com as operações usuais de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Suponhamos que a relação de ordem $\prec$ seja compatível com as operações de $\mathbb{C}$. Então,

$$0 \prec z^2, \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

De fato, pela condição 4) da Definição 1, qualquer que seja o número complexo z, temos

$$0 \prec z \text{ ou } z \prec 0.$$

Se $0 \prec z$, pela condição b) da Definição 2, obtemos

$$0.0 \prec z.z \text{ ou } 0 \prec z^2.$$

Se $z \prec 0$, usando a condição a) da Definição 2, obtemos

$$z + (-z) \prec 0 + (-z) \text{ ou } 0 \prec -z.$$

Daí, usando novamente a condição b), temos

$$0.0 \prec (-z).(-z) \text{ ou } 0 \prec z^2.$$

Assim, $0 \prec z^2$, qualquer que seja o número complexo z. Em particular,

$$0 \prec (1+0i)^2 \text{ e } 0 \prec (0+i)^2 \text{ ou } 0 \prec 1 \text{ e } 0 \prec -1.$$

Mas, usando a condição a), de $0 \prec -1$, obtemos

$$0+1 \prec -1+1, \text{ ou } 1 \prec 0.$$

Logo, $1 \prec 0$ e $0 \prec 1$ o que contraria a condição 2) da Definição 1. Esta contradição prova que nenhuma relação de ordem definida em $\mathbb{C}$ pode ser compatível com as operações de adição e multiplicação. $\square$

O conjunto $\mathbb{C}$, munido das operações de adição e multiplicação, é chamado corpo dos números complexos. Um corpo é dito ordenado quando as operações e a relação de ordem nele definidas são compatíveis, ver [2] para mais detalhes.

Conclusão, o que foi demonstrado é que o conjunto dos números complexos pode ser ordenado mas o corpo dos números complexos não. Portanto, para se obter a "outra coisa", ver página 107, que o professor quis dizer é só trocar no que ele disse a palavra conjunto por corpo.

Bibliografia

[1] Carmo, M.P., *Trigonometria e números complexos*, SBM, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, 1979.

[2] Monteiro, L.H.J., *Elementos de Álgebra*, IMPA, 1969.

Autor: Valdir Vilmar da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
valdir@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 3, 2002, 110-118

Equações Diofantinas Lineares

Edméia Fernandes da Silva

Introdução

Diofanto provavelmente viveu por volta de 250 d.C, em Alexandria. Uma de suas obras mais importante e original é *Arithmetica*, uma coleção de treze livros, dos quais restam apenas seis, com cerca de 150 problemas, para cuja resolução Diofanto usa métodos algébricos, o que o muito diferencia dos matemáticos gregos clássicos, que utilizavam métodos geométricos para deduzir suas asserções.

Equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas), com coeficientes inteiros, para as quais interessa apenas as soluções inteiras ou racionais, são conhecidas por *equações diofantinas*.

Exemplos de equações diofantinas surgem em problemas de matemática e da natureza (biologia, física, química). Por exemplo:

• Um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces satisfaz a seguinte equação: $V - A + F = 2$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Euler* para poliedros. E a equação $V - A + F = 2$ é um exemplo de equação diofantina com 3 incógnitas. Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Usando o Teorema de Euler e as relações $A = \frac{nF}{2}$ e $V = \frac{nF}{p}$, onde n é o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice, prova-se que existem apenas cinco poliedros regulares convexos, a saber:

Tetraedro:	$V = 4$,	$F = 4$,	$A = 6$;
Cubo:	$V = 8$,	$F = 6$,	$A = 12$;
Octaedro:	$V = 6$,	$F = 8$,	$A = 12$;
Dodecaedro:	$V = 20$,	$F = 12$,	$A = 30$;
Icosaedro:	$V = 12$,	$F = 20$,	$A = 30$.

Para saber mais veja [4].

• Sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O). Quanto de hidrogênio e oxigênio precisamos? Podemos descrever tal processo da seguinte forma: x moléculas de H_2 reagem com y moléculas de O_2 produzindo z moléculas de H_2O, ou esquematicamente:

$$xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O.$$

Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento, no fim da reação. Assim:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 2z \\ 2y & = & z. \end{array}\right.$$

E este sistema é equivalente à equação $2x - 4y = 0$, com $x = z$.

Diofanto teve grande influência sobre a teoria moderna dos números. Por exemplo, enquanto lia *Arithmetica*, Fermat (1601 - 1665) procurou generalizar o oitavo problema do segundo livro que trata da *equação pitagórica* $x^2 + y^2 = z^2$, escrevendo na margem do livro que a equação $x^n + y^n = z^n$ não admite solução inteira não-trivial, para $n > 2$. Este problema ficou conhecido como *Último Teorema de Fermat* que só foi demonstrado em 1994 pelo matemático A. Wiles, ver [5], [6].

Neste artigo estudaremos as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, a saber, equações do tipo

$$ax + by = c, \tag{1.7}$$

com a, b, c inteiros e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Dizemos que a equação tem solução inteira se existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$. Neste caso representamos tal solução por (x_0, y_0).

Algoritmo de Euclides e Máximo Divisor Comum

Um critério que nos permite decidir se uma equação diofantina admite solução é uma aplicação do *Algoritmo de Euclides* e da noção de *Máximo Divisor Comum* de dois inteiros.

Definição 3. *(Máximo Divisor Comum) Dados a, b inteiros, dizemos que um inteiro d é* máximo divisor comum *entre a e b se: (i) $d \geq 0$; (ii)*

d divide a e d divide b e (iii) se d' é um inteiro tal que d' divide a e d' divide b, então d' divide d.

Usaremos a notação $\text{mdc}(a, b)$ para indicar o máximo divisor comum de dois inteiros a e b.

A seguir apresentaremos o Lema 1 e o Teorema 1 que serão úteis no decorrer deste artigo, cujas demonstrações podem ser vistas em [1].

Lema 1. *Sejam a, b, m inteiros. Então*

(i) $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a - mb, b)$*;*

(ii) $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(-a, -b)$.

Teorema 1. *(Algoritmo de Euclides) Para quaisquer inteiros a, b, com $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r, de modo que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$.*

Exemplo 1. (i) $a = 60$, $b = 7$. Neste caso $60 = 7 \cdot 8 + 4$, $q = 8$ e $r = 4$. (iii) $a = -60$, $b = 7$. Aqui, $-60 = 7 \cdot (-9) + 3$, $q = -9$ e $r = 3$. Para encontrar q e r consideramos o primeiro múltiplo de $b = 7$ menor que $a = -60$. Neste caso, o múltiplo em questão é $-63 = 7 \cdot (-9)$. Assim $-60 = -63 + 3 = 7 \cdot (-9) + 3$.

Na igualdade $a = bq+r$, os elementos a, b, q e r são chamados respectivamente de *dividendo, divisor, quociente* e *resto* na divisão euclidiana de a por b.

Utilizando o Lema 1 e o Teorema 1 podemos calcular o máximo divisor comum de $a \geq 0$ e $b \geq 0$ aplicando, sucessivamente, a partir de a e b, o Algoritmo de Euclides da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl}
a & = & bq_1 + r_1,\ (r_1 < b) \\
b & = & r_1q_2 + r_2,\ (r_2 < r_1) \\
r_1 & = & r_2q_3 + r_3,\ (r_3 < r_2) \\
\cdots & & \\
r_{n-3} & = & r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1},\ (r_{n-1} < r_{n-2}) \\
r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + r_n,\ (r_n < r_{n-1}) \\
r_{n-1} & = & r_nq_{n+1}.
\end{array}$$

Assim, r_n divide r_{n-1} e, daí, $\text{mdc}(r_n, r_{n-1}) = r_n$. Pelo Lema 1 temos que

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \cdots = \text{mdc}(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Portanto, o último resto não nulo r_n nos fornece o valor do $\mathrm{mdc}(a,b)$. Este procedimento é uma demonstração construtiva da existência de máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Observamos que na sequência $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ a existência de um índice n para o qual $r_{n+1} = 0$ é garantida pelo fato de que qualquer subconjunto dos números naturais admite um mínimo.

Exemplo 2. Calculemos $\mathrm{mdc}(28, 90)$. Temos:

$$\begin{array}{rcl} 90 & = & 28 \cdot 3 + 6 \\ 28 & = & 6 \cdot 4 + 4 \\ 6 & = & 4 \cdot 1 + 2 \\ 4 & = & 2 \cdot 2 + 0. \end{array}$$

Portanto, $\mathrm{mdc}(28, 90) = 2$.

Enunciaremos agora um resultado que é muito útil para encontrar uma solução particular de uma equação diofantina linear (1.7).

Teorema 2. *Se $d = \mathrm{mdc}(a,b)$, a, b inteiros, então existem inteiros r, s tais que*

$$d = ar + bs.$$

Demonstração: Ver [1]. $\square$

Os elementos r, s não estão univocamente determinados e o Algoritmo de Euclides, usado de trás para frente, nos permite encontrar uma solução particular para este problema quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$. De fato, considere as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{cl} (1) & r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n \\ (2) & r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1} \\ (3) & r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ (n-2) & r_3 = r_1 - r_2 q_3 \\ (n-1) & r_2 = b - r_1 q_2 \end{array}$$

Substituindo o valor de r_{n-1} de (2) em (1) obtemos

$$r_n = (1 - q_n q_{n-1}) r_{n-2} - q_n r_{n-3}.$$

Substituindo nesta igualdade o valor de r_{n-2} dado por (3), obtemos

$$r_n = -(q_{n-3} + q_{n-1}q_{n-2}q_{n-3} + q_{n-1}) r_{n-3} + (1 + q_{n-1}q_{n-2}) r_{n-4}.$$

Prosseguimos assim, sucessivamente, até obtermos r, s tais que

$$\mathrm{mdc}(a, b) = ar + bs.$$

Exemplo 3: No caso do Exemplo 1 temos $\mathrm{mdc}(28, 90) = 2$ e

$$\begin{aligned} 2 &= 6 - 4 \cdot 1 \\ 4 &= 28 - 6 \cdot 4 \\ 6 &= 90 - 28 \cdot 3. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} 2 &= 6 - (28 - 6 \cdot 4) = 6 \cdot 5 - 28 = (90 - 28 \cdot 3)5 - 28 \\ &= 90 \cdot 5 - 28 \cdot 16 = 90 \cdot 5 + 28 \cdot (-16). \end{aligned}$$

Portanto, $r = 5$ e $s = -16$.

Observação 1: O conceito de máximo divisor comum pode ser estendido para três ou mais números inteiros, por recorrência, assim:

$$\mathrm{mdc}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \mathrm{mdc}(\mathrm{mdc}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n).$$

Exemplo 4: $\mathrm{mdc}(-6, -4, 8) = \mathrm{mdc}(\mathrm{mdc}(-6, -4), 8)$, isto é,

$$\mathrm{mdc}(-6, -4, 8) = \mathrm{mdc}(\mathrm{mdc}(6, 4), 8) = \mathrm{mdc}(2, 8) = 2.$$

Equações Diofantinas Lineares

A primeira questão da Prova Nível 1 da X Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás é um caso de equação diofantina linear. A questão diz o seguinte: *Um número natural divisível por 3 deixa resto 5 quando dividido por 100.*

(a) Coloque em ordem crescente todos os números de três algarismos com a propriedade acima;

(b) Qual o menor número de 4 algarismos com a propriedade acima? E o maior número de 4 algarismos com a propriedade?

Primeiramente indiquemos um destes números por n. Como n é divisível por 3 temos que $n = 3x$, com x inteiro. Por outro lado, quando dividido por 100, n deixa resto 5, logo $n = 100y + 5$, com y inteiro. Logo

$3x = 100y + 5$. A resolução desta questão consiste em encontrar soluções inteiras (e convenientes) da seguinte equação diofantina

$$3x - 100y = 5.$$

Para resolver uma dada equação diofantina primeiro devemos saber se esta equação admite solução e se admite, quantas são. O próximo teorema nos diz em que condições a equação diofantina linear (1.7), admite soluções.

Os teoremas a seguir, juntamente com suas demonstrações, também extraídos de [1], nos fornecem um método para obter soluções da equação (1.7).

Teorema 3. *Uma equação diofantina* (1.7)*, onde* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*, admite solução se, e somente se,* $d = \text{mdc}(a, b)$ *divide* c*.*

Demonstração: Suponhamos que a equação (1.7) admita solução inteira (x_0, y_0), isto é, $ax_0 + by_0 = c$. como d divide a e d divide b, segue que d divide $ax_0 + by_0$ e, portanto, d divide c.

Reciprocamente, suponhamos que d divide c. Então existe um inteiro n tal que $c = nd$. Como $d = \text{mdc}(a, b)$, pelo Teorema 2, existem inteiros r, s tais que $ar + bs = d$. Assim

$$c = n(ar + bs) = a(nr) + b(ns).$$

Portanto, $(x_0, y_0) = (nr, ns)$ é uma solução da equação (1.7). $\square$

A demonstração do Teorema 3 nos diz como encontrar uma solução particular da equação (1.7). De fato, utilizando o Algoritmo de Euclides de trás para frente, como feito no Exemplo 2, encontramos inteiros r, s tais que $ar + bs = d = \text{mdc}(a, b)$. Como d divide c, $c = n \cdot d$, para algum inteiro n. Assim

$$n(ar + bs) = nd = c \text{ e } a(nr) + b(ns) = c,$$

de modo que $(x_0, y_0) = (nr, ns)$ é uma solução particular da equação (1.7).

Exemplo 4. Voltando ao nosso problema, queremos resolver a equação diofantina $3x - 100y = 5$. Como $\text{mdc}(3, 100) = 1$, pelo Teorema 3, tal equação admite solução. Vamos agora aplicar o Algoritmo de Euclides aos números 3 e 100. Então $100 = 3 \cdot 33 + 1$. Assim

$$1 = 100 \cdot 1 + 3 \cdot (-33) \text{ e } 5 = 100 \cdot 5 + 3 \cdot (-165).$$

Logo, $x = -165$ e $y = 5$ é uma solução particular da equação $3x+100y = 5$, e a nossa equação original é $3x - 100y = 5$. Portanto $(x_0, y_0) = (-165, -5)$ é uma solução de $3x - 100y = 5$, conforme Observação 2.

Observação 2: Se (x_0, y_0) é solução da equação (1.7), então $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ e $(-x_0, -y_0)$ são, respectivamente, soluções de $-ax + by = c$, $ax - by = c$ e $-ax - by = c$.

Contudo esta solução não resolve o nosso problema, pois com ela encontramos $n = -495$, e estamos supondo que n é um número natural. Para resolver completamente este problema temos que poder calcular, a partir de uma dada solução, todas as possíveis soluções de uma equação (1.7). Com este intuito apresentamos o próximo Teorema.

Observação 3: A mesma argumentação usada para provar o Teorema 3 garante que uma equação diofantina linear com n incógnitas $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ admite solução se, e somente se,

$$d = \text{mdc}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{divide} \quad b.$$

Teorema 4. *Seja* (x_0, y_0) *uma solução particular da equação* (1.7)*, onde* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$*. Então essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas é*

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{d}t,\ y_0 - \frac{a}{d}t \right),\ t \in \mathbb{Z} \right\},$$

onde $d = \text{mdc}(a, b)$*.*

Demonstração: Suponhamos que (x', y') é outra solução da equação (1.7). Então

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0, \text{ o que equivale a } a(x' - x_0) = b(y_0 - y').$$

Como d divide a e d divide b, existem inteiros m e n tais que $a = md$ e $b = nd$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$. Assim

$$m(x' - x_0) = n(y_0 - y')$$

e então m divide $n(y_0 - y')$. Mas $\text{mdc}(m, n) = 1$, logo m deve dividir $y_0 - y'$, isto é, $y_0 - y' = mt$, para algum t inteiro. Portanto

$$y' = y_0 - mt = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

De $m(x' - x_0) = n(y_0 - y') = nmt$ temos, $x' - x_0 = nt$, ou equivalentemente,

$$x' = x_0 + nt = x_0 + \frac{b}{d}t.$$

Agora é fácil ver que para todo t inteiro, o par

$$\left(x_0 + \frac{b}{d}t,\, y_0 - \frac{a}{d}t\right)$$

é uma solução da equação dada. $\square$

Podemos agora, então, determinar as soluções do nosso problema.

Já vimos que a equação $3x - 100y = 5$ admite a solução particular $x_0 = -165$ e $y_0 = -5$. Portanto, pelo Teorema 4, a solução geral desta equação é dada por

$$\begin{array}{rcl} x & = & -165 - 100t \\ y & = & -5 - 3t. \end{array}$$

Como $n > 100$ e $n = 3x = 3(-165 - 100t)$ temos que $x > -165 - 100t$, logo $t < -\frac{595}{300}$. Como t deve ser um número inteiro segue que $t \leq -2$. Assim obtemos as soluções do nosso problema para os seguintes valores de t:

$$\begin{array}{l} t = -2, \quad x = 35 \quad \text{e} \quad n = 105, \\ t = -3, \quad x = 135 \quad \text{e} \quad n = 405, \\ t = -4, \quad x = 235 \quad \text{e} \quad n = 705, \\ t = -5, \quad x = 335 \quad \text{e} \quad n = 1005, \\ t = -34, \quad x = 3235 \quad \text{e} \quad n = 9705. \end{array}$$

Bibliografia

[1] DOMINGUES, H.H., *Fundamentos de Aritmética*, Atual Editora, São Paulo, 1991.

[2] HEFEZ, A., *Curso de Álgebra*, **vol. 1**, Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, 1993.

[3] LA ROQUE,G., PITOMBEIRA,J.B., *Uma Equação Diofantina e suas Resoluções*,Revista do Professor de Matemática **19**, 39-47, 1991.

[4] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E., MORGADO, A.C., *A Matemática do Ensino Médio*, **vol. 2**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2000.

[5] RIBENBOIM, P., *Fermat's Last Theorem for Amateurs,* Springer Verlag, 1999.

[6] SINGH, S., *O Último Teorema de Fermat,* Editora Record, 1998.

Autora: Edméia Fernandes da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Olimpíadas
XI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás/2002

FICHA DE INSCRIÇÃO

ESCOLA: ____

END./CEP:_____________________________ FONE: ______________

( ) Pública Municipal ( ) Pública Estadual ( ) Pública Federal
( ) Conveniada ( ) Particular

As provas serão realizadas no Campus (endereços na pág. seguinte) de:
( ) 1-Goiânia ( ) 3-Catalão ( ) 5-Rialma ( ) 7-Itumbiara
( ) 2-Anápolis ( ) 4-Jataí ( ) 6-Iporá ( ) 8-Quirinópolis

Nível 1 (5ª a 6ª séries)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
4			

Nível 2 (7ª a 8ª séries)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
5			

Nível 3 (Ensino Médio)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Local e data: ____________, ______________________

______________________________ ______________
Diretor ou Responsável (nome legível) Assinatura

ENDEREÇOS

1. Universidade Federal de Goiás
   Instituto de Matemática e Estatística
   Rodovia Goiânia/Nerópolis - Campus II (Samambaia)
   74001-970 - Goiânia - GO
   Fone: (62) 521-1208
2. Universidade Estadual de Goiás - UEG - Anápolis
   Av. JK, nº 146, Bairro Jundiaí
   75110-390 - Anápolis - GO
   Fone: (62) 328-111
3. Campus Avançado de Catalão - UFG
   Departamento de Matemática, CP: 56
   Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 - Setor Universitário
   75405-000 - Catalão - GO
   Fone: (62) 441-3484
4. Campus Avançado de Jataí - UFG
   Departamento de Matemática
   Rua Riachuelo, 150 0 Bairro Samuel Grahan
   75800-000 Jataí - GO
   Fone: (62) 631 1184
5. Campus de Rialma - UFG
   Rua Luiz Benedito Dias, s/n, Setor Alvorada
   76310-000 Rialma - GO
   Fone: (62) 397 1556
6. Universidade Estadual de Goiás - UEG - Iporá
   Av. R-2, Qd. 01, Jardim Novo Horizonte II
   76200-000 Iporá - GO
   Fone: (62) 674 1651
7. Universidade Estadual de Goiás - UEG - Itumbiara
   Av. Tabelião B. Dias da Rocha, s/n, Conj. Hab. Paranaíba, Planalto
   75533-140 Itumbiara - Goiás
   Fone: (64) 343 19250
8. Universidade Estadual de Goiás - UEG - Quirinópolis
   Av. Brasil, Qd. 03, Lt. 01 - Conjunto Hélio Leão- CEP 75870-000
   75870-000 Quirinópolis - Goiás
   Fone:(64) 651 2285

Olimpíada de Matemática
do Estado de Goiás

FICHA DE CADASTRAMENTO

(Preencher com letra de forma)

( ) Cadastramento ( ) Recadastramento - Atualização de dados

Instituição:		
Pública ( )	Conveniada ( )	Privada ( )
Nº de alunos:	Ens. Fund.	Ens. Médio:
Diretor:		
Endereço:		
Bairro:		
Cidade:		Estado:
CEP:		
Telefone:		
Fax:		
e-mail:		

Professor Responsável:
Formação:
Endereço:
Bairro:
Cidade:
CEP:
Telefone:
Fax:
e-mail:

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131
Fone: (062) 521 1208 / Fax: (062) 521 1180
CEP: 74001-970 Goiânia - GO
http://www.mat.ufg.br/extensao/olimpiada
e-mail: omeg@mat.ufg.br

Objetivo e Política Editorial

A Revista da OLIMPÍADA tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estido claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX e LATEX podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabaho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres ad hoc e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.